Κεφάλαιο 1ο Φυσικοί αριθμοί

Καλημέρα, φίλε μου Αριθμέ

Διαβάζω και γράφω φυσικούς αριθμούς.
Κατανοώ την αρχή της διαδοχής στην ακολουθία των φυσικών αριθμών.
Μαθαίνω την αξία των ψηφίων ενός φυσικού αριθμού.

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του 64ου Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης, στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού προγράμματος SOCRATES/COMENIUS, αναζήτησαν στοιχεία για τους ανήλικους εργαζόμενους στην Ελλάδα.

Στο διπλανό πίνακα περιλαμβάνονται τα στοιχεία που συγκέντρωσαν.

- Ταξινομήστε τους αριθμούς του πίνακα σε ομάδες, ανάλογα με το πλήθος των ψηφίων τους.

  (2ψηφία) ....

  (3ψηφία) ....

  (4ψηφία) ....

  ....

  (5ψηφία) ....

  ....

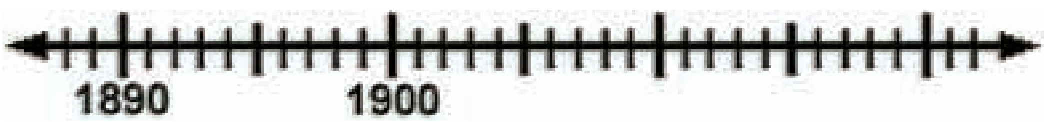
- Σε ποιον από τους αριθμούς το ψηφίο 2 έχει τη μεγαλύτερη αξία;
- Πόσα παιδιά μικρότερα από 15 ετών εργάζονταν στην Ελλάδα το 1996;
- Πόσοι έφηβοι 15-18 ετών εργάζονταν σε βιομηχανίες;
- Σε ποιον κλάδο εργάζονταν οι περισσότεροι ανήλικοι;
- Συζητήστε στην τάξη για τη σημασία των αριθμών στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

Ανήλικοι εργαζόμενοι ανά τομέα απασχόλησης στην Ελλάδα

Τομέας Απασχόλησης	Ηλικία	
	10-14	15-18
Γεωργία, κτηνοτροφία	3.053	22.798
Αλιεία	30	679
Ορυχεία- λατομεία		32
Βιομηχανία	556	16.470
ΔΕΗ, Ύδρευση, Φ. Αέριο		58
Κατασκευές	273	8.857
Εμπόριο	664	16.373
Ξενοδοχεία, εστιατόρια	199	8.074
Μεταφορές		1.766
Τράπεζες		448
Άλλες δραστηριότητες	41	3.654
Παροχή υπηρεσιών		4.384
Οικιακό προσωπικό		397
ΣΥΝΟΛΟ	**4.816**	**83.989**

Πηγή: ΕΣΥΕ, Έρευνα Εργατικού Δυναμικού, 1996

Δραστηριότητα 2η



Να τοποθετήσετε στην ιστορική γραμμή τα ακόλουθα ιστορικά γεγονότα.

Α. Οι πρώτοι σύγχρονοι Ολυμπιακοί Αγώνες 1896

Β. Δεκαέξι χρόνια μετά τους Ολυμπιακούς Αγώνες γίνεται ο Α΄ Βαλκανικός πόλεμος.

Γ. Δύο χρόνια μετά αρχίζει ο Α΄ Παγκόσμιος πόλεμος, που διαρκεί 4 χρόνια (Σημειώστε την αρχή και το τέλος του.)

Δ. Η λήξη του πολέμου βρίσκει τον Οδυσσέα Ελύτη στην Αθήνα σε ηλικία 7 ετών. (Σημειώστε τη χρονολογία της γέννησής του.)

Πολλές φορές στη ζωή μας χρησιμοποιούμε αριθμούς για να εκφράσουμε ένα πλήθος ή μια σειρά. Λέμε, για παράδειγμα, ότι από τους 23 μαθητές της τάξης στη γραμμή ο Γιάννης είναι 1ος. Οι αριθμοί 23 και 1 ονομάζονται «φυσικοί αριθμοί».

Φυσικοί αριθμοί

Οι αριθμοί: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 99, ..., 1000, ... λέγονται **φυσικοί αριθμοί.**
Κάθε φυσικός αριθμός, εκτός από το 0, σχηματίζεται από τον προηγούμενό του, με την πρόσθεση του αριθμού 1.

Για τη γραφή όλων των φυσικών αριθμών υπάρχουν δέκα ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Το ίδιο ψηφίο, ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό, δηλώνει μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κ.λπ.

Παραδείγματα

Ο αριθμός 6 έχει επόμενο τον αριθμό 7, ο αριθμός 99 τον αριθμό 100, ο αριθμός 1000 τον αριθμό 1001 κ.ο.κ.

Ο αριθμός 434 σχηματίζεται με τα ψηφία 4 και 3. Για το σχηματισμό του αριθμού 11, χρησιμοποιήσαμε μόνο το ψηφίο 1.

Εφαρμογή 1η

Να γραφεί με ψηφία ο αριθμός **επτά εκατομμύρια δεκαπέντε χιλιάδες εννιακόσια δύο.**

Λύση

Μονάδες εκατομμυρίων	Εκατοντάδες χιλιάδων	Δεκάδες χιλιάδων	Μονάδες χιλιάδων	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
7.	0	1	5.	9	0	2

Κάθε ψηφίο διαβάζεται ανάλογα με τη θέση του στον αριθμό. Το ψηφίο μηδέν (0) δεν διαβάζεται, αλλά γράφεται για να κρατά τα άλλα ψηφία στη σωστή τους θέση και δηλώνει ότι λείπουν οι μονάδες της θέσης που κατέχει.

Στους αριθμούς που έχουν περισσότερα από τρία ψηφία, για λόγους ευκολίας στην ανάγνωση, χωρίζουμε με μία τελεία κάθε τριάδα ψηφίων, αρχίζοντας από τις μονάδες (δεξιά).

Έτσι, θα γράψουμε τον αριθμό 7015902 χρησιμοποιώντας τις τελείες διαχωρισμού: ....

Εφαρμογή 2η

Τι φανερώνει το ψηφίο 2 στους παρακάτω αριθμούς;

α. 102 **β.** 1.020 **γ.** 12.618 **δ.** 548.281 **ε.** 32.405.186

Λύση

α. μονάδες, β. δεκάδες, γ. μονάδες χιλιάδων, δ. εκατοντάδες, ε. μονάδες εκατομμυρίων

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **φυσικός αριθμός.** Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Το μηδέν ως ψηφίο δηλώνει ότι δεν υπάρχουν μονάδες μιας τάξης.	❒	❒
Ανάμεσα στο 10 και το 40 το ψηφίο 3 εμφανίζεται 5 φορές.	❒	❒
Οι μονοψήφιοι φυσικοί αριθμοί είναι 9.	❒	❒

Κεφάλαιο 2ο

Δεκαδικοί αριθμοί

Αριθμοί με... συνοδεία

Διαβάζω και γράφω δεκαδικούς αριθμούς.
Μαθαίνω την αξία των ψηφίων ενός δεκαδικού αριθμού.
Κατανοώ τις ιδιότητες των δεκαδικών αριθμών.

Δραστηριότητα 1η

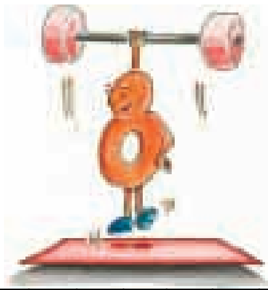
Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του 25ου Δημοτικού Σχολείου Τρικάλων θέλησαν να καταγράψουν το ύψος τους. Μετρήθηκαν λοιπόν και κατέγραψαν στον παρακάτω πίνακα τον αριθμό των παιδιών που αντιστοιχούν σε κάθε ύψος.

ΥΨΟΣ ΣΕ ΜΕΤΡΑ	1,48	1,49	1,50	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,61
ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΙΔΙΩΝ	1	1	1	1	0	2	2	4	3	3	2	2	0	1
ΥΨΟΣ ΣΕ ΕΚΑΤΟΣΤΑ														

- Τι αριθμούς χρησιμοποίησαν για να καταγράψουν τις μετρήσεις τους;
- Επαρκούν οι φυσικοί αριθμοί για να εκφράσουμε μετρήσεις;
- Μπορείς να συμπληρώσεις την τελευταία σειρά του πίνακα;
- Τι αριθμούς χρησιμοποίησες; Γιατί;

....

....



Δραστηριότητα 2η

Πριν από τους αγώνες άρσης βαρών οι αθλητές της ίδιας κατηγορίας ζυγίζονται με ακρίβεια γραμμαρίου, ώστε σε περίπτωση ισοπαλίας να κερδίζει ο ελαφρύτερος.

Στο διπλανό σχήμα καταγράφεται το αποτέλεσμα της ζύγισης του αθλητή Πύρρου Δήμα στους Ολυμπιακούς Αγώνες του 2000· η υποδιαστολή χωρίζει το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος. Συμπλήρωσε στο σχήμα τι δηλώνουν οι αριθμοί 0, 6 και 5 στο δεκαδικό μέρος.

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες				
	8	4	,	0	6	5

- Προσπαθήστε τώρα να εκφράσετε το αποτέλεσμα της ζύγισης με λόγια.

....

....

....

Μέσα από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώσαμε ότι οι φυσικοί αριθμοί δεν αρκούν για να εκφράσουμε κάποιες μετρήσεις με ακρίβεια. Έτσι, χρησιμοποιούμε ένα άλλο είδος αριθμών που ονομάζονται «δεκαδικοί αριθμοί».

Δεκαδικοί Αριθμοί

Δεκαδικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί που αποτελούνται από ένα ακέραιο και ένα δεκαδικό μέρος. Τα δύο μέρη χωρίζονται μεταξύ τους με την υποδιαστολή (,).
Όπως οι φυσικοί, έτσι και οι δεκαδικοί αριθμοί, σχηματίζονται από μονάδες διάφορων τάξεων στο ακέραιο και στο δεκαδικό μέρος.

Τόσο στο ακέραιο όσο και στο δεκαδικό μέρος κάθε τάξη είναι 10 φορές μεγαλύτερη από την αμέσως επόμενη προς τα δεξιά της.
Η αξία ενός δεκαδικού αριθμού δεν αλλάζει, αν προσθέσουμε ή διαγράψουμε μηδενικά στο τέλος του.

Παραδείγματα

1,72
27,39
384,206

Στους παραπάνω δεκαδικούς αριθμούς το ψηφίο 2 έχει διαφορετική αξία, ανάλογα με τη θέση που έχει στον αριθμό.

1 δέκατο = 10 εκατοστά
1 εκατοστό = 10 χιλιοστά
(δείξτε το στο χάρακά σας)
0,1 = 0,10
0,01 = 0,010

Εφαρμογή 1η

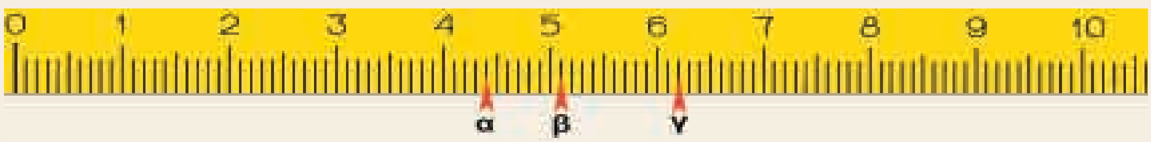
Να γραφεί με ψηφία ο αριθμός **εκατόν δύο και σαράντα πέντε χιλιοστά.**
Ονομάστε κάθε ψηφίο, ανάλογα με την αξία θέσης του στον αριθμό.

Λύση
Το δεκαδικό μέρος διαβάζεται με το όνομα της αξίας του τελευταίου ψηφίου. Έτσι σε αυτόν τον αριθμό, αφού γράψουμε το ακέραιο μέρος του (102), συνεχίζουμε στο δεκαδικό, γνωρίζοντας ότι το ψηφίο 5 πρέπει να μπει στην τρίτη θέση μετά την υποδιαστολή.
Γράφουμε: **102,045.**

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες		Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά
1	0	2	,	0	4	5

Εφαρμογή 2η

Μετρήσαμε το μήκος τριών τύπων μπαταριών και βρήκαμε τα εξής αποτελέσματα:
α) τύπος **D:** 6,2 εκατοστά, β) τύπος **AAA:** 4,4 εκατοστά, γ)τύπος **AA:** 5,1 εκατοστά.
Σημειώστε στην αριθμογραμμή τα σημεία α, β και γ που αντιστοιχούν στις μετρήσεις.
Λύση



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **δεκαδικός αριθμός.** Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Μετά την υποδιαστολή γράφεται το ακέραιο μέρος.	❒	❒
Τα εκατοστά γράφονται στη δεύτερη θέση μετά την υποδιαστολή.	❒	❒
Το 1 δέκατο της ακέραιης μονάδας είναι ίσο με 10 χιλιοστά της ίδιας ακέραιης μονάδας.	❒	❒

Οι αριθμοί αλλάζουν εμφάνιση

Κατανοώ την ανάγκη μετατροπής των αριθμών από τη μία μορφή στην άλλη.
Μετατρέπω τους δεκαδικούς αριθμούς σε κλάσματα.
Μετατρέπω τα δεκαδικά κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς.

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης του 2ου Δημοτικού Σχολείου Νιγρίτας επισκέφθηκαν τον αρχαιολογικό χώρο στο Δίον. Κατά την επιστροφή θέλησαν να καταγράψουν την απόσταση από το σχολείο τους. Ζήτησαν λοιπόν από τον οδηγό να «μηδενίσει» το μετρητή του λεωφορείου. Το λεωφορείο κατά την επιστροφή άφησε τους μαθητές στην πλατεία του χωριού που απέχει $\frac{3}{10}$ του χιλιομέτρου από το σχολείο τους.

Η ένδειξη του μετρητή φαίνεται στη διπλανή εικόνα.

Ο δάσκαλος εξήγησε στα παιδιά ότι η απόσταση δεν ήταν 2.535 αλλά 253,5 χιλιόμετρα, επειδή το κόκκινο ψηφίο δεν μετρά χιλιόμετρα αλλά δέκατα του χιλιομέτρου.

- Αφού τα αριθμητικά δεδομένα είναι διαφορετικής μορφής, τι πρέπει να κάνουν τα παιδιά για να υπολογίσουν πόσο απέχει το Δίον από το σχολείο τους;

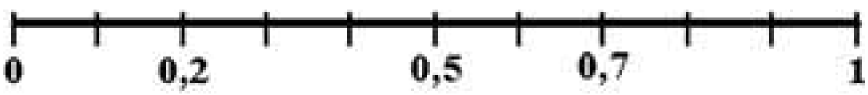
  ....

  ....

Δραστηριότητα 2η

Για να φτιάξουν ένα γλυκό στο ολοήμερο τμήμα, τα παιδιά ζύγισαν 0,2 κιλά σοκολάτας. Κατόπιν έβαλαν να λιώσει σε ένα δοχείο / δοσομετρητή του 1 κιλού. Χρωματίστε το διπλανό σχήμα μέχρι την ένδειξη έως την οποία ανέβηκε η στάθμη της λιωμένης σοκολάτας.

- Τοποθετήσετε τα κλάσματα των ενδείξεων του δοσομετρητή στην παρακάτω αριθμογραμμή.



- Διατυπώστε έναν κανόνα για τη μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα.

  ....

  ....

Κάνοντας τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές χρειάζεται να γράψουμε τα δεκαδικά κλάσματα ως δεκαδικούς αριθμούς και αντίστροφα.

Μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα και αντίστροφα

Οι **δεκαδικοί αριθμοί** είναι δυνατό να γραφούν ως δεκαδικά κλάσματα και τα **δεκαδικά κλάσματα** ως δεκαδικοί αριθμοί.

Για να γράψουμε έναν δεκαδικό αριθμό ως κλάσμα, γράφουμε όλο τον αριθμό, χωρίς την υποδιαστολή, στη θέση του **αριθμητή** και στη θέση του **παρονομαστή** γράφουμε τον αριθμό 1 με τόσα μηδενικά όσα ήταν τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού.

Για να γράψουμε ένα δεκαδικό κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό, γράφουμε μόνο τον **αριθμητή** του και χωρίζουμε με υποδιαστολή τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα μηδενικά είχε ο **παρονομαστής.**

Παραδείγματα

Ο αριθμός 0,5 μπορεί να γραφεί ως $\frac{5}{10}$.

Ο αριθμός $\frac{8}{10}$ μπορεί να γραφεί ως 0,8.

Ο αριθμός 1,5 γίνεται: 15 αριθμητής, με παρονομαστή το 10, δηλαδή $\frac{15}{10}$ ή $1\frac{5}{10}$.

Ο αριθμός $\frac{8}{10}$ γράφεται ως 0,8.

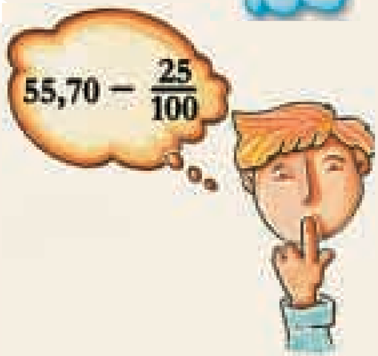
Εφαρμογή 1η

Πώς θα γραφεί ως κλάσμα ο δεκαδικός αριθμός **δύο και σαράντα πέντε εκατοστά;**

Λύση

Ο αριθμός 2,45 γράφεται στη θέση του αριθμητή, χωρίς την υποδιαστολή, ενώ στη θέση του παρονομαστή γράφεται η μονάδα (1) με δύο μηδενικά (00), δηλαδή το 100.
Έτσι έχουμε: 2,45 = ——— .

Εφαρμογή 2η



Αν αφαιρέσουμε από τον δεκαδικό αριθμό 55,70 τον αριθμό, $\frac{25}{100}$ ποιος αριθμός θα προκύψει;

Λύση

Ο αριθμός $\frac{25}{100}$ γράφεται ως δεκαδικός: 0,25.

Αφαιρούμε τώρα από το 55,70 το 0,25

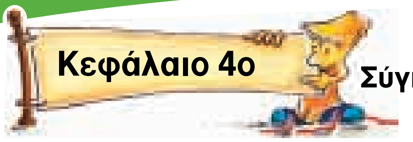
55,70 - 0,25 = ...

Απάντηση: Θα προκύψει ο αριθμός ....

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη διαδικασία της **μετατροπής δεκαδικών αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα και αντίστροφα.** Εξήγησε με παραδείγματα τη διαδικασία αυτή.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Κάτι που κοστίζει 30 λεπτά, κοστίζει $\frac{30}{100}$ του €.	❒	❒
Για να μετατρέψουμε έναν δεκαδικό αριθμό σε κλάσμα, αρκεί να βάλουμε το 10 στη θέση του παρονομαστή.	❒	❒



Σύγκριση φυσικών ή δεκαδικών αριθμών

Οι αριθμοί αναμετριούνται

Συγκρίνω φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.
Χρησιμοποιώ τα σύμβολα > και <.
Διατάσσω τους φυσικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.
Παριστάνω τους αριθμούς με σημεία πάνω σε μια ευθεία.

Δραστηριότητα 1η *«Υπερατού»*

Το παιχνίδι «Υπερατού» παίζεται με κάρτες που έχουν φωτογραφίες και πίνακες με τα χαρακτηριστικά αυτοκινήτων, σκαφών, αεροπλάνων κ.λπ.
Οι δύο παίκτες ανακατεύουν τις κάρτες και παίρνουν από μισές. Ο πρώτος παίκτης διαλέγει από την 1η κάρτα του εκείνο το χαρακτηριστικό που πιστεύει ότι υπερτερεί από το αντίστοιχο στην κάρτα του αντιπάλου. Λέει το χαρακτηριστικό με την τιμή στον αντίπαλο και, αν υπερισχύει, τότε ο αντίπαλος του δίνει την κάρτα του. Το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρι να τελειώσουν όλες οι κάρτες κάποιου παίκτη.

- Τι θα διάλεγες να πεις αν είχες την κάρτα Γ1, χωρίς να γνωρίζεις τι έχει ο αντίπαλος;
- Ανάμεσα στα δύο σκάφη αυτό με τη μεγαλύτερη ισχύ είναι και το πιο γρήγορο;
- Με τη σύγκριση μπορούμε να βρούμε ποιο σκάφος είναι το πιο γρήγορο, το πιο δυνατό και το πιο βαρύ. Μπορούμε όμως να βρούμε ποιο υπερτερεί σε όλα;

Δραστηριότητα 2η *«Οι αποστάσεις στις Κυκλάδες»*

ΟΙ ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ (ΣΕ ΜΙΛΙΑ) ΤΩΝ ΓΥΡΩ ΝΗΣΙΩΝ ΑΠΟ ΤΟ ΛΙΜΑΝΙ ΤΗΣ ΣΥΡΟΥ								
Πάρος	Νάξος	Κύθνος	Τήνος	Μύκονος	Σίφνος	Σέριφος	Κέα	Άνδρος
25,2	30,3	40,5	12,2	19,1	41,3	37,5	33,8	51,2

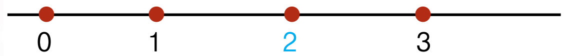
Ενώ στο χάρτη η Σύρος φαίνεται να βρίσκεται στο κέντρο των νησιών, οι αποστάσεις ανάμεσα στα λιμάνια διαφέρουν, όπως φαίνεται και στον πίνακα.

- Ποιο είναι το πιο μακρινό και ποιο το πιο κοντινό νησί, σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα; ....
- Η Σέριφος ή η Κύθνος φαίνεται να είναι πιο κοντά στη Σύρο στο χάρτη;
- Αφού εξετάσετε τα στοιχεία του πίνακα, απαντήστε στο ίδιο ερώτημα.
- Διατάξτε τα λιμάνια από το κοντινότερο προς το πιο μακρινό:

  ....

  ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να διαπιστώσουμε ότι πολλές φορές χρειάζεται να συγκρίνουμε φυσικούς ή δεκαδικούς αριθμούς μεταξύ τους.

Σύγκριση και διάταξη αριθμών	**Παραδείγματα**
Δύο αριθμοί (φυσικοί ή δεκαδικοί) μπορούν πάντα να **συγκριθούν** μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα της σύγκρισης εκφράζεται με τα σύμβολα <, >, =.	801 < 811 1,13 < 1,15
Μπορούμε να **διατάξουμε** τους αριθμούς, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της σύγκρισής τους, από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο (αύξουσα σειρά) ή από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο (φθίνουσα σειρά).	2,05 < 3,1 < 3,5 23 > 15 > 9 ~~9 < 23 > 15~~
Η σύγκριση και η διάταξη των αριθμών μας επιτρέπει να παρεμβάλουμε έναν ή περισσότερους αριθμούς ανάμεσα σε δύο άλλους.	1 < .... < 3 

Εφαρμογή 1η

Ένα έτοιμο τοστ στοιχίζει 1,10 €. Για να το φτιάξουμε μόνοι μας, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα εξής υλικά: ψωμί που κοστίζει 0,20 €, σαλάμι που κοστίζει 0,23 € και κασέρι που κοστίζει 0,18 €. Σε ποια περίπτωση μας στοιχίζει το τοστ περισσότερο;

Λύση

Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τα ποσά που πληρώνουμε στις δύο περιπτώσεις, πρέπει να βρούμε πόσο πληρώνουμε για όλα τα υλικά όταν το φτιάχνουμε μόνοι μας.
Έτσι έχουμε: 0,20 + 0,23 + 0,18 = ...
Επομένως, πληρώνουμε περισσότερο όταν το αγοράζουμε έτοιμο, αφού 1,10 > ....

Εφαρμογή 2η

Αν τα σημεία Α και Β πάνω στην αριθμογραμμή αντιστοιχούν στους αριθμούς 2 και 6, σε ποιον αριθμό αντιστοιχεί το μέσο του τμήματος ΑΒ;

Λύση

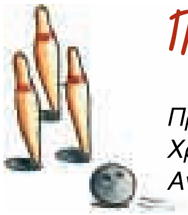
Η απόσταση μεταξύ των σημείων **Α** και **Β** είναι 4 μονάδες. Το μέσο τους απέχει 2 μονάδες από το καθένα. Το ζητούμενο σημείο απέχει από το **Α** δύο (2) μονάδες, προσθέτουμε και τις 2 μονάδες που απέχει το σημείο **Α** από το μηδέν και βρίσκουμε: 2 + 2 = 4.
Άρα το μέσο του τμήματος ΑΒ αντιστοιχεί στον αριθμό .... της αριθμογραμμής.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **σύγκριση, μεγαλύτερος, μικρότερος, διάταξη αριθμών και αριθμογραμμή**. Εξήγησε με παραδείγματα τους όρους αυτούς.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Ο αριθμός 2.006 παρεμβάλλεται ανάμεσα στους αριθμούς 2.005 και 2.007	❒	❒
5,014 < 5,041	❒	❒
11.100 > 11.001 > 10.101 > 10.110	❒	❒

Προσθέσεις και αφαιρέσεις

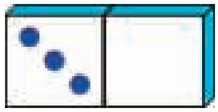


Προσθέτω και αφαιρώ φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.
Χρησιμοποιώ τις ιδιότητες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.
Αναγνωρίζω ότι η αφαίρεση είναι αντίθετη πράξη της πρόσθεσης.

Δραστηριότητα 1η

Σε ένα παιχνίδι ντόμινο βρίσκεται στα χέρια σου η διπλανή κάρτα.

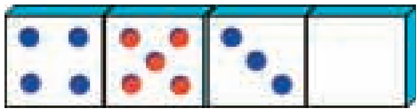
- Ποιο είναι το άθροισμα των σημείων της; ....
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να οδηγηθούμε στο άθροισμα;
- Τι παρατηρείς; ....



Τι παρατηρείς στη δεύτερη κάρτα για το άθροισμα με το 0;

....

....



Αν έχεις να προσθέσεις τις δύο αυτές κάρτες μαζί, να περιγράψεις τους τρόπους με τους οποίους μπορείς να το κάνεις:

....

....

....

Δραστηριότητα 2η

Μια πράξη ή μια ενέργεια που εξουδετερώνει μια άλλη λέγεται αντίστροφή της (π.χ. ανεβαίνω τη σκάλα – κατεβαίνω τη σκάλα).

- Βρείτε άλλες αντίστροφες πράξεις ή ενέργειες.

....

....

Αν από τον αριθμό 26 αφαιρέσουμε τον αριθμό 8 βρίσκουμε 18. Πώς από τον αριθμό 18 μπορούμε να ξαναβρούμε το 26;
Σημειώστε με ισότητες αυτές τις πράξεις.

....

....

....

- Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε για τις πράξεις πρόσθεση και αφαίρεση;

....

....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας οδηγούν στα εξής συμπεράσματα:

Παραδείγματα

Πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών

Αν αλλάξουμε τη σειρά των προσθετέων, δεν αλλάζει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης **(αντιμεταθετική ιδιότητα).**

προσθετέοι **άθροισμα**

49 + 16 = 65 3,2 + 11,5 = 14,7
16 + 49 = 65 11,5 + 3,2 = 14,7

Σε μια πρόσθεση πολλών αριθμών, προσθέτουμε πρώτα τους δύο και μετά στο άθροισμά τους τον τρίτο κ.ο.κ. Αν αλλάξουμε τα ζευγάρια των προσθετέων, το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δεν αλλάζει **(προσεταιριστική ιδιότητα).**

49 + 16 + 14 = (49 + 16) + 14 = 65 + 14 = 79

49 + 16 + 14 = 49 + (16 + 14) = 49 + 30 = 79

Η αφαίρεση είναι πράξη αντίστροφη της πρόσθεσης. Σε κάθε αφαίρεση, αν προσθέσουμε τη διαφορά και τον αφαιρετέο, βρίσκουμε τον μειωτέο.

μειωτέος – αφαιρετέος = διαφορά

693 - 541 = 152 92,5 - 48,2 = 44,3
152 + 541 = 693 44,3 + 48,2 = 92,5

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης μας βοηθούν να υπολογίζουμε πιο γρήγορα αθροίσματα με πολλούς αριθμούς. Η πρόσθεση και η αφαίρεση στους δεκαδικούς αριθμούς γίνονται όπως και στους φυσικούς. Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα ψηφία σύμφωνα με την αξία τους.

Εφαρμογή 1η

Η Φωτεινή μάζεψε 18,85 €. Πόσα χρήματα πρέπει να προσθέσει ακόμα στις οικονομίες της, ώστε να συγκεντρώσει 35,60 € και να αγοράσει μια συσκευή DVD για τον υπολογιστή της;

Λύση - Απάντηση

Τα χρήματα που χρειάζεται να συγκεντρώσει θα είναι τόσα ώστε αν προστεθούν στο αρχικό ποσό, το άθροισμα να είναι ίσο με 35,60 €.
Δηλαδή 18,85 + άγνωστο ποσό = 35,60 €.
Ξέροντας ότι η αφαίρεση είναι πράξη αντίστροφη της πρόσθεσης, λύνω το πρόβλημα κάνοντας την πράξη: **35,60 - 18,85 = ... €**

Εφαρμογή 2η

Υπολογίστε με το νου το άθροισμα 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1= ....

Λύση

Παρατήρησε δύο διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους υπολογίζεται το άθροισμα:

Επιλέγω ένα ζευγάρι προσθετέων και βρίσκω το άθροισμά τους. Μετά επιλέγω έναν από τους υπόλοιπους προσθετέους για να τον κάνω ζευγάρι με το προηγούμενο άθροισμα και συνεχίζω έτσι μέχρι να τελειώσουν όλοι οι προσθετέοι. …

Αλλάζω τη σειρά των προσθετέων ώστε να γίνουν ζευγάρια που έχουν άθροισμα το 10. Μετά προσθέτω όσους δεν έχουν ζευγάρι. Π.χ. (9+1) + (8+2) + (7+3) + (6+4) + 5 = ...

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **αντιμεταθετική ιδιότητα, προσεταιριστική ιδιότητα** και **αντίστροφες πράξεις**. Εξήγησε με παραδείγματα τους όρους αυτούς.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Η ισότητα: 74 + 62 + 26 = 100 + 62 είναι σωστή.	❒	❒
Μπορούμε να κάνουμε αφαίρεση ως δοκιμή της πρόσθεσης.	❒	❒
Στην αφαίρεση ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.	❒	❒

Οι αριθμοί αναπαράγονται

Πολλαπλασιάζω φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.
Χρησιμοποιώ τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού.
Διαπιστώνω την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.
Πολλαπλασιάζω με το 10, το 100, το 1000 … και με το 0,1, το 0,01, το 0,001 …

Δραστηριότητα 1η

Ο Πυθαγόρας, ο μεγάλος Έλληνας φιλόσοφος και μαθηματικός, που γεννήθηκε στη Σάμο το 580 π.Χ., ίδρυσε την περίφημη Πυθαγόρειο Φιλοσοφική Σχολή. Με τις μελέτες του βοήθησε στην ανάπτυξη των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας.

Ο διπλανός πίνακας είναι επινόηση του Πυθαγόρα για να δείξει πώς υπολογίζονται τα γινόμενα του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών από το 0 ως το 10.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0									9	
2	0								16		20
3	0							21		27	
4	0						24		32		
5	0					25		35			
6	0				24		36				
7	0			21		35					
8	0		16		32						
9	0	9		27							
10	0		20								100

- Συμπλήρωσε τον πίνακα με τα υπόλοιπα γινόμενα.
- Τι παρατηρείς για τις γραμμές και τις στήλες του; Αναγνωρίζεις κάποιες σχέσεις;

....

....

....

....

Δραστηριότητα 2η

Ο χορηγός της εθνικής ομάδας ποδηλασίας παρέχει ένα κράνος και μια στολή σε κάθε μέλος της ομάδας. Το κράνος στοιχίζει 45,8 € και η στολή 52 €. Η ομάδα αποτελείται από 5 άτομα.

- Με πόσους τρόπους μπορεί ο χορηγός να υπολογίσει το κόστος της χορηγίας;

....

....

....

....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πολλαπλασιασμός φυσικών και δεκαδικών αριθμών	Παραδείγματα
Στον πολλαπλασιασμό, αν αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων, δεν αλλάζει το γινόμενο **(αντιμεταθετική ιδιότητα).**	παράγοντες γινόμενο 2 • 8 = 16 ή 8 • 2 = 16 2,5 • 8,4 = 21 ή 8,4 • 2,5 = 21
Για να πολλαπλασιάσουμε τρεις αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τους δύο μεταξύ τους και μετά το γινόμενό τους με τον τρίτο **(προσεταιριστική ιδιότητα).**	(2 • 3) • 5 = 6 • 5 = 30 ή 2 • (3 • 5) = 2 • 15 = 30 (2,5 • 3) • 4,2 = 7,5 • 4,2 = 31,5 ή 2,5 • (3 • 4,2) = 2,5 • 12,6 = 31,5
Για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με άθροισμα δύο ή περισσότερων προσθετέων, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό με κάθε προσθετέο και να προσθέσουμε τα επιμέρους γινόμενα **(επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού** ως προς την **πρόσθεση**)	το γινόμενο **20 • (12 + 0,5)** μπορεί να βρεθεί κι έτσι: **20 • 12 + 20 • 0,5** = 240 + 10 = 250
Η ιδιότητα αυτή ισχύει και ως προς την **αφαίρεση.**	20 • (12 - 2) = 20 • 12 - 20 • 2 = 240 - 40 = 200

Οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μας βοηθούν να υπολογίζουμε εύκολα γινόμενα με πολλούς αριθμούς. Ο πολλαπλασιασμός στους δεκαδικούς αριθμούς γίνεται όπως και στους φυσικούς. Στο γινόμενο τα δεκαδικά ψηφία είναι τόσα, όσα ήταν συνολικά τα δεκαδικά ψηφία σε όλους τους παράγοντες.

Εφαρμογή 1η

Πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με το 10, το 100, το 1.000 ...

Λύση:

Φυσικοί: Αρκεί να προσθέσω στο τέλος του αριθμού ένα 0 για να μεγαλώσει 10 φορές, δύο 0 για να μεγαλώσει 100 φορές, τρία 0 για να μεγαλώσει 1000 φορές κ.ο.κ.

8 • 10 = 80 8 • 100 = 800 8 • 1.000 = 8.000 8 • 10.000 = 80.000

Δεκαδικοί: Θυμάμαι ότι στους δεκαδικούς αριθμούς κάθε δεκαδικό ψηφίο είναι κατά δέκα φορές μεγαλύτερο από το ψηφίο που βρίσκεται στα δεξιά του. Άρα η μετακίνηση της υποδιαστολής μία θέση δεξιά μεγαλώνει τον αριθμό δέκα φορές: 8,255 • 10 = ...,.....

Εφαρμογή 2η

Πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με το 0,1 ή το 0,01 ή το 0,001 ...

Λύση:

Όταν πολλαπλασιάζω έναν αριθμό με το 1, ο αριθμός δε μεταβάλλεται. Το 0,1 είναι 10 φορές μικρότερο από το 1. Άρα όταν πολλαπλασιάσω τον αριθμό με το 0,1 τότε αυτός μικραίνει 10 φορές. Για να μικρύνω έναν αριθμό 10 φορές αρκεί να μετακινήσω την υποδιαστολή μια θέση προς τα αριστερά:

935 • 0,1 = 93,5 **935 • 0,01 = 9,35** **93,5 • 0,01 = 0,935**

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **αντιμεταθετική ιδιότητα, προσεταιριστική ιδιότητα** και **επιμεριστική ιδιότητα** στον πολλαπλασιασμό. Εξήγησέ τους με παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Η ισότητα 35 • 10 • 0 = 350 είναι σωστή.	❐	❐
Το 5 • 19 + 5 • 6 μπορεί να γίνει 5 • (19 + 6) = 5 • 25 = 125	❐	❐
Η ισότητα: 0,31 • 0,1 = 0,31 είναι σωστή.	❐	❐

Κεφάλαιο 7ο

Διαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Δίκαιη μοιρασιά!

Διαιρώ φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.
Μελετώ τη διαίρεση ενός αριθμού με το 1 ή με τον εαυτό του.
Διαπιστώνω ότι η τέλεια διαίρεση είναι αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.
Διαιρώ με το 10, το 100, το 1000 … και με το 0,1, το 0,01, το 0,001 …

Δραστηριότητα 1η

Στο Δημοτικό Σχολείο Μετσόβου έφτασαν δύο δέματα με το Β΄ τεύχος του βιβλίου Μαθηματικών, της Στ΄ τάξης. Το ένα δέμα έχει 40 βιβλία και το άλλο 80. Η δασκάλα φώναξε 4 παιδιά για να τα μεταφέρουν.

- Πώς θα βρουν από πόσα βιβλία θα κουβαλήσει κάθε παιδί;

  ………………………………………………………………………………………………

- Με πόσους τρόπους μπορείς να υπολογίσεις το αποτέλεσμα;

  ………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………

- Αν τα κουβαλούσαν 10 παιδιά;

  ………………………………………………………………………………………………

- Αν διπλασιαστεί ο αριθμός των βιβλίων (120 • 2) και διπλασιαστεί και ο αριθμός των παιδιών (4 • 2) από πόσα βιβλία θα κουβαλήσει κάθε παιδί;

  ……………………………………………………………………… Τι παρατηρείς; ………………………

Δραστηριότητα 2η

Στους παρακάτω πολλαπλασιασμούς συμπλήρωσε τους παράγοντες που λείπουν:

4 • .... = 36	**....... • 8 = 48**	**3 • .... = 63**	**10 • .... = 120**	**....... • 1000 = 4000**

- Με ποια διαδικασία τούς βρήκες; ………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………………

- Ποια σχέση διακρίνεις ανάμεσα στη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό;
- Ποιες διαιρέσεις προκύπτουν από την ισότητα 6 • 8 = 48;

  α) ………………………………………………………………………

  β) ………………………………………………………………………

- Μπορείς με βάση τα προηγούμενα να εξηγήσεις το αποτέλεσμα της διαίρεσης 0 **:** 4 = 0;

  ………………………………………………………………………………………………

- Μπορούμε να διαιρέσουμε έναν αριθμό με το μηδέν;

  ………………………………………………………………………………………………

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε τα ακόλουθα:

Διαίρεση φυσικών και δεκαδικών αριθμών	Παραδείγματα
Τέλεια λέγεται η διαίρεση στην οποία το υπόλοιπο είναι 0. Όταν το υπόλοιπο είναι διαφορετικό από το 0, η διαίρεση λέγεται ατελής.	Διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο, υπόλοιπο 12 | 4 — 0 | 3 τέλεια 13 | 4 — 1 | 3 ατελής
Η τέλεια διαίρεση είναι πράξη **αντίστροφη** του πολλαπλασιασμού. Σε κάθε διαίρεση ο διαιρετέος είναι ίσος με το γινόμενο του διαιρέτη επί το πηλίκο συν το υπόλοιπο.	$4 \cdot 3 = 12$ $12 : 4 = 3 \leftrightarrow 12 : 3 = 4$ $13 = 3 \cdot 4 + 1$
Κάθε αριθμός, αν διαιρεθεί με το 1, δίνει πηλίκο τον εαυτό του. Κάθε αριθμός, αν διαιρεθεί με τον εαυτό του, δίνει πηλίκο το 1.	$12 : 1 = 12$ $3{,}5 : 1 = 3{,}5$ $12 : 12 = 1$ $3{,}5 : 3{,}5 = 1$
Το 0, με όποιον αριθμό και αν διαιρεθεί, δίνει πηλίκο 0.	$0 : 12 = 0$ $0 : 3{,}5 = 0$
Σε κάθε διαίρεση, αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τους δύο όρους με τον ίδιο αριθμό, το πηλίκο δεν αλλάζει.	$12 : 3 = 4$ $(12 \cdot 2) : (3 \cdot 2) = 24 : 6 = 4$

Εφαρμογή 1η

Διαιρούμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με **10,** το **100,** το **1000** ...,

Λύση

Όταν διαιρώ έναν αριθμό με το 10, το 100, το 1000, ..., τότε ο αριθμός μικραίνει κατά 10 ή 100 ή 1000 ... φορές αντίστοιχα. Αρκεί λοιπόν **να μετακινήσω την υποδιαστολή 1 ή 2 ή 3 ... θέσεις προς τα αριστερά:**

8 : 10 = **0,8**   **8 :** 100 = **0,08**   **8 :** 1.000 = **0,008**   0,8 **:** 10 = **......,......**

Εφαρμογή 2η

Διαιρούμε έναν αριθμό (φυσικό ή δεκαδικό) με το **0,1** ή το **0,01** ή το **0,001** ...,

Λύση

Γνωρίζω ότι το πηλίκο δεν αλλάζει, αν πολλαπλασιάσω το διαιρετέο και τον διαιρέτη με τον ίδιο αριθμό. Για να γίνει εύκολα η διαίρεση μπορώ να μετατρέψω το διαιρέτη στον αριθμό 1 πολλαπλασιάζοντας τον με το 10, το 100, το 1000, ...,

93,5 : 0,1 = (93,5 • 10) **:** (0,1 • 10) = 935 **:** 1 = **935**

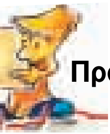
458 : 0,01 = (458 • 100) **:** (0,01 • 100) = 45800 **:** 1 = **45.800**

Παρατηρώ ότι για να διαιρέσω έναν αριθμό με το 0,1 ή το 0,01 ή το 0,001 ... αρκεί **να μετακινήσω την υποδιαστολή 1 ή 2 ή 3 ... θέσεις προς τα δεξιά**, σαν να τον πολλαπλασιάζω με το 10, το 100, το 1000, ..., αντίστοιχα.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

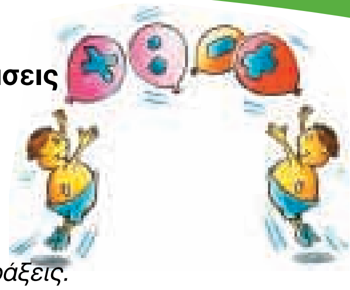
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **τέλεια** και **ατελής** διαίρεση, διαίρεση αριθμού με το 1 ή με τον εαυτό του. Εξήγησε τους όρους αυτούς με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
*Η ισότητα: 10 **:** 2 = 2 **:** 10 είναι σωστή.*	❐	❐
*Από τη διαίρεση Δ **:** δ = π μπορώ να πω ότι ισχύει Δ = δ • π.*	❐	❐
Η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός είναι πράξεις αντίστροφες.	❐	❐



Κεφάλαιο 8ο

Πράξεις με μεικτές αριθμητικές παραστάσεις



Μαθαίνω τη γλώσσα των αριθμών

Διαπιστώνω την ανάγκη της προτεραιότητας σε μια σειρά από πράξεις.
Μαθαίνω τη σειρά των πράξεων για την επίλυση μιας αριθμητικής παράστασης.
Υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις.
Σχηματίζω αριθμητικές παραστάσεις για τη λύση προβλημάτων.

Δραστηριότητα 1η *Πού πήγαν τα 90 λεπτά μου;*

Ο Τοτός πήγε στο βιβλιοπωλείο της γειτονιάς για να αγοράσει κάποια πράγματα έχοντας 10 €. Αγόρασε 10 τετράδια προς 0,45 € το ένα, 2 ντοσιέ προς 0,80 € το ένα και 1 μπλοκ ακουαρέλας προς 1,90 €. Έδωσε το χαρτονόμισμα των 10 € και πήρε 2 € ρέστα.

- Κάνοντας με το νου τις πράξεις υπολογίστε με την ομάδα σας τα χρήματα που ξόδεψε και γράψτε το αποτέλεσμα.

τετράδια 10 • 0,45	+	**ντοσιέ** 2 • 0,80	+	**μπλοκ** 1,90	=	**Σύνολο**

Ο Τοτός, για να είναι σίγουρος, προτίμησε να κάνει τις πράξεις με τη σειρά στον υπολογιστή τσέπης που είχε:

- Ακολούθησε και συ την ίδια λογική και κάνε τις πράξεις με το μολύβι και την ίδια σειρά:
  10 • 0,45 + 2 • 0,80 + 1,90 = ...
- Με ποια σειρά έγιναν οι πράξεις με το νου;
  ....
- Με ποια σειρά έκανες τις πράξεις με το μολύβι στη δεύτερη περίπτωση;
  ....
- Ποιο αποτέλεσμα είναι σωστό;
  ....
- Μπορείτε με την ομάδα σας να προτείνετε έναν κανόνα για τη σειρά των πράξεων;
  ....

Δραστηριότητα 2η *Η σωστή σειρά*

Ο ζαχαροπλάστης Ανρί, αυτή την εβδομάδα, πούλησε 85 μερίδες μους σοκολάτας προς 3,80 € τη μία. Είχε προετοιμάσει όμως 100 μερίδες που του κόστισαν 2,40 € η μερίδα.

- Βοήθησε τον Ανρί να υπολογίσει το κέρδος του για αυτή την εβδομάδα στον πίνακα που ακολουθεί:

Έσοδα 85 • 3,8	–	**Έξοδα** 100 • 2,4	=	**Κέρδος**

- Με ποια σειρά έκανες τις πράξεις; Πρώτα .... μετά ....
  και τέλος ....
- Μπορούσες να κάνεις τις πράξεις με διαφορετική σειρά; .... γιατί; ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε τα εξής:

	Παραδείγματα
Αριθμητικές παραστάσεις Μια σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων λέγεται **αριθμητική παράσταση**.	45 + 6 + 3,2 + 0,9 + 65 8 • 2,5 + 40
Ο τρόπος λύσης ενός προβλήματος μπορεί να εκφραστεί με την κατάλληλη αριθμητική παράσταση.	Αγόρασα 2 παγωτά των 0,90 € το καθένα και 3 μπουκαλάκια νερό των 0,45 € το καθένα. Πόσο πλήρωσα; *Λύση*: 2 • 0,90 + 3 • 0,45 = 1,80 + 1,35 = 3,15
Στις αριθμητικές παραστάσεις, οι πράξεις γίνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά με μια ορισμένη σειρά: α) **πρώτα πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις** και β) **μετά προσθέσεις και αφαιρέσεις**	15 **:** 3 • 5 + 3,5 = 5 • 5 + 3,5 = 25 + 3,5 = 28,5 (αφού η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός έχουν την ίδια προτεραιότητα, εκτελούμε τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά και μετά την πρόσθεση)
Αν υπάρχουν **παρενθέσεις**, κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την ίδια σειρά.	(117,6 + 98,4) **:** (40 - 22) = 216 **:** 18 = 12

Εφαρμογή 1η

Ο Ανρί για το μους σοκολάτας αγόρασε τα εξής υλικά: 2,5 κιλά σοκολάτα προς 16,8 € το κιλό, 1,25 κιλά βούτυρο προς 10,2 € το κιλό, 40 αβγά προς 0,65 € το ένα, 1,5 κιλά κρέμα γάλακτος προς 7,5 € το κιλό και 1,25 κιλά ζάχαρη προς 3,2 € το κιλό. Υπολόγισε πόσο του κοστίζει κάθε μερίδα, αφού με τα υλικά που αγόρασε έφτιαξε 40 μερίδες.

Λύση

Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε πόσο πλήρωσε για την αγορά κάθε υλικού, μετά να προσθέσουμε τα επιμέρους ποσά και να διαιρέσουμε το συνολικό άθροισμα με το 40 για να βρούμε πόσο κοστίζει η 1 μερίδα.

Για να γίνουν οι προσθέσεις πριν από τη διαίρεση, πρέπει να μπουν σε παρένθεση. Μέσα στην παρένθεση η προτεραιότητα των πράξεων αρκεί για να τηρηθεί η σωστή σειρά:

(2,5 • 16,8 + 1,25 • 10,2 + 40 • 0,65 + 1,5 • 7,5 + 1,25 • 3,2) **:** 40 = (42 + 12,75 + 26 + 11,25 + 4) **:** 40 = 96 **:** 40 = 2,4

Απάντηση: Κάθε μερίδα στοιχίζει 2,4 €

Εφαρμογή 2η

Να λύσετε την αριθμητική παράσταση: 25 + 32 **:** 8 – 5 • 4

Λύση

Γνωρίζουμε ότι αρχίζουμε από αριστερά, πρώτα κάνοντας τις διαιρέσεις και τους πολλαπλασιασμούς και μετά τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις:

25 + 32 **:** 8 – 5 • 4 = 25 + 4 - 20 = 29 - 20 = 9

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

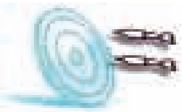
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αριθμητική παράσταση**. Εξήγησέ τον με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
➻ *Μια σειρά αριθμών λέγεται αριθμητική παράσταση.*	❒	❒
➻ *Στις αριθμητικές παραστάσεις οι προσθέσεις μπαίνουν σε παρένθεση.*	❒	❒
➻ *Δεν μπορώ να κάνω αριθμητική παράσταση χωρίς παρενθέσεις.*	❒	❒

Κεφάλαιο 9ο

Λύνω σύνθετα προβλήματα των 4 πράξεων

Μιλώ τη γλώσσα των αριθμών



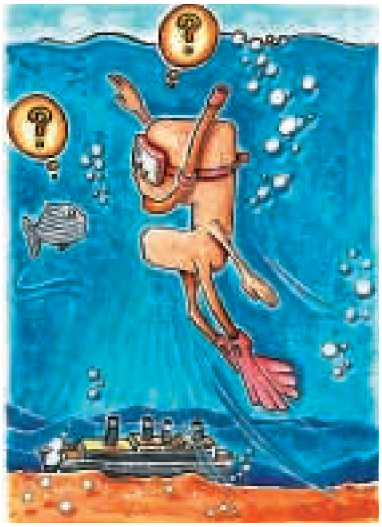
Λύνω ένα πρόβλημα ακολουθώντας μια σειρά από βήματα.
Λύνω σύνθετα προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες και τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων.

Τώρα που «φρεσκάραμε» τις γνώσεις μας για τους φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς και για τις ιδιότητες των πράξεων, και αφού εξασκηθήκαμε με ασκήσεις και προβλήματα για κάθε τομέα ξεχωριστά, ας εξασκηθούμε περισσότερο εφαρμόζοντας τις γνώσεις μας σε γενικότερα προβλήματα, όπως είναι αυτά που έτσι κι αλλιώς συναντάμε κάθε μέρα.

Δραστηριότητα

Το υπερωκεάνιο "Τιτανικός" βυθίστηκε το 1912. Οι επιβάτες του ήταν 1316 άτομα και το πλήρωμά του 885. Είχε 20 σωσίβιες λέμβους, η καθεμία από τις οποίες χωρούσε 58 άτομα. Στο ναυάγιο χάθηκαν 1490 άτομα. Αν γέμιζαν όλες οι σωσίβιες λέμβοι, πόσο περισσότεροι διασωθέντες θα υπήρχαν;

Αφού διαβάσεις με προσοχή το πρόβλημα, απάντησε στις ερωτήσεις:



- Ποια είναι τα γνωστά στοιχεία που θα σε βοηθήσουν στη λύση;

  (τι ξέρεις;) ....

  ....

  ....

- Ποια είναι τα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος;

  (τι δεν ξέρεις;)..

- Πώς σχετίζονται τα γνωστά με τα άγνωστα στοιχεία;

  ....

- Οργάνωσε το σχέδιο λύσης και διάλεξε ποιες πράξεις θα χρησιμοποιήσεις **(+) (-) (:) (.)**

  Αρχικά θα κάνω................................ ώστε να ....

  ....

  Στη συνέχεια θα ....

  Τέλος..

- Κάνε τις πράξεις. (Μπορείς με το νου ή με χαρτί και μολύβι.)

  ....

  ....

  ....

- Απάντησε στο πρόβλημα.

  ....

- Έλεγξε αν είναι η απάντηση λογική σύμφωνα με τα δεδομένα.

  ....

Η προηγούμενη δραστηριότητα μας βοηθά να συμπεράνουμε τα εξής:

Λύνω προβλήματα

Όταν έχω να λύσω ένα πρόβλημα ακολουθώ με τη σειρά τα παρακάτω βήματα:
Αν δεν είναι γραμμένο, το γράφω γιατί έτσι θα μπορέσω να το μελετήσω καλύτερα:

- ✓ **Διαβάζω** (όσες φορές είναι απαραίτητο) μέχρι να μπορώ να πω με βεβαιότητα ότι **κατάλαβα:**
  α. Ποια είναι τα γνωστά στοιχεία (δεδομένα).
  β. Ποια είναι τα άγνωστα (ζητούμενα).
- ✓ **Καταστρώνω** ένα σχέδιο λύσης και αποφασίζω ποιες πράξεις θα κάνω για να λύσω το πρόβλημα.
- ✓ **Εκτελώ** τις πράξεις με προσοχή.
- ✓ **Απαντώ** στην ερώτηση του προβλήματος.

Τέλος **ελέγχω** αν το αποτέλεσμα είναι λογικό. Αν δεν είναι, αρχίζω τα βήματα από την αρχή.

Εφαρμογή

Πόσα ρέστα θα πάρω από 25 €, αν πληρώσω 3 εισιτήρια στον κινηματογράφο, το καθένα από τα οποία κοστίζει 7,20 €;

Λύση

Βήμα 1: Αφού διαβάσω καλά το πρόβλημα, χωρίζω τα γνωστά από τα άγνωστα στοιχεία

Ξέρω (γνωστά - γ):	Δεν ξέρω (άγνωστα - α):
Πόσα εισιτήρια θα αγοράσω (γ1), πόσο κοστίζει το ένα εισιτήριο (γ2) και πόσα χρήματα έδωσα (γ3).	Πόσο κοστίζουν συνολικά τα εισιτήρια (α1) και πόσα ρέστα θα πάρω (α2).

Βήμα 2: Οργανώνω σχέδιο λύσης
Για να βρω πόσα ρέστα θα πάρω (α2) πρέπει να αφαιρέσω το συνολικό κόστος των εισιτηρίων (α1) από τα χρήματα που έδωσα (γ3). Άρα πρέπει
1. Πρώτα να βρω πόσο κάνουν τα εισιτήρια (α1) και μετά
2. Να αφαιρέσω αυτό που θα βρω (α1) από τα χρήματα που έδωσα (γ3).

Βήμα 3: Κάνω τις πράξεις
1. Για να βρω πόσο κάνουν τα εισιτήρια θα πολλαπλασιάσω το 7,20 με το 3: **7,20 · 3 = ... €**
2. Για να βρω πόσα ρέστα θα πάρω, θα αφαιρέσω αυτό που βρήκα από το 25: **25 - ..... = ... €**
   ή **25 - 7,20 · 3 = ... = ... = ... €**

Σημείωση: Μπορώ να κάνω τις πράξεις με το νου, με μολύβι και χαρτί ή με τον υπολογιστή τσέπης.

Απάντηση: Θα πάρω .... € ρέστα.

Βήμα 4: Ελέγχω την απάντηση σε σχέση με την ερώτηση.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την **τεχνική επίλυσης προβλημάτων.** Θυμήσου και ανάφερε τα 4 βήματα της τεχνικής.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Αν λύσεις το πρόβλημα δεν είναι απαραίτητο και να γράψεις την απάντηση αφού θα την ανακαλύψουν ανάμεσα στις πράξεις.	❒	❒
Το αποτέλεσμα δεν φαίνεται λογικό. Δεν πειράζει, αφού σίγουρα έχω κάνει τις πράξεις σωστά.	❒	❒
Η σχέση ανάμεσα στα γνωστά και στα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος με βοηθά να αποφασίσω ποιες πράξεις θα κάνω.	❒	❒

Κεφάλαιο 10ο Η χρήση του υπολογιστή τσέπης

Ένα μηχάνημα που μιλάει μαθηματικά μαζί μου

Μαθαίνω τη χρήση του υπολογιστή τσέπης.
Διακρίνω σε ποιες περιπτώσεις πρέπει να χρησιμοποιήσω τον υπολογιστή τσέπης.
Λύνω προβλήματα με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης.

Δραστηριότητα 1η

Ο υπολογιστής τσέπης είναι ένα εργαλείο που μας βοηθά να υπολογίζουμε τις μεγάλες και χρονοβόρες πράξεις εύκολα και γρήγορα. Ας πάρουμε στα χέρια μας έναν υπολογιστή τσέπης κι ας ανακαλύψουμε πώς λειτουργεί και πώς χρησιμοποιείται.

- Μπορείς να τον «ανοίξεις»;
- Πώς βλέπεις ότι έχει «ανοίξει»;
- Βεβαιώσου ότι εντόπισες τα παρακάτω πλήκτρα και ότι ξέρεις τι κάνουν:

+ .... − ....
X .... ÷ ....
= .... • ....
C ....

- Παρατήρησε τι εμφανίζεται στην οθόνη, καθώς πατάς κάθε πλήκτρο και συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:

η οθόνη εμφανίζει:	**3**	**38**	**38**				
καθώς πληκτρολογώ:	**3**	**8**	**+**	**7**	**9**	**9**	**=**

- Κάνε μερικούς υπολογισμούς, παρατηρώντας κάθε φορά την οθόνη:

952,90 – 860 = **16,05 • 437 =** **0,80 + 0,32 + 6,58 =** **2048 : 50 =**

Δραστηριότητα 2η

Ο υπολογιστής τσέπης δεν αντικαθιστά τις υπόλοιπες μεθόδους υπολογισμού! Επιλέγω πότε πρέπει να εργαστώ με το **νου,** με **χαρτί** και **μολύβι** ή με **υπολογιστή τσέπης.** Επέλεξε με ποια από τις τρεις μεθόδους μπορείς να απαντήσεις πιο γρήγορα σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις. Μέτρησε και σημείωσε για κάθε περίπτωση πόσα πλήκτρα πρέπει να πατήσεις στον υπολογιστή τσέπης.

- 110 + 24 = ...
- 1100 **:** 10 = ...
- Είναι τέλεια η διαίρεση 99578 **:** 2; **ΝΑΙ – ΟΧΙ** ....
- (2 • 48 + 112 **:** 2 – 4 • 0,5) **:** 2 = ...
- 32 • 22459,90 = ...
- Είναι πάντα η χρήση του υπολογιστή τσέπης η πιο σύντομη μέθοδος; ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας οδηγούν στα ακόλουθα συμπεράσματα:

Ο υπολογιστής τσέπης

✓ **(Πότε;)** Χρησιμοποιούμε τον υπολογιστή τσέπης για να πραγματοποιήσουμε γρήγορα μεγάλους υπολογισμούς, ή για να κάνουμε γρήγορη επαλήθευση των αποτελεσμάτων μας.

✓ **(Τι είδους;)** Διαλέγουμε έναν υπολογιστή απλό κι εύχρηστο και όχι κάποιον με χαρακτηριστικά που δεν μας χρειάζονται όπως, για παράδειγμα, να κάνει επιστημονικούς υπολογισμούς και γραφήματα ή να έχει μουσική και ρολόι.

✓ **(Όρια;)** Σε έναν υπολογιστή τσέπης η οθόνη «χωράει» συνήθως 8 ή 9 ψηφία. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να επεξεργαστεί αριθμούς με περισσότερα ψηφία από αυτά.

✓ **(Έλεγχος;)** Το αποτέλεσμα της πράξης που κάναμε στον υπολογιστή τσέπης χρειάζεται να το εξετάζουμε με τη λογική. Αρκετές φορές καταλήγουμε σε λανθασμένους υπολογισμούς, γιατί είτε κάναμε λάθος στην πληκτρολόγηση κάποιου συμβόλου ή της υποδιαστολής είτε δεν λάβαμε υπόψη τη σειρά των πράξεων.

Εφαρμογή 1η

Θυμάστε την αποτυχημένη προσπάθεια του Τοτού να βρει το σωστό αποτέλεσμα υπολογίζοντας την αριθμητική παράσταση $10 \cdot 0{,}45 + 2 \cdot 0{,}80 + 1{,}90$ στον υπολογιστή τσέπης; Μπορεί να βρεθεί το αποτέλεσμα χωρίς να χρειαστεί να σημειώνουμε τα επιμέρους αποτελέσματα σε χαρτί;

Λύση:

Για να τηρηθεί η σωστή σειρά κατά την εκτέλεση των πράξεων:

α. Κάνουμε τον 1ο πολλαπλασιασμό και σημειώνουμε το αποτέλεσμά του κάπου.

β. Κάνουμε το 2ο πολλαπλασιασμό και σημειώνουμε το αποτέλεσμά του.

γ. Προσθέτουμε τα δύο αποτελέσματα.

δ. Προσθέτουμε το 1,90 στο προηγούμενο άθροισμα.

Ο υπολογιστής τσέπης έχει έναν χώρο μνήμης στον οποίο μπορούμε να αποθηκεύουμε αριθμούς που θα προστεθούν μεταξύ τους. Το πλήκτρο M+ αθροίζει διαδοχικά μέσα στη μνήμη τους αριθμούς που βάζουμε. Το πλήκτρο MR εμφανίζει τον αριθμό που υπάρχει αυτή τη στιγμή στη μνήμη και το πλήκτρο MC «αδειάζει» τη μνήμη. Αυτή η αριθμητική παράσταση, λοιπόν μπορεί να γίνει στον υπολογιστή τσέπης ως εξής: 10 X 0 . 45 = M+ 2 X 0 . 80 = M+ 1 . 90 M+ MR

Εφαρμογή 2η

Η καρδιά ενός ανθρώπου κάνει κατά μέσο όρο 70 χτύπους το λεπτό. Πόσους χτύπους έχει κάνει η καρδιά σου μέχρι τώρα, δηλαδή κατά τη διάρκεια των 12 χρόνων που λειτουργεί;

Λύση:

Βρίσκουμε πρώτα πόσους παλμούς κάνει την ώρα, μετά πόσους την ημέρα, έπειτα πόσους το χρόνο και τέλος πόσους τα 12 χρόνια: 70 X 60 X 24 X 360 X 12 = 435.456.000

Απάντηση: Έχει κάνει 435.456.000 παλμούς ως τώρα!

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη χρήση του **υπολογιστή τσέπης**. Θυμήσου τα βήματα στην επίλυση ενός προβλήματος και πες σε ποιο βήμα μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Το πλήκτρο C «καθαρίζει» την οθόνη.	❒	❒
Με τον υπολογιστή τσέπης δεν χρειάζεται να κάνουμε έλεγχο του αποτελέσματος με τη λογική, γιατί δεν κάνει ποτέ λάθη.	❒	❒
Οι μεγάλες πράξεις είναι αδύνατον να γίνουν χωρίς υπολογιστή τσέπης.	❒	❒

Κεφάλαιο 11ο
Στρογγυλοποίηση φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Πρόχειροι λογαριασμοί

Κατανοώ τους κανόνες της στρογγυλοποίησης.
Στρογγυλοποιώ φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς.
Εκτιμώ το αποτέλεσμα μιας πράξης κατά προσέγγιση.

Σε μερικές περιπτώσεις δεν μας είναι απαραίτητο να εκφραζόμαστε με απόλυτη ακρίβεια. Τότε στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς, ώστε να είναι εύκολο να τους θυμόμαστε.

Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται οι τρεις πολυπληθέστερες χώρες του κόσμου και ο συνολικός πληθυσμός της γης το έτος 2003.

Κίνα	**1.286.975.468**	
Ινδία	**1.049.700.118**	
Η.Π.Α.	**290.342.554**	

Σύνολο Γης	**6.302.309.691**	
Πηγή: "The World Factbook 2003", CIA		

- Είναι εύκολο διαβάζοντας τον πίνακα να θυμηθείς τα στοιχεία;
- Προσπάθησε, στην κενή στήλη να γράψεις για κάθε χώρα έναν αριθμό που να δείχνει περίπου τον πληθυσμό της και να είναι πιο εύκολο να τον θυμηθείς.
- Πόση είναι περίπου η διαφορά των πληθυσμών της Κίνας και της Ινδίας; ....
- Φαίνεται η διαφορά αυτή και μετά τη στρογγυλοποίηση που έκανες;

Δραστηριότητα 2η

Στο γραφείο «Αγωγής Υγείας» τα παιδιά παρατήρησαν το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνονται σημειωμένες οι θερμίδες που καίει κάποιος όταν κάνει ορισμένες δραστηριότητες για 1 ώρα (π.χ. κολύμπι, τρέξιμο, ποδηλασία, χορός, μπάσκετ, ποδόσφαιρο).

Χρησιμοποιώντας το σχήμα στρογγυλοποιήστε τις μετρήσεις στη δεκάδα:

- 223: ....
- 247: ....
- 256: ....
- 283: ....
- 298: ....
- 305: ....
- Πώς αποφασίσατε σε ποια δεκάδα θα στρογγυλοποιήσετε κάθε μέτρηση; ....
  ....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

Στρογγυλοποίηση φυσικών και δεκαδικών αριθμών

Συχνά στη θέση κάποιου αριθμού χρησιμοποιούμε κάποιον άλλο, μικρότερο ή μεγαλύτερο, πολύ κοντινό στον αρχικό, για πρακτικούς λόγους. Αυτή η διαδικασία λέγεται **στρογγυλοποίηση**.

Ανάλογα με την περίπτωση στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς στα δέκατα, στα εκατοστά, στις δεκάδες, στις εκατοντάδες ή όπου είναι πιο κατάλληλο για να διευκολυνθούμε στους λογαριασμούς μας, χωρίς να παραποιηθεί η πραγματικότητα.

Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν αριθμό εξετάζουμε τα εξής:
Αν το **ψηφίο** που βρίσκεται στα **δεξιά** από εκείνο στο οποίο θέλουμε να γίνει η στρογγυλοποίηση είναι **0**, **1**, **2**, **3** ή **4**, τότε απλώς το αντικαθιστούμε, όπως και όλα τα επόμενα προς τα δεξιά, με μηδενικά.
Αν το **ψηφίο** που βρίσκεται στα **δεξιά** είναι **5**, **6**, **7**, **8** ή **9**, τότε αυξάνουμε το ψηφίο στο οποίο θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε κατά μία μονάδα και μετά αντικαθιστούμε τα ψηφία στα δεξιά του με μηδενικά.

Παραδείγματα

- Ο υπολογιστής τσέπης κοστίζει 4,95 €. Αντί για το ακριβές ποσό, λέμε: «κοστίζει περίπου 5 €».
- Το βάρος μου είναι 68 κιλά. Περίπου 70 (σωστό). Περίπου 100 (λάθος).
- Σ' έναν αγώνα υπήρχαν 4.815 θεατές. Στρογγυλοποιώ στις εκατοντάδες: υπήρχαν περίπου 4.800 θεατές.
- Σε άλλον αγώνα υπήρχαν 4.875 θεατές. Στρογγυλοποιώ: υπήρχαν περίπου 4.900 θεατές.

Δεν στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται ως κώδικας επικοινωνίας (π.χ. ο αριθμός της ταυτότητας ή της πινακίδας του αυτοκινήτου, ο Τ.Κ. του σπιτιού κ.λπ.).

Εφαρμογή 1η

Μια συνηθισμένη κυψέλη έχει 12.475 μέλισσες. Πόσες μέλισσες έχει περίπου ένας μελισσοκόμος με 6 κυψέλες;

Λύση

Για να κάνουμε έναν γρήγορο, κατά προσέγγιση, υπολογισμό θα στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 12.475 στην πλησιέστερη εκατοντάδα, θα γίνει δηλαδή 12.500.
Άρα 12.500 • 6 = 75.000

Απάντηση: Έχει περίπου 75.000 μέλισσες.

Εφαρμογή 2η

Ένα κουτί με CD εγγραφής κοστίζει 1,29 €. Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε κατά προσέγγιση για 5 κουτιά;

Λύση

Για ένα γρήγορο, κατά προσέγγιση, υπολογισμό θα στρογγυλοποιήσουμε το 1,29 στο πλησιέστερο δέκατο, θα γίνει δηλαδή 1,30.
Άρα 1,30 • 5 = 6,50.

Απάντηση: Θα πληρώσουμε περίπου 6,5 €.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

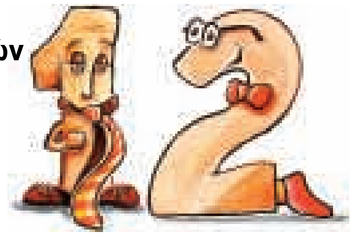
Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη **στρογγυλοποίηση των αριθμών**. Εξήγησε με ένα παράδειγμα τη διαδικασία της στρογγυλοποίησης.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς των τηλεφώνων.	❐	❐
Στρογγυλοποιούμε πάντα όταν κάνουμε υπολογισμούς.	❐	❐
Ο αριθμός 25.109 στρογγυλοποιημένος στις εκατοντάδες γίνεται 25.100.	❐	❐

Κεφάλαιο 12ο

Διαιρέτες ενός αριθμού – Μ.Κ.Δ. αριθμών



Μπαίνεις μόνο αν χωράς ακριβώς

Μαθαίνω τι είναι ο διαιρέτης ενός φυσικού αριθμού.
Βρίσκω τους διαιρέτες ενός αριθμού.
Εντοπίζω τους κοινούς διαιρέτες δύο ή περισσότερων αριθμών και βρίσκω τον μεγαλύτερο.

Δραστηριότητα 1η

Σε ένα κουτί με μπισκότα αναγράφεται:
«35 μπισκότα, σε χωριστές αεροστεγείς συσκευασίες»

- Πόσες ίδιες χωριστές συσκευασίες νομίζεις ότι έχει το κουτί;

  ....

- Πόσα μπισκότα έχει κάθε χωριστή συσκευασία;

  ....

- Υπάρχουν άλλες περιπτώσεις; ....

  ....

Δραστηριότητα 2η

Στο ζαχαροπλαστείο του Ανρί ετοιμάζουν συσκευασίες με διάφορα γλυκά. Μια μέρα έχουν 40 τρουφάκια, 48 εκλέρ και 32 καριόκες. Μοιράζουν τα γλυκά με τέτοιο τρόπο, ώστε όλα τα κουτιά να είναι ίδια μεταξύ τους, να είναι όσο το δυνατό περισσότερα και να μην περισσεύει κανένα γλυκό. Πώς τα μοίρασαν;

- Αν είχαν να μοιράσουν μόνο τα 40 τρουφάκια, σε πόσα **ίδια** κουτιά θα μπορούσαν να τα μοιράσουν; ....
- Συμπληρώστε: *σε 2 (από 20 γλυκά), ή σε 4* ....
- Υπολογίστε το ίδιο για τα 48 εκλέρ; *σε* ....

  ....

- Βρείτε το ίδιο για τις 32 καριόκες; *σε* ....

  ....

- Υπογραμμίστε τους αριθμούς των κουτιών που είναι κοινοί (ίδιοι) και στις 3 σειρές.
- Αν χρησιμοποιήσουν μόνο 2 ίδια κουτιά στα οποία θα βάλουν όλα τα γλυκά, γράψτε πόσα γλυκά από κάθε είδος θα περιέχει το καθένα:

  ....

- Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ίδιων κουτιών που μπορούν να γεμίσουν με γλυκά από κάθε είδος;

  ....

- Πόσα γλυκά από κάθε είδος θα έχει κάθε κουτί σ' αυτή την περίπτωση;

  Θα περιέχει:..

Πολλές φορές χρειάζεται να εξετάσουμε με πόσους δυνατούς τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε έναν αριθμό χωρίς να έχουμε υπόλοιπο. Αυτό γίνεται βρίσκοντας τους διαιρέτες του αριθμού αυτού.

Διαιρέτες αριθμού, Μ.Κ.Δ. αριθμών	Παραδείγματα
Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρεί ακριβώς έναν άλλο φυσικό αριθμό λέγεται **διαιρέτης** του.	Ο αριθμός 9 έχει διαιρέτες τους αριθμούς: 1, 3, 9.
Δύο ή περισσότεροι φυσικοί αριθμοί μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους λέγεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.).**	Ο αριθμός 16 έχει διαιρέτες τους αριθμούς: 1, 2, 4, 8, 16. Ο αριθμός 24 έχει διαιρέτες τους: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Οι αριθμοί 1, 2, 4, 8 είναι κοινοί διαιρέτες του 16 και του 24. Ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης τους είναι το 8.

Εφαρμογή 1η

Έχω μια συλλογή με 20 φωτογραφίες και θέλω να τις βάλω στο άλμπουμ με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε σελίδα να έχει τον ίδιο αριθμό φωτογραφιών. Με πόσους τρόπους μπορώ να τις χωρίσω (εκτός από το να βάλω μία φωτογραφία σε κάθε σελίδα) ξέροντας ότι η σελίδα χωράει μέχρι 10 φωτογραφίες;

Λύση

Οι φωτογραφίες πρέπει να μοιραστούν σε ίσα μέρη, χωρίς να περισσεύει καμία. Κάθε μέρος θα είναι αριθμός που διαιρεί το 20 ακριβώς, θα είναι δηλαδή διαιρέτης του.

Αρκεί λοιπόν να βρω τους διαιρέτες του 20, για να έχω όλους τους πιθανούς τρόπους με τους οποίους μπορώ να βάλω τις φωτογραφίες στις σελίδες.

Διαιρέτες του 20 είναι οι αριθμοί: 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Απάντηση: Άρα μπορώ να βάλω .... φωτογραφίες σε κάθε σελίδα.

Εφαρμογή 2η

Ένας βιβλιοπώλης θέλει να φτιάξει όσο το δυνατό περισσότερα όμοια πακετάκια με χρωματιστές πλαστελίνες. Έχει 48 πράσινες και 60 κόκκινες πλαστελίνες. Πόσα πακετάκια θα φτιάξει, χωρίς να του περισσέψει καμία πλαστελίνη;

Λύση

Πρέπει να βρούμε πρώτα τους διαιρέτες του 48 και του 60 και μετά από τους κοινούς διαιρέτες τους να διαλέξουμε τον μεγαλύτερο (το Μ.Κ.Δ.).

Διαιρέτες του 48 είναι οι αριθμοί: <u>1</u>, <u>2</u>, <u>3</u>, <u>4</u>, <u>6</u>, 8, <u>12</u>, 16, 24, 48

Διαιρέτες του 36 είναι οι αριθμοί: <u>1</u>, <u>2</u>, <u>3</u>, <u>4</u>, <u>6</u>, 9, <u>12</u>, 18, 36

Μ.Κ.Δ. (48, 36): ....

Απάντηση: Ο βιβλιοπώλης θα φτιάξει .... πακέτα.

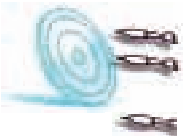
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **διαιρέτης** και **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (**Μ.Κ.Δ.**). Εξήγησε τον καθένα με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Κάθε φυσικός αριθμός έχει διαιρέτες τουλάχιστον το 1 και τον εαυτό του.	❐	❐
Ο αριθμός 3 είναι διαιρέτης του αριθμού 26.	❐	❐
Ο Μ.Κ.Δ. του 4 και του 8 είναι το 8.	❐	❐

Κεφάλαιο 13ο **Κριτήρια διαιρετότητας**

Μάντεψε το μυστικό κανόνα μου

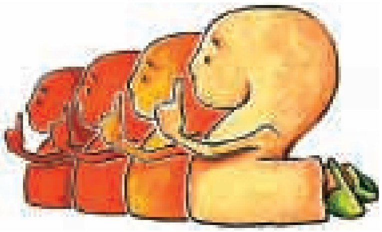


Διακρίνω ποιοι αριθμοί διαιρούνται με το 2, το 3, το 5, το 9, το 10 ή το 25.
Ανακαλύπτω κριτήρια για να ξεχωρίζω αν ένας αριθμός διαιρείται με το 2, το 3, το 5, το 9, το 10 ή το 25.
Λύνω προβλήματα χρησιμοποιώντας τα κριτήρια διαιρετότητας.

Δραστηριότητα 1η

Ένα σχολείο έχει 165 κορίτσια και 132 αγόρια. Είναι δυνατό τα κορίτσια να παραταχθούν σε δυάδες, τριάδες ή πεντάδες χωρίς να περισσεύει κανένα; Μπορεί να συμβεί το ίδιο με τα αγόρια;

- Ποια πράξη θα κάνεις για να χωρίσεις τα παιδιά σε δυάδες και να διαπιστώσεις αν χωρίζονται ακριβώς ή αν περισσεύει κανένα;...
- Κάνε την πράξη για τα **κορίτσια:** ....
- Κάνε το ίδιο για τα **αγόρια:** ....
- Κάνε την πράξη για τα **κορίτσια** σε τριάδες:..
- Κάνε το ίδιο για τα **αγόρια:** ....
- Κάνε την πράξη για τα **κορίτσια** σε πεντάδες: ....
- Κάνε το ίδιο για τα **αγόρια:** ....



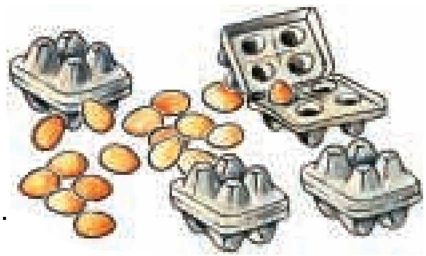
- Μπορείς να βρεις έναν κανόνα για τη διαίρεση ενός αριθμού με το 5;

  Ένας αριθμός διαιρείται με 5 όταν ....
- Ένα κανόνα για τη διαίρεση ενός αριθμού με το 2,

  Ένας αριθμός ....

Δραστηριότητα 2η

Στη Γεωργική Σχολή Θεσσαλονίκης συσκευάζουν τα αβγά σε αβγοθήκες 4 θέσεων. Τα αβγά που έχουν να συσκευάσουν σήμερα είναι 104. Μπορούν να συσκευαστούν σε τετράδες χωρίς να περισσέψει κανένα; Μπορεί να βρεθεί κανόνας, ώστε οι υπεύθυνοι να γνωρίζουν αν τα αβγά κάθε ημέρας συσκευάζονται σε τετράδες ακριβώς;



- Κάνοντας τη διαίρεση, διαπιστώνετε αν υπάρχει υπόλοιπο.

  ....
- Τα πολλαπλάσια του 104 θα διαιρούνται ακριβώς με το 4;
- Γράψτε μερικά από αυτά: ....
- Τι κοινό έχουν τα τελευταία ψηφία των αριθμών αυτών;

  ....
- Διατυπώστε έναν κανόνα.

  ....

Πολλές φορές μας χρειάζεται να διακρίνουμε αν ένας αριθμός διαιρείται ακριβώς από έναν άλλο. Για να διευκολυνθούμε όσο γίνεται έχουμε ανακαλύψει κάποιους κανόνες, στους οποίους υπακούουν όλοι οι φυσικοί αριθμοί. Είναι τα κριτήρια διαιρετότητας:

Κριτήρια διαιρετότητας	Παραδείγματα
1. Ένας αριθμός διαιρείται με το 10, το 100, το 1000, ..., αν τελειώνει σε ένα, δύο, τρία, ... μηδενικά αντίστοιχα.	Ο αριθμός 230 διαιρείται με το 10, ο αριθμός 2300 με το 10 και το 100, ...
2. Ένας αριθμός διαιρείται με το 2, αν τελειώνει σε 0, 2, 4, 6, 8.	Οι αριθμοί 6, 28, 374, 1350 διαιρούνται με το 2.
3. Ένας αριθμός διαιρείται με το 5, αν τελειώνει σε 0 ή σε 5.	Οι αριθμοί 75, 105, 300, 2630 διαιρούνται με το 5.
4. Ένας αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή με το 9.	Ο αριθμός 201 διαιρείται με το 3, ενώ ο αριθμός 261 διαιρείται με το 3 και το 9.
5. Ένας αριθμός διαιρείται με το 4 ή το 25, αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4 ή με το 25.	Το 132 διαιρείται με το 4, ενώ το 275 διαιρείται με το 25.
Οι αριθμοί που διαιρούνται με το 2 λέγονται **άρτιοι (ζυγοί)** αριθμοί.	2, 4, ..., 98, 100, ..., 948,...

Εφαρμογή 1η

Οι μαθητές ενός σχολείου είναι περισσότεροι από 283 και λιγότεροι από 293. Είναι δυνατό να παραταχθούν σε τριάδες ή πεντάδες χωρίς να περισσεύει κανένας. Πόσοι είναι;

Λύση

Αφού οι μαθητές παρατάσσονται σε τριάδες ή πεντάδες, αυτό σημαίνει πως το σύνολό τους είναι αριθμός που διαιρείται με το 3 αλλά και με το 5 ταυτόχρονα. Ανάμεσα στους αριθμούς 283 και 293 υπάρχουν μόνο 2 αριθμοί που διαιρούνται με το 5: το 285 και το 290. Το 285 διαιρείται και με το 3 (γιατί 2 + 8 + 5 = 15), αλλά το 290 δεν διαιρείται με το 3 (γιατί 2 + 9 + 0 = 11).

Απάντηση: Οι μαθητές είναι ....

Εφαρμογή 2η

Στην παρέλαση τα παιδιά προσπάθησαν να μετρήσουν τα άρματα. Στο τέλος όμως διαφώνησαν, καθώς άλλοι έλεγαν ότι ήταν 57 και άλλοι 59. Μπορείς να βρεις ποιος έχει δίκιο, αν ξέρεις ότι τα άρματα περνούσαν σε τριάδες;

Λύση

Αφού ξέρουμε ότι τα άρματα περνούσαν σε τριάδες, αυτό σημαίνει ότι το σύνολό τους ήταν αριθμός που διαιρείται με το 3. Το 57 διαιρείται (γιατί 5 + 7 = 12) ενώ το 59 δεν διαιρείται (γιατί 5 + 9 = 14).

Απάντηση: Δίκιο έχουν τα παιδιά που υποστηρίζουν ότι τα άρματα ήταν ....

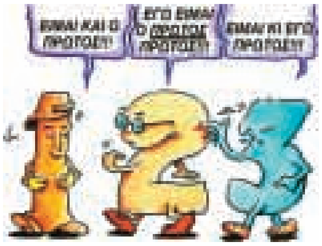
Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε τα **κριτήρια διαιρετότητας**. Θυμήσου κάθε κριτήριο αναφέροντας ένα δικό σου παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Ο αριθμός 309 διαιρείται με το 3 και με το 9.	❐	❐
Όποιος αριθμός διαιρείται ακριβώς με το 2 είναι ζυγός αριθμός.	❐	❐
Μπορώ να πω αν θα έχω υπόλοιπο σε μια διαίρεση με το 5 χωρίς να κάνω την πράξη.	❐	❐

Κεφάλαιο 14ο Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί



Είμαστε και οι πρώτοι!

Γνωρίζω τους πρώτους και τους σύνθετους αριθμούς.
Μαθαίνω τι είναι το «κόσκινο του Ερατοσθένη».
Διακρίνω αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος με τα κριτήρια διαιρετότητας.

Δραστηριότητα 1η

Στο Δημοτικό Σχολείο Σύμης, τα παιδιά της ΣΤ΄ τάξης, μετά το μάθημα για τους διαιρέτες των αριθμών και τα κριτήρια διαιρετότητας, αποφάσισαν να παίξουν ένα παιχνίδι. Το ονόμασαν «δεν μπαίνω σε σειρές» και αναρωτήθηκαν: «*Πόσα παιδιά πρέπει να έχει μια τάξη ώστε να μην μπορούν να παραταχθούν σε σειρές χωρίς να περισσεύει έστω και ένα παιδί;*»

Ποιο κριτήριο δεν πρέπει να ικανοποιεί ο αριθμός που ψάχνουν για να μην μπορούν να παραταχθούν σε:

- **Δυάδες:** ....
- **Τριάδες:** ....
- **Τετράδες:** ....
- **Πεντάδες:** ....
- Μπορείς τώρα να βρεις τους πιθανούς αριθμούς μαθητών που φαντάστηκαν τα παιδιά; (Μια τάξη έχει μέχρι 30 μαθητές.)

  ....

- Τι παρατηρείς για τους διαιρέτες αυτών των αριθμών;

Δραστηριότητα 2η *«Το κόσκινο του Ερατοσθένη»*

Ο Ερατοσθένης, σπουδαίος Έλληνας μαθηματικός και φιλόσοφος, γεννήθηκε περίπου το 275 π.Χ. Ήταν ο πρώτος που υπολόγισε τη διάμετρο της Γης με ακρίβεια. Δυστυχώς σώζονται ελάχιστες από τις μελέτες του.

Ο διπλανός πίνακας είναι μία επινόησή του, για να ξεχωρίζει τους αριθμούς που έχουν μόνο 2 διαιρέτες από τους υπόλοιπους.

Για να τους ξεχωρίσεις κι εσύ, να διαγράψεις:

- τον αριθμό 1.
- τα πολλαπλάσια του 2, εκτός από το 2.
- τα πολλαπλάσια του 3, εκτός από το 3.
- τα πολλαπλάσια του 5, εκτός από το 5.
- τα πολλαπλάσια του 7, εκτός από το 7.
- Βάλε σε έναν κύκλο τους αριθμούς που απέμειναν.
- Πόσοι έμειναν; ....

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Από την αρχαιότητα ακόμη οι αριθμοί αποτελούσαν πρόκληση για μελέτη. Το 300 π.Χ. ο Ευκλείδης ήταν από τους πρώτους που μελέτησαν τους αριθμούς σε σχέση με τους διαιρέτες τους και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες.

Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Ένας αριθμός, μεγαλύτερος από το 1, που έχει μόνο **δύο διαιρέτες** (το 1 και τον εαυτό του) λέγεται **πρώτος**.

Ένας αριθμός που έχει τουλάχιστον **τρεις διαιρέτες** λέγεται **σύνθετος**.

Παραδείγματα

Ο αριθμός 2, έχει για διαιρέτες μόνο το 1 και το 2.

Ο αριθμός 4, έχει για διαιρέτες το 1, το 2 και το 4.

Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος (έχει μόνο **έναν διαιρέτη**, τον εαυτό του).

Εφαρμογή 1η

Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 101 έως 110 είναι πρώτοι αριθμοί.

Λύση

101 102 103 104 105 10 107 108 109 110

Πρώτα διαγράφω τους άρτιους αριθμούς (διαιρούνται με το 2). Μετά το 105 (που διαιρείται με το 3). Κανένας από τους υπόλοιπους αριθμούς δεν διαιρείται με το 5 σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας. Δοκιμάζω, όπως ο Ερατοσθένης, και με το 7 και διαπιστώνω ότι δεν διαιρούνται ούτε μ' αυτό. Πρέπει να δοκιμάσω όμως αν διαιρούνται με κάποιον από τους υπόλοιπους πρώτους αριθμούς μέχρι το 100.

Απάντηση: Πρώτοι είναι οι αριθμοί 101, 103, 107 και 109.
Σύνθετοι είναι οι αριθμοί 102, 104, 105, 106, 108 και 110.

Εφαρμογή 2η

Το Στ΄1 έχει 23 μαθητές και το Στ΄2 έχει 24. Ο γυμναστής θέλει να χωρίσει κάθε τμήμα σε ίσες ομάδες. Σε ποιο τμήμα θα δυσκολευτεί και γιατί; Στο άλλο τμήμα πόσοι είναι οι πιθανοί συνδυασμοί που μπορεί να κάνει;

Λύση- Απάντηση

Το Στ΄1 δεν μπορεί να χωριστεί σε ομάδες χωρίς να περισσεύει κανένα παιδί, γιατί το 23 δεν έχει άλλους διαιρέτες εκτός από το 1 και το 23 (είναι πρώτος αριθμός). Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να το «παράγουμε» παρά μόνο με τον πολλαπλασιασμό 1 • 23.

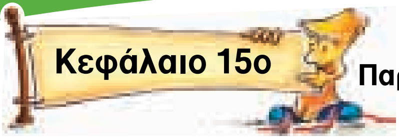
Το Στ΄2 μπορεί να χωριστεί με πολλούς τρόπους, γιατί το 24 έχει πολλούς διαιρέτες (είναι σύνθετος αριθμός).

Πιθανοί συνδυασμοί είναι:	12 ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(12 • 2 = 24)
	2 ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(2 • 12 = 24)
	3 ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(3 • 8 = 24)
	8 ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(8 • 3 = 24)
	4 ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(4 • 6 = 24)
	6 ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(6 • 4 = 24)
	24 ομάδες από	....	παιδιά κάθε ομάδα	(24 • 1 = 24)

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **πρώτος** και **σύνθετος αριθμός**.
Εξήγησέ τους με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός ζυγός αριθμός που είναι πρώτος.	❒	❒
Με το «κόσκινο του Ερατοσθένη» βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς.	❒	❒



Κεφάλαιο 15ο

Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών

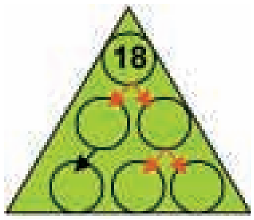
Δέντρα με αριθμούς

Αναλύω έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
Μαθαίνω τη διαδικασία ανάλυσης με δεντροδιάγραμμα και με διαδοχικές διαιρέσεις.

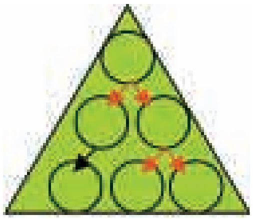
Δραστηριότητα 1η

«Δεντροδιαγράμματα»

Τα παιδιά της Στ΄ τάξης αναρωτήθηκαν: «Μπορούμε οποιονδήποτε σύνθετο αριθμό να τον εκφράσουμε ως γινόμενο πρώτων αριθμών;» Ας πάρουμε για παράδειγμα τον αριθμό 18:



- Γράψε στο διπλανό «δέντρο» το 18 ως γινόμενο δύο παραγόντων :
- Συνέχισε αναλύοντας κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου σε πρώτους παράγοντες:

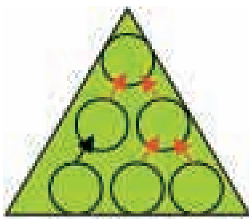


- Θα μπορούσες να ξεκινήσεις (πάλι από το 18) με άλλους παράγοντες;
- Συνέχισε αναλύοντας κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου σε πρώτους παράγοντες.
- Τι παρατηρείς για το τελικό γινόμενο στα δύο δέντρα;

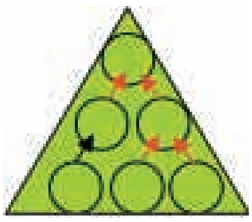
....

Δραστηριότητα 2η

Από την προηγούμενη δραστηριότητα τα παιδιά κατάλαβαν ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι το «κατασκευαστικό» υλικό για να φτιαχτούν όλοι οι σύνθετοι αριθμοί. Άρα κάθε σύνθετος αριθμός είναι φτιαγμένος από έναν μοναδικό συνδυασμό πρώτων αριθμών. Σκέφτηκαν να τους παρομοιάσουν με τα παιδικά τουβλάκια και να δοκιμάσουν τώρα να παράγουν δέντρα με αριθμούς ξεκινώντας από τα κάτω κλαδιά προς τα πάνω.



- Γράψε στα κάτω κλαδιά του διπλανού «δέντρου» ένα συνδυασμό από 3 πρώτους παράγοντες (ίδιους ή διαφορετικούς).
- Ανεβαίνοντας στο πιο πάνω «κλαδί» να κάνεις τον πολλαπλασιασμό ανάμεσα στους δύο παράγοντες και να μεταφέρεις τον τρίτο όπως είναι.
- Στο τελευταίο κλαδί να κάνεις και τον άλλο πολλαπλασιασμό.



- Δοκίμασε τώρα με άλλους πρώτους παράγοντες.
- Συνέχισε κάνοντας τον πρώτο πολλαπλασιασμό ανάμεσα στους δύο και μετάφερε τον τρίτο.
- Κάνε τον τελευταίο πολλαπλασιασμό. Η διαδικασία παραγωγής του αριθμού ολοκληρώθηκε.

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας οδηγούν στο συμπέρασμα:

Γινόμενο πρώτων παραγόντων

Ένας σύνθετος αριθμός μπορεί να εκφραστεί και ως γινόμενο πρώτων αριθμών **(γινόμενο πρώτων παραγόντων).**

Η σειρά των διαιρέσεων δεν παίζει κανένα ρόλο, γιατί κάθε σύνθετος αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μόνο κατά έναν τρόπο.

Παραδείγματα

Ο αριθμός 10, μπορεί να εκφραστεί και ως $2 \cdot 5$.

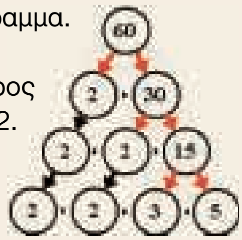
$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$

Για να αναλύσουμε έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, μπορούμε να εργαστούμε με δεντροδιάγραμμα ή διαδοχικές διαιρέσεις.

Εφαρμογή 1η

Να εκφράσετε τον αριθμό 60 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με δεντροδιάγραμμα.



Λύση

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 60. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Επομένως, γράφουμε το γινόμενο $2 \cdot 30$.

β. Από κάτω, αφού γράψουμε ξανά τον πρώτο παράγοντα (το 2), συνεχίζουμε αναλύοντας με τον ίδιο τρόπο το 30. Διαιρείται με το 2 και έτσι γράφουμε το γινόμενο $2 \cdot 15$.

γ. Γράφουμε ξανά τους πρώτους παράγοντες όπως είναι $(2 \cdot 2)$ και συνεχίζουμε αναλύοντας το 15. Δεν διαιρείται με το 2 και έτσι εξετάζουμε αν διαιρείται με το 3. Διαιρείται και έτσι γράφουμε το γινόμενο $3 \cdot 5$.
Η ανάλυση τελειώνει, γιατί όλοι οι παράγοντες είναι πρώτοι αριθμοί.

Απάντηση: Το 60 εκφράζεται ως $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Εφαρμογή 2η

Να εκφράσετε τον αριθμό 90 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με διαδοχικές διαιρέσεις.

Λύση

90	**2**
45	**3**
15	**3**
5	**5**
1	

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 90. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Έτσι τον διαιρούμε και γράφουμε από κάτω το πηλίκο, που είναι 45.

β. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για το 45. Διαιρούμε με το 3 και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 15.

γ. Διαιρούμε το 15 με το 3, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 5.

δ. Διαιρούμε με το 5, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 1.

Η ανάλυση τελειώνει, γιατί το τελευταίο πηλίκο είναι το 1.

Απάντηση: Ο αριθμός 90 εκφράζεται ως $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **ανάλυση σύνθετου αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**. Εξήγησέ τον με ένα δικά σου παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Όλοι οι σύνθετοι αριθμοί μπορούν να γραφούν ως γινόμενα των πρώτων παραγόντων 2 και 3.	❒	❒
Πρέπει να βάζουμε τους παράγοντες με μια συγκεκριμένη σειρά.	❒	❒
Είναι σωστή η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: 66 = 2 • 3 • 11.	❒	❒

Κεφάλαιο 16ο **Πολλαπλάσια ενός αριθμού – Ε.Κ.Π.**

Έχουμε πολλά κοινά μεταξύ μας

Βρίσκω πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών.
Βρίσκω τα κοινά πολλαπλάσια και εντοπίζω το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αριθμών.
Χρησιμοποιώ τις διαδοχικές διαιρέσεις των αριθμών για να βρω το Ε.Κ.Π.

Δραστηριότητα 1η

Συμπλήρωσε τα γινόμενα στον παρακάτω πίνακα:

▪	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3											
4											
6											

- Τι είναι για το 3 οι αριθμοί στη γραμμή του; ....
- Υπάρχουν κοινοί αριθμοί στις τρεις γραμμές; .... Αν ναι, κύκλωσέ τους.
- Τι είναι οι αριθμοί που κύκλωσες για το 3 το 4 και το 6;

  ....

- Ποιος είναι ο μικρότερος; ....

Δραστηριότητα 2η

Στο αγροτικό ιατρείο του χωριού ο παιδίατρος έρχεται ημέρα Δευτέρα κάθε 2 εβδομάδες και η οφθαλμίατρος την ίδια μέρα, κάθε 3 εβδομάδες. Αν κάποια Δευτέρα βρέθηκαν μαζί στο ιατρείο πότε θα βρεθούν ξανά μαζί;

- Μετά την αρχική τους συνάντηση, σε πόσες εβδομάδες θα πάει ξανά ο παιδίατρος; ....
- Σε πόσες εβδομάδες θα πάει ξανά η οφθαλμίατρος; ....
- Αν αριθμήσουμε τις εβδομάδες μετά τη συνάντηση για να σημειώσουμε τις επισκέψεις των γιατρών, συνέχισε συμπληρώνοντας τον πίνακα: ....
- Ποιος είναι ο αριθμός που αντιστοιχεί στην εβδομάδα που ψάχνουμε;............

Εβδομάδα *(μετά την α΄ συνάντηση)*	1η	2η	3η	4η	5η	6η
Παιδίατρος *(επίσκεψη ανά 2 εβδομάδες)*	–	✓				
Οφθαλμίατρος *(επίσκεψη ανά 3 εβδομάδες)*	–	–				

- Μπορείς να διακρίνεις από τον πίνακα ποια ιδιότητα έχει ο αριθμός της εβδομάδας κοινής επίσκεψης; Εξήγησε: ....

  ....

- Πότε θα είναι η 3η κοινή συνάντηση; ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

Πολλαπλάσια φυσικού αριθμού, Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών

Πολλαπλάσιο ενός φυσικού αριθμού λέγεται ο αριθμός που προκύπτει, όταν τον πολλαπλασιάσουμε με έναν άλλο φυσικό αριθμό.
Κάθε φυσικός αριθμός έχει άπειρα πολλαπλάσια.
Κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών λέγονται οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια όλων αυτών των φυσικών αριθμών.

Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια, εκτός από το 0, λέγεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.).**

Παραδείγματα

Πολλαπλάσια του 4 είναι οι αριθμοί:
0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ..., *άπειρο*
Πολλαπλάσια του 6 είναι οι αριθμοί:
0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ..., *άπειρο*
Κοινά πολλαπλάσια του 4 και του 6 (εκτός από το 0) είναι οι αριθμοί 12, 24, 36, ...

Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο του 4 και του 6 είναι το 12.

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών εξετάζουμε τον μεγαλύτερο από αυτούς. Αν αυτός δεν είναι το Ε.Κ.Π. τους, τον διπλασιάσουμε, τριπλασιάσουμε κ.λπ., ώσπου να βρούμε το πολλαπλάσιό του που είναι πολλαπλάσιο και των άλλων αριθμών.

Ένας άλλος τρόπος είναι να τους αναλύσουμε ταυτόχρονα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με τη μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων. Το Ε.Κ.Π. τους είναι το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων. Ο τρόπος αυτός φαίνεται αναλυτικά παρακάτω (στην 1η εφαρμογή).

Εφαρμογή 1η

Βρίσκω το Ε.Κ.Π. των αριθμών 30, 36 και 45 με διαδοχικές διαιρέσεις.

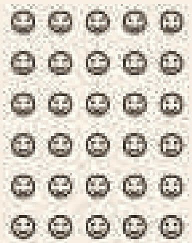
Λύση

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός ο οποίος διαιρεί τουλάχιστον τον έναν από τους τρεις αριθμούς. Είναι ο αριθμός 2, ο οποίος διαιρεί το 30 και το 36. Διαιρούμε αυτούς τους αριθμούς, γράφουμε τα πηλίκα τους από κάτω και γράφουμε το 45 όπως είναι.
β. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία, αναζητώντας πάντα το μικρότερο πρώτο αριθμό που να διαιρεί τουλάχιστον τον έναν αριθμό. Όσους δεν διαιρούνται τους ξαναγράφουμε από κάτω, μέχρι να γίνουν όλα τα πηλίκα ίσα με το 1.

30	**36**	**45**	**2**
15	**18**	**45**	**2**
15	**9**	**45**	**3**
5	**3**	**15**	**3**
5	**1**	**5**	**5**
1		**1**	

Απάντηση: Το Ε.Κ.Π. των αριθμών 30, 36 και 45 είναι το 2 • 2 • 3 • 3 • 5 = ...

Εφαρμογή 2η



Οι μαθητές μιας τάξης χωρίζονται σε ομάδες των 5 ή των 6 παιδιών χωρίς να περισσεύει κανένας. Πόσοι μπορεί να είναι;

Λύση

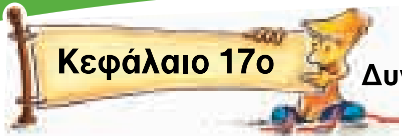
Ο αριθμός των μαθητών πρέπει να είναι κοινό πολλαπλάσιο του 5 και του 6. Για να βρω το Ε.Κ.Π. του 5 και του 6, σκέφτομαι τα πολλαπλάσια του 6 μέχρι να βρω το πρώτο κοινό τους πολλαπλάσιο: 0, 6, 12, 18, 24, **30**.
(Υπάρχουν πολλά κοινά πολλαπλάσια, αλλά οι μαθητές δεν μπορεί να είναι περισσότεροι από 30.)
Απάντηση: Οι μαθητές είναι 30.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **πολλαπλάσιο** και **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** (**Ε.Κ.Π.**).
Εξήγησε τον καθένα με δικά σου παραδείγματα.

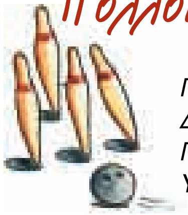
Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Οι αριθμοί 0 , 9, 18, 27 και 36 είναι κοινά πολλαπλάσια του 3 και του 9.	❒	❒
Το Ε.Κ.Π. (4, 40) είναι το 40.	❒	❒
Το Ε.Κ.Π. δύο αριθμών μπορεί να είναι αριθμός μικρότερος από τους δύο.	❒	❒



Κεφάλαιο 17ο
Δυνάμεις

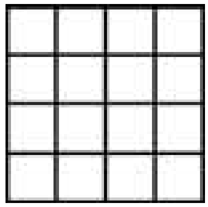
Πολλοί μαζί είμαστε πιο δυνατοί



Γνωρίζω την έννοια και τον συμβολισμό της δύναμης ενός αριθμού.
Διαβάζω και γράφω δυνάμεις.
Γράφω το γινόμενο ίδιων παραγόντων με δύναμη και αντίστροφα.
Υπολογίζω τις δυνάμεις ενός αριθμού.

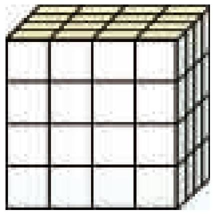
Δραστηριότητα 1η

Ξέρουμε ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μια σύντομη πρόσθεση με ίδιους προσθετέους.



- Υπολόγισε με σύντομο τρόπο πόσα μικρά τετράγωνα υπάρχουν στο διπλανό σχήμα.
- Γράψε την πράξη που έκανες:

  ....



- Υπολόγισε το πλήθος των μικρών κύβων στην παρακάτω κατασκευή: ....
- Τι παρατηρείς για τους παράγοντες σε καθεμία από τις προηγούμενες ισότητες; ....

Δραστηριότητα 2η

Από τα αρχαία ακόμη χρόνια οι άνθρωποι έδωσαν ιδιαίτερη προσοχή στους πολλαπλασιασμούς στους οποίους όλοι οι παράγοντες ήταν ίδιοι. Στον Πάπυρο του Αχμές (αρχαίο μαθηματικό αιγυπτιακό χειρόγραφο που ο Ριντ μετέφερε στη Βρετανία) διαβάζουμε το παρακάτω πρόβλημα:

Υπάρχουν εφτά σπίτια. Σε κάθε σπίτι ζουν εφτά γάτες. Κάθε γάτα έφαγε εφτά ποντίκια. Κάθε ποντίκι, αν ζούσε, θα έχει φάει εφτά στάχυα. Κάθε στάχυ που φυτεύεται παράγει εφτά κούπες σιτάρι. Πόσο περισσότερες κούπες σιτάρι θα παραχθούν χάρη στις γάτες κατά την επόμενη σοδειά ;

- Γράψτε τη διαδικασία που θα ακολουθήσετε για να λύσετε το «πρόβλημα»:

  ....

  ....

  ....

- Πιστεύετε ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι δάσκαλοι έβαλαν το πρόβλημα αυτό μόνο για να βρεθεί η ποσότητα του σιταριού; ....

  ....

  ....

Πολλές φορές συναντάμε γινόμενα στα οποία όλοι οι παράγοντες είναι ίσοι. Αυτά τα γινόμενα είναι δυνατό να εκφραστούν με πιο σύντομο τρόπο.

Δύναμη φυσικού αριθμού

Ένα γινόμενο με ίδιους παράγοντες μπορεί να γραφεί ως **δύναμη**.

Η δύναμη αποτελείται από δύο αριθμούς: τη **βάση** που είναι ο αριθμός που χρησιμοποιείται ως παράγοντας στο γινόμενο και τον **εκθέτη** που δείχνει πόσες φορές ο αριθμός της βάσης χρησιμοποιείται ως παράγοντας.

Παραδείγματα

Παράγοντες γινομένου - δύναμη

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

$\mathbf{2^5}$

2: βάση

5: εκθέτης

Ο εκθέτης γράφεται με μικρότερο μέγεθος, πάνω και δεξιά από τη βάση. Για παράδειγμα, η δύναμη με βάση το 2 και εκθέτη το 5 γράφεται $\mathbf{2^5}$ και διαβάζεται: **2 στην πέμπτη (δύναμη).**

Η δύναμη με εκθέτη το 2 διαβάζεται στη δεύτερη ή **στο τετράγωνο** (π.χ. 5^2 : 5 στη δεύτερη ή 5 στο τετράγωνο).
Η δύναμη με εκθέτη το 3 διαβάζεται στην τρίτη ή **στον κύβο** (π.χ. 5^3 : 5 στην τρίτη ή 5 στον κύβο).

$5^2 = 5 \cdot 5$ (είναι το εμβαδό **τετραγώνου** με πλευρά 5)
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$ (είναι ο όγκος **κύβου** με ακμή 5)

Εφαρμογή 1η

Να βρείτε το γινόμενο πρώτων παραγόντων του αριθμού 243. Μπορείτε να γράψετε το γινόμενο αυτό με συντομότερο τρόπο;

Λύση

Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός ο οποίος διαιρεί τον αριθμό 243. Βρίσκουμε ότι είναι ο αριθμός 3 και αρχίζουμε τη διαδικασία παραγοντοποίησης.

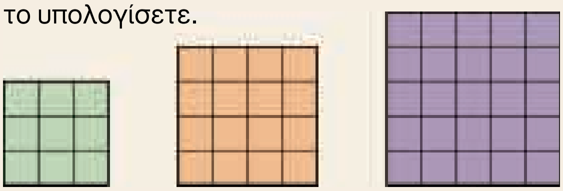
243	**3**
81	**3**
27	**3**
9	**3**
3	**3**
1	

Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, βρίσκουμε το γινόμενο πρώτων παραγόντων $243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Διαπιστώνουμε ότι είναι ένα γινόμενο που αποτελείται από ίδιους παράγοντες. Άρα μπορεί να εκφραστεί με δύναμη.

Απάντηση: Ο αριθμός 243 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ και με συντομότερο τρόπο είναι: 3^5

Εφαρμογή 2η

Να γράψετε το γινόμενο για τον υπολογισμό του εμβαδού για καθένα από τα παρακάτω τετράγωνα με τη μορφή δύναμης και να το υπολογίσετε.



Λύση - Απάντηση:

α) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ τ.εκ., β) $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ τ.εκ., γ) $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ τ.εκ.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

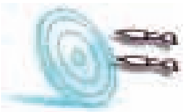
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **δύναμη ενός αριθμού, βάση** και **εκθέτης**. Εξήγησέ τους με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Η ισότητα $6^3 = 6 \cdot 3$ είναι σωστή.	❐	❐
Η ισότητα $4^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ είναι σωστή.	❐	❐
Η ισότητα $4^2 = 16$ είναι σωστή.	❐	❐

Κεφάλαιο 18ο **Δυνάμεις του 10**

Συσκευασία: «Δέκα σε ένα»



Γνωρίζω τις δυνάμεις του 10.
Γράφω τους μεγάλους αριθμούς χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις του 10.

Δραστηριότητα 1η

Όπως ξέρουμε, τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με τον εαυτό του, μπορούμε να τον εκφράσουμε και με τη μορφή δύναμης.

- Να εκφράσεις το γινόμενο 10 • 10 με δύναμη και να το υπολογίσεις...
- Έχοντας εκφράσει την εκατοντάδα με δύναμη, πώς μπορούμε να εκφράσουμε γρήγορα τις 2, 3, 4, εκατοντάδες; ....
- Να εκφράσεις το 1000 με δύναμη του 10. ....
- Πώς μπορούμε τώρα να εκφράσουμε τις 2, 3, 4, ... χιλιάδες με δύναμη; ....

  ....
- Συμπλήρωσε τον πίνακα με τις δυνάμεις του 10.
- Βρες τον κανόνα για να υπολογίζεις από τη δύναμη το γινόμενο, χωρίς να κάνεις τους πολλαπλασιασμούς.

10^2	10^3	10^4	10^5
10 • 10			
100			

Δραστηριότητα 2η

Ο Άρης είναι περίπου 1.000.000.000.000 μέτρα μακριά από τη Γη! Ο αριθμός αυτός μας δίνει την «εντύπωση» μιας μεγάλης απόστασης, αλλά σε σχέση με τι; Το σχολείο απέχει 100 μέτρα από το σπίτι! Αν μας έλεγαν ότι το μήκος του γαλαξία μας είναι 1.000.000.000.000.000.000.000 μέτρα, ξαφνικά ο Άρης θα έμοιαζε σαν ένας πολύ κοντινός γείτονας (που, για τις αστρονομικές αποστάσεις, είναι πραγματικά)!

Διαβάζοντας το παραπάνω κείμενο, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση, η σύγκριση, ακόμα και η ανάγνωση τεράστιων αριθμών είναι δύσκολη υπόθεση. Για να μπορούμε να τους διαβάζουμε πιο εύκολα, να βλέπουμε με μια ματιά τη «μεγαλοσύνη» τους και να κάνουμε πράξεις με αυτούς, τους εκφράζουμε με τις δυνάμεις του 10. Έτσι:

Το μήκος του γαλαξία μας είναι: .... μέτρα.

Η απόσταση από τη Γη ως τον Άρη είναι: .... μέτρα.

Το σπίτι απέχει από το σχολείο: .... μέτρα.

Οι δυνάμεις του 10 μας επιτρέπουν να εκφράσουμε τη σύγκριση μεγεθών, που διαφορετικά θα ήταν δύσκολο να συγκριθούν.

- Μπορείτε τώρα να απαντήσετε, συγκρίνοντας τους αριθμούς ως δυνάμεις του 10, στην ερώτηση: «Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το μήκος του γαλαξία μας από την απόσταση Γη - Άρη;».

  ....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι, χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις του 10, μπορούμε να γράψουμε με σύντομο τρόπο πολύ μεγάλους αριθμούς.

Δυνάμεις του 10

Κάθε δύναμη του 10 είναι ίση με τον αριθμό που σχηματίζεται από το ψηφίο 1 και τόσα μηδενικά όσες μονάδες έχει ο εκθέτης.
Μπορούμε να γράψουμε τους αριθμούς 10, 100, 1000, ... ως δυνάμεις με βάση το 10 βάζοντας ως εκθέτη τον αριθμό που δείχνει πόσα μηδενικά έχουν.

Παραδείγματα

$10^2 = 100$

$10^4 = 10.000$

$1.000 = 10^3$

$1.000.000 = 10^6$

Για να γράψουμε έναν πολυψήφιο αριθμό, με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10 κάνουμε τα εξής:

α. Τον μετατρέπουμε σε γινόμενο με το 10, 100, 1000, ... ανάλογα με τον αριθμό των 0 που υπάρχουν στον αριθμό.

β. Μετατρέπουμε το 10, 100, 1000, ... σε δύναμη του 10

γ. Ο πολυψήφιος αριθμός έχει τώρα τη μορφή γινομένου του οποίου ο δεύτερος παράγοντας είναι δύναμη του 10.

Οι αστροφυσικοί έχουν ανακαλύψει στο διάστημα περίπου 500.000.000 γαλαξίες.

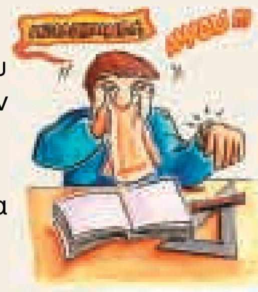
α. Αυτό γράφεται και ως:
$5 \cdot 100.000.000$

β. $100.000.000 = 10^8$

γ. $500.000.000 = 5 \cdot 10^8$

Εφαρμογή 1η

Οι επιστήμονες υπολογίζουν ότι, όταν ο ιός της γρίπης προσβάλλει έναν άνθρωπο, αν βρει ικανοποιητικές συνθήκες, μέσα σε 12 ώρες έχει δημιουργήσει αποικία 1.500.000.000 μονάδων. Πόσες μονάδες του ιού θα υπάρχουν στον άνθρωπο, αν αρχίσει την αντιβίωση 2 μέρες, αφού προσβληθεί από τον ιό; Να εκφράσετε τον αριθμό με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10.



Λύση:

Ξέρουμε ότι 2 μέρες είναι 4 δωδεκάωρα. Αφού ο ιός πολλαπλασιάζεται περίπου κατά 1.500.000.000 μονάδες κάθε 12 ώρες, έπειτα από 2 μέρες θα υπάρχουν $1.500.000.000 \cdot 4 = 6.000.000.000$ μονάδες.

Μετατρέπουμε τον αριθμό στο γινόμενο $6 \cdot 10.000.000.000$

Μετατρέπουμε το 10.000.000.000 στη δύναμη $10^{....}$. Ο αριθμός γράφεται τώρα $6 \cdot 10^{....}$.

Απάντηση: Σε 2 μέρες θα υπάρχουν περίπου $6 \cdot 10^{....}$ μονάδες του ιού.

Εφαρμογή 2η

Ο πληθυσμός της Γης είναι περίπου $7 \cdot 10^9$ άνθρωποι. Γράψε τον αριθμό αυτό στην κανονική μορφή.

Λύση

Η δύναμη 10^9 είναι ίση με το 1.000.000.000.

Άρα το γινόμενο $7 \cdot 10^9 = 7 \cdot 1.000.000.000 = 7.000.000.000$.

Απάντηση: Ο πληθυσμός της Γης είναι περίπου 7.000.000.000 άνθρωποι.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **δυνάμεις του 10** και **έκφραση αριθμού με δύναμη του 10**. Εξήγησέ τους με δικά σου παραδείγματα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Σε μια δύναμη του 10 εκθέτης είναι πάντα το 10.	❐	❐
Οι αριθμοί εκφράζονται με δύναμη του 10 μόνο για μεγάλες αποστάσεις.	❐	❐
Η ισότητα $10^1 = 10$ είναι σωστή.	❐	❐

Κεφάλαιο 19ο **Κλάσματα ομώνυμα και ετερώνυμα**

Τι πλάσμα είναι αυτό το … κλάσμα;

Μελετώ την έννοια του κλάσματος ως μέρος του όλου.
Συγκρίνω το κλάσμα με την ακέραιη μονάδα.
Διαπιστώνω ότι υπάρχουν κάποια κλάσματα που μετατρέπονται σε μεικτούς αριθμούς και μαθαίνω πώς να μετατρέπω τη μια μορφή στην άλλη.

Μια μεγάλη επινόηση του ανθρώπου στην αριθμητική ήταν ένας νέος αριθμός, το κλάσμα. Το χρησιμοποιούμε συχνά στην καθημερινή μας ζωή για να δηλώσουμε το μέρος ενός πράγματος.

Εκφράστε με κλάσμα: α) 2 ημέρες ενός έτους ...., β) 1 λεπτό της ώρας ...., γ) 1 λεπτό του ΕΥΡΩ ....,

δ) 6 ώρες της ημέρας ...., ε) 15 γραμμάρια του κιλού ....

Δραστηριότητα 1η

Οι φίλοι μου κι εγώ λατρεύουμε την πίτσα. Αυτό είναι πολύ καλό, γιατί ξέρουμε πάντα τι φαγητό να παραγγείλουμε. Υπάρχει όμως ένα μικρό πρόβλημα. Θέλουμε να είμαστε δίκαιοι και να μοιραζόμαστε τις πίτσες εξίσου, ωστόσο δεν ξέρουμε πάντα πώς να το κάνουμε!
Μπορείτε να μας βοηθήσετε με τα κλάσματα;

- Αν είχαμε μια πίτσα για 2 άτομα, πόσο μέρος πίτσας θα έτρωγε ο καθένας; ....
- Αν ήμασταν 3 άτομα, πόσο μέρος πίτσας θα έτρωγε ο καθένας; ....
- Αν εμείς οι 3 φίλοι είμαστε πολύ πεινασμένοι και παραγγείλουμε δύο πίτσες, πόσο μέρος πίτσας θα φάει ο καθένας συνολικά; ....

Δραστηριότητα 2η

Χρειάζεται $\frac{1}{4}$ της ώρας για να ψηθεί μία πίτσα στο φούρνο μας.

- Αν ψήνουμε τη μια πίτσα μετά την άλλη και ψήσουμε 4 πίτσες, πόσα τέταρτα της ώρας θα χρειαστούμε;
- Γράψε την απάντησή σου με κλάσμα: ....
- Τι παρατηρείς για τους όρους του κλάσματος; ....
- Γράψε τώρα το χρόνο ψησίματος σε ώρες: ....
- Αν έχουμε να ψήσουμε 5 πίτσες, πόσα τέταρτα της ώρας θα χρειαστούμε;
- Γράψε την απάντησή σου με κλάσμα: ....
- Τι παρατηρείς για τους όρους αυτού του κλάσματος; ....
- Γράψε τώρα το χρόνο ψησίματος σε ώρες: ....

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

Κλάσμα

Ο αριθμός που δηλώνει το μέρος ενός «όλου» ονομάζεται **κλάσμα.** Το κλάσμα σχηματίζεται από δύο φυσικούς αριθμούς, τον αριθμητή και τον παρονομαστή, που χωρίζονται μεταξύ τους από την κλασματική γραμμή με τη μορφή: $\frac{\text{αριθμητής}}{\text{παρονομαστής}}$.

Το κλάσμα με αριθμητή το 1 λέγεται **κλασματική μονάδα.**

Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μικρότερο από το 1.

Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι ίσο με το 1.

Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χωρίσουμε τις ακέραιες μονάδες και να μετατρέψουμε το κλάσμα σε **μεικτό αριθμό.**

Παραδείγματα

Το $\frac{3}{5}$ είναι το κλάσμα που δηλώνει το σκιασμένο μέρος του παρακάτω ορθογωνίου.

$\frac{3}{4} < 1$ και $\frac{10}{12} < 1$

$\frac{4}{4} = 1$ και $\frac{12}{12} = 1$

$\frac{5}{4} > 1$ και $\frac{17}{12} > 1$

$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ και $\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$

Εφαρμογή 1η

Σε ένα πάρτι υπάρχει γλυκό μηλόπιτα σε ταψιά. Κάθε μερίδα γλυκού είναι το $\frac{1}{12}$ του ταψιού. Η μηλόπιτα προσφέρθηκε σε 31 άτομα. Πόσα ταψιά μηλόπιτας καταναλώθηκαν;

Λύση

Ξέρουμε ότι οι μερίδες που έφαγαν όλοι είναι 31 (*αν ο καθένας έφαγε μόνο μία μερίδα*). Αφού η μία μερίδα είναι το $\frac{1}{12}$ του ταψιού, τότε οι μερίδες που καταναλώθηκαν είναι τα $\frac{31}{12}$.

Αφού το ένα ταψί είναι $\frac{12}{12}$, τα $\frac{31}{12}$ είναι $\frac{12}{12} + \frac{12}{12} + \frac{7}{12}$, δηλαδή $2\frac{7}{12}$.

Απάντηση: Καταναλώθηκαν $2\frac{7}{12}$ ταψιά μηλόπιτας.

Εφαρμογή 2η

Να μετατρέψετε το μεικτό αριθμό $5\frac{5}{6}$ σε κλάσμα.

Λύση

Το κλάσμα που υπάρχει στο μεικτό αριθμό δηλώνει ότι κάθε ακέραιη μονάδα έχει χωριστεί σε έκτα, είναι δηλαδή ίση με $\frac{6}{6}$. Άρα ο αριθμός $5\frac{5}{6}$ μπορεί να γραφεί $\frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{6}{6} + \frac{5}{6} = \frac{35}{6}$ ή αλλιώς

$\_\_\_\_ + \frac{5}{6} = \frac{35}{6}$.

Απάντηση: Ο μεικτός αριθμός $5\frac{5}{6}$ μετατρέπεται στο κλάσμα $\frac{35}{6}$.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **κλάσμα, αριθμητής, παρονομαστής, κλασματική μονάδα, κλάσμα μικρότερο, ίσο ή μεγαλύτερο από το 1** και **μεικτός αριθμός**. Εξήγησε καθέναν από τους όρους αυτούς με ένα παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Το κλάσμα εκφράζει το μέρος ενός όλου που έχει χωριστεί σε ίσα μέρη.	❒	❒
Ο αριθμητής δεν μπορεί ποτέ να είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή.	❒	❒
Ο μεικτός αριθμός μετατρέπεται σε κλάσμα μικρότερο απ' το 1.	❒	❒

Κεφάλαιο 20ό **Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης**

Ποιος θα με βοηθήσει στο μοίρασμα;

Διαπιστώνω ότι το κλάσμα είναι το πηλίκο μιας διαίρεσης.
Μαθαίνω να μετατρέπω ένα κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό και αντίστροφα.
Σημειώνω τη θέση του κλάσματος στην αριθμογραμμή από τη δεκαδική του αξία.

Δραστηριότητα 1η

Ένας πατέρας αγόρασε ένα κουτί με 10 σοκολάτες για να τις μοιράσει στα τρία παιδιά του. Μπορείτε να τους βοηθήσετε με τη μοιρασιά;

- Αν το κουτί είχε 12 σοκολάτες, πόσο θα έπαιρνε κάθε παιδί;
  ....
- Γράψε την πράξη που έκανες: ....
- Το κουτί έχει 10 σοκολάτες. Πώς μπορείς να υπολογίσεις πόσο θα πάρει κάθε παιδί; ....
  ....
- Κάνοντας την πράξη, μπορείς να υπολογίσεις ακριβώς; ....
- Αν τα 3 παιδιά είχαν να μοιραστούν μόνο μία σοκολάτα, πόσο μέρος της θα έπαιρνε το καθένα;
  .... 
- Αν λοιπόν χωρίσουν και τις 10 σοκολάτες κατά τον ίδιο τρόπο, πόσα ίδια μέρη θα πάρει κάθε παιδί;
  ....
- Τι κατάφερες να υπολογίσεις με τον τρόπο αυτό; ....

Δραστηριότητα 2η

Στην προηγούμενη δραστηριότητα το πηλίκο της διαίρεσης 10 : 3 το εκφράσαμε με το κλάσμα $\frac{10}{3}$. Αν αποφασίσουμε να κάνουμε τη διαίρεση, θα είναι 10 : 3 = 3,333...

- Πώς μπορούμε να βρούμε σε ποιο σημείο στην αριθμογραμμή αντιστοιχεί ο αριθμός που εκφράζεται με ένα κλάσμα; ....
- Τοποθετήστε πάνω από την αριθμογραμμή τα παρακάτω κλάσματα, αφού κάνετε την πράξη που χρειάζεται για να βρείτε ποιον αριθμό εκφράζει το καθένα:
  (Μπορούμε να τα τοποθετήσουμε χωρίς να κάνουμε την πράξη;) ....

Α. $\frac{45}{90}$ Β. $\frac{2}{5}$ Γ. $\frac{9}{12}$ Δ. $\frac{7}{10}$ Ε. $\frac{4}{16}$ Ζ. $\frac{33}{30}$

- Τι πρέπει να κάνουμε για να τοποθετήσουμε στην αριθμογραμμή το κλάσμα $\frac{1}{3}$ (ή το κλάσμα $\frac{10}{3}$);
  ....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι χάρη στα κλάσματα μπορούμε να εκφράσουμε το πηλίκο κάθε διαίρεσης φυσικών αριθμών με ακρίβεια:

	Παραδείγματα
Κλάσμα Το κλάσμα εκφράζει το ακριβές **πηλίκο** μιας διαίρεσης: της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή του.	Το $\frac{3}{7}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης 3 : 7
Αν κάνουμε τη διαίρεση αυτή, μπορούμε **να μετατρέψουμε το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό** (ή σε φυσικό, αν η διαίρεση είναι τέλεια). Αν η διαίρεση δεν μας δίνει ακριβές πηλίκο, σταματάμε εκεί που θέλουμε και έχουμε πηλίκο με προσέγγιση στα δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά, ...	3 : 7 = 0,4285714... Το πηλίκο της διαίρεσης 3 : 7 είναι 0,42 με προσέγγιση στα εκατοστά ή 0,428 με προσέγγιση στα χιλιοστά.
Οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται και ως κλάσματα.	Το 0,1 γράφεται ως $\frac{1}{10}$.

Εφαρμογή 1η **Μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό**

Να μετατρέψετε τα κλάσματα $\frac{7}{28}$ και $\frac{7}{140}$ σε δεκαδικούς αριθμούς και να τους προσθέσετε.

Λύση - Απάντηση:

Για να μετατρέψουμε τα κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς θα κάνουμε τις διαιρέσεις:

$$\begin{array}{r|l} 70 & 28 \\ \cline{2-2} 140 & 0,25 \\ 00 & \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{r|l} 700 & 140 \\ \cline{2-2} 0 & 0,05 \end{array}$$

Τώρα θα προσθέσουμε 0,25 + 0,05 = ...

Εφαρμογή 2η **Μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε κλάσμα**

- Να κάνετε τη διαίρεση ανάμεσα στους όρους των κλασμάτων $\frac{6}{10}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{8}{1000}$, και $\frac{19}{10}$.
- Να διατυπώσετε τώρα τον κανόνα μετατροπής των δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα.
- Μετά, γράψτε ως κλάσματα τους δεκαδικούς αριθμούς: 0,6 0,09 0,005 3,042

Λύση - Απάντηση

- Όπως γνωρίζουμε, κάθε δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα. Κάνοντας τη διαίρεση ανάμεσα στους όρους των κλασμάτων διαπιστώνουμε ότι:

  $\frac{6}{10} = 0,6$ $\quad\frac{75}{100} = 0,75$ $\quad\frac{8}{1000} = 0,008$ $\quad\frac{19}{10} = 1,9$

- Άρα: **οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται ως κλάσματα με παρονομαστή το 10, το 100, το 1000, ... ανάλογα με τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων που έχουν.**
- 0,6 = ——— 0,09 = ——— 0,005 = ——— 3,042 = ———

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε το **κλάσμα ως πηλίκο** της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή του και τη **μετατροπή του κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό** και αντίστροφα. Πες ένα δικό σου παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Στο κλάσμα ο αριθμητής είναι ο διαιρετέος και ο παρονομαστής ο διαιρέτης.	❐	❐
Η διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή είναι πάντα τέλεια.	❐	❐
Η ισότητα 1 : 3 = $\frac{3}{1}$ είναι σωστή.	❐	❐

Κεφάλαιο 21ο

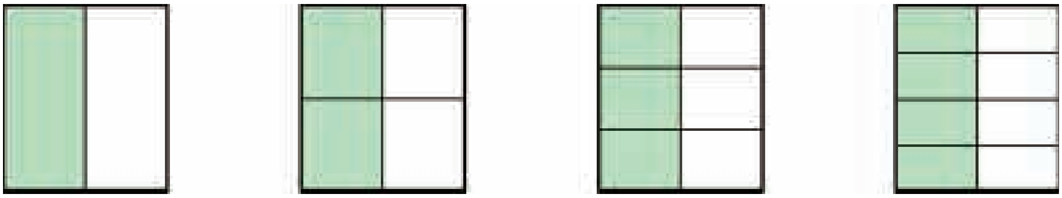
Ισοδύναμα κλάσματα

Μπορώ να λέω το ίδιο και με άλλα λόγια!

Αναγνωρίζω δύο ισοδύναμα κλάσματα.
Δημιουργώ ισοδύναμα κλάσματα.
Απλοποιώ κλάσματα, ώστε να γίνουν ανάγωγα.

Δραστηριότητα 1η

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε το σχέδιο ενός πάρκου που χωρίστηκε, για να καλυφθεί ένα μέρος του με χόρτο, ενώ στο υπόλοιπο θα τοποθετηθούν τα παιχνίδια.



Α .... *Β* .... *Γ* .... *Δ* ....

- Γράψε, κάτω από κάθε τετράγωνο, το κλάσμα που περιγράφει το πράσινο μέρος του.
- Πόσο μέρος του πάρκου θα καλυφθεί με χόρτο σε κάθε περίπτωση; ....
- Σύγκρινε τα κλάσματα μεταξύ τους με τη βοήθεια των σχημάτων.

  Τι παρατηρείς; ....
- Σύγκρινε το πρώτο κλάσμα με καθένα από τα υπόλοιπα.

  Τι παρατηρείς για τη σχέση ανάμεσα στους όρους τους; ....

  ....

Δραστηριότητα 2η

Ο Χρήστος και ο Φοίβος είχαν από 12 €. Όταν συναντήθηκαν, ο Χρήστος είπε ότι ξόδεψε τα $\frac{9}{12}$ των χρημάτων του και ο Φοίβος είπε ότι ξόδεψε τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων του.

- Ποιος ξόδεψε περισσότερα; ....
- Τι παρατηρείς για τους όρους των δύο κλασμάτων; ....
- Μπορείς να σχηματίσεις ένα νέο κλάσμα, που να εκφράζει το ίδιο μέρος του όλου; ....

  ....
- Με ποιο κλάσμα θα διάλεγες να εκφραστείς εσύ; Γιατί; ....

  ....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι είναι δυνατό δύο κλάσματα να έχουν διαφορετικούς όρους, αλλά να εκφράζουν την ίδια ποσότητα.

	Παραδείγματα
Ισοδύναμα κλάσματα Δύο κλάσματα λέγονται **ισοδύναμα** ή ίσα όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος του όλου. Αν πολλαπλασιάσουμε «χιαστί» τους όρους δύο ισοδύναμων κλασμάτων, τα δύο γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα μεταξύ τους. (Με τον τρόπο αυτό ελέγχουμε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα.)	Τα κλάσματα $\frac{9}{12}$ και $\frac{3}{4}$ είναι ισοδύναμα, δηλαδή $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ επειδή $9 \cdot 4 = 3 \cdot 12$
Αν **πολλαπλασιάσουμε** τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό, προκύπτει **ισοδύναμο** με το αρχικό κλάσμα.	$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$
Αν **διαιρέσουμε** τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό, προκύπτει **ισοδύναμο** κλάσμα. Αυτή η τεχνική λέγεται **απλοποίηση** του κλάσματος.	$\frac{7}{28} = \frac{7 \cdot 7}{28 \cdot 7} = \frac{1}{4}$
Αν ένα κλάσμα δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει αριθμός, εκτός από το 1, που να είναι κοινός διαιρέτης του αριθμητή και του παρονομαστή), το κλάσμα λέγεται **ανάγωγο**.	Το κλάσμα $\frac{4}{9}$ είναι ανάγωγο. (Δεν υπάρχει κοινός διαιρέτης του 4 και του 9)

Εφαρμογή ***Δημιουργώ ισοδύναμα κλάσματα***

Να εκφράσετε με ισοδύναμα κλάσματα τι μέρος του μήνα είναι οι 6 μέρες. Ποιο κλάσμα από όσα δημιουργήσατε είναι ανάγωγο;

Λύση:

Το ένα κλάσμα είναι το $\frac{6}{30}$, που δηλώνει ακριβώς το μέρος του όλου.

Μπορώ να απλοποιήσω με το 3 για να γίνει το κλάσμα δεκαδικό: $\frac{6:3}{30:3} = \frac{\quad}{\quad}$

και να πολλαπλασιάσω κατόπιν με το δέκα: $\frac{2 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{\quad}{\quad}$ ή να απλοποιήσω το αρχικό κλάσμα

με το έξι: $\frac{6:6}{30:6} = \frac{\quad}{\quad}$ για να γίνει ανάγωγο.

Απάντηση: Οι 6 μέρες είναι τα ___ , ή ___ , ή τα ___ , ή αλλιώς το ___ του μήνα.

Ανάγωγο κλάσμα είναι το ___ .

*Αυτά είναι **όλα** τα ισοδύναμα κλάσματα που μπορούμε να δημιουργήσουμε; Συζητήστε το.*

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

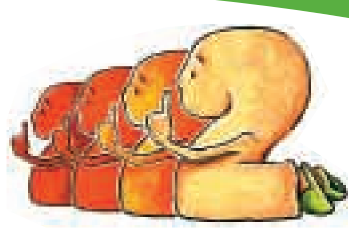
Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **ισοδύναμα κλάσματα,** και **ανάγωγα κλάσματα**. Εξήγησε τη σημασία τους με ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	**Λάθος**
Στη μέθοδο «χιαστί» πολλαπλασιάζω τους αριθμητές των κλασμάτων μεταξύ τους.	❐	❐
Ένα κλάσμα έχει άπειρα ισοδύναμα με αυτό κλάσματα.	❐	❐
Η διαίρεση των όρων του κλάσματος με το Μ.Κ.Δ. τους, οδηγεί σε ανάγωγο κλάσμα.	❐	❐

Κεφάλαιο 22ο

Σύγκριση – Διάταξη κλασμάτων



Πώς θα μπούμε στη σειρά;

Συγκρίνω ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα.
Διατάσσω τα κλάσματα κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.
Τοποθετώ τα κλάσματα στην αριθμογραμμή.
Μετατρέπω ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα.

Δραστηριότητα 1η

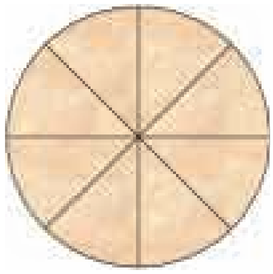
Πέντε φίλοι παρήγγειλαν τις δύο ίδιες πίτσες που φαίνονται στο σχήμα. Η μία πίτσα (α) ήταν χωρισμένη σε 8 κομμάτια και η άλλη (β) σε 6 κομμάτια.

- Από την πρώτη πίτσα έφαγαν: ο Βασίλης, ο Γιώργος και η Μαργαρίτα τα $\frac{4}{8}$, τα $\frac{3}{8}$ και το $\frac{1}{8}$ αντίστοιχα. Να συγκρίνεις τα μερίδιά τους και να τα γράψεις κατά αύξουσα σειρά χρησιμοποιώντας το σύμβολο < ανάμεσά τους.

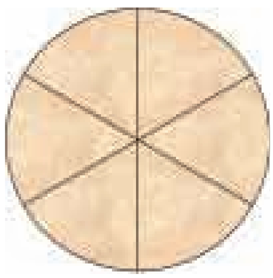
  ....

- Ο Γιώργος έφαγε τα $\frac{3}{8}$ από την πρώτη πίτσα και ο Σωτήρης τα $\frac{3}{6}$ από τη δεύτερη. Ποιος έφαγε περισσότερο;
- Αν συγκρίνουμε τα μερίδια του Γιώργου, ο οποίος έφαγε τα $\frac{3}{8}$ από την πρώτη πίτσα και του Λευτέρη ο οποίος έφαγε τα $\frac{2}{6}$ από τη δεύτερη, μπορούμε εύκολα να βρούμε ποιο είναι το μεγαλύτερο;
- Τι μπορούμε να κάνουμε για να τα συγκρίνουμε; ....

  ....



(α)

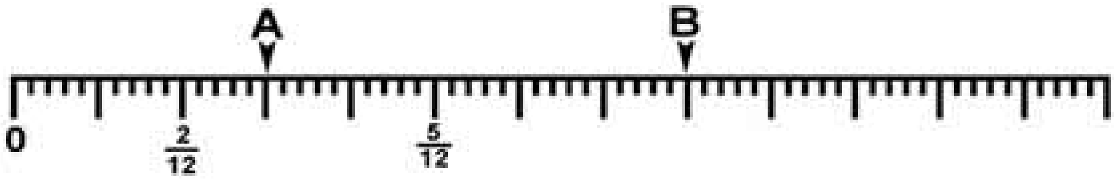


(β)

Δραστηριότητα 2η

- Αφού πρώτα διατάξεις τα κλάσματα $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{1}{12}$ και $\frac{11}{12}$ κατά αύξουσα σειρά, τοποθέτησε αυτά που αντιστοιχούν στα σημεία Α και Β στην παρακάτω αριθμογραμμή: ....

  ....



- Ποια διαδικασία μας επιτρέπει να βρούμε ποιο κλάσμα παρεμβάλλεται ανάμεσα σε δύο άλλα;

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να συγκρίνουμε τα κλάσματα και να τα διατάξουμε κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά.

Σύγκριση κλασμάτων	**Παραδείγματα**
Ανάμεσα σε δύο ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή.	$\frac{9}{24} > \frac{6}{24}$
Για να **συγκρίνουμε ετερώνυμα** κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα.	$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ $\quad \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ $\quad \frac{8}{12} < \frac{9}{12}$
Ειδικά για τα ετερώνυμα κλάσματα που έχουν τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο με το μικρότερο παρονομαστή.	$\frac{2}{15} > \frac{2}{18}$
Τα ετερώνυμα κλάσματα μπορούν να μετατραπούν σε ισοδύναμά τους ομώνυμα, αν πολλαπλασιαστούν οι όροι τους με τον κατάλληλο αριθμό.	$\frac{3}{5}, \frac{1}{2}$ Ε.Κ.Π. (5,2) = 10 $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}, \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$

Εφαρμογή 1η ***Συγκρίνω κλάσματα με το νου***

Για μερικές κατηγορίες κλασμάτων μπορούμε να κάνουμε προσεγγιστικούς υπολογισμούς με το νου. Ας συγκρίνουμε με το νου τα κλάσματα $\frac{25}{27}, \frac{1}{18}$, και $\frac{17}{36}$.

Λύση

Το κλάσμα $\frac{25}{27}$ εκφράζει έναν αριθμό που είναι **κοντά στο 1**, γιατί ο αριθμητής του είναι περίπου ίσος με τον παρονομαστή του. Το κλάσμα εκφράζει έναν αριθμό που είναι **κοντά στο 0**, γιατί ο αριθμητής του είναι πολύ μικρότερος από τον παρονομαστή του. Το κλάσμα $\frac{17}{36}$ εκφράζει έναν αριθμό που είναι **κοντά στο** $\frac{1}{2}$, γιατί ο αριθμητής του είναι περίπου ίσος με το μισό του παρονομαστή του.

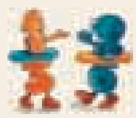
Εφαρμογή 2η ***Μετατρέπω ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα***

Να διατάξετε κατά φθίνουσα σειρά τα κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{5}{9}$ και $\frac{6}{15}$, αφού τα κάνετε ομώνυμα.

Λύση

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών με ταυτόχρονες διαδοχικές διαιρέσεις: Ε.Κ.Π.(2, 9, 15) = 2 • 3 • 3 • 5 = 90. Κατόπιν διαιρούμε το Ε.Κ.Π. με κάθε παρονομαστή, για να βρούμε με ποιον αριθμό θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε κλάσμα: 90 **:** 2 = 45,   90 **:** 9 = 10, 90 **:** 15 = 6

2	**9**	**15**	**2**
1	**9**	**15**	**3**
	3	**5**	**3**
	1	**5**	**5**
		1	



Πολλαπλασιάζουμε κάθε κλάσμα με τον κατάλληλο αριθμό:

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 45}{2 \cdot 45} = \frac{45}{90}, \qquad \frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 10}{9 \cdot 10} = \frac{50}{90}, \qquad \frac{6}{15} = \frac{6 \cdot 6}{15 \cdot 6} = \frac{36}{90}$

Απάντηση: Τα αρχικά κλάσματα μετατράπηκαν στα ισοδύναμά τους ομώνυμα και είναι: $\frac{50}{90} > \frac{45}{90} > \frac{36}{90}$

ή τα αρχικά κλάσματα ___ > ___ > ___ .

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σύγκριση και διάταξη **ομώνυμων** και **ετερώνυμων κλασμάτων**. Δώσε ένα δικό σου παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
$\frac{1}{10} < \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$	❐	❐
Για να μετατρέψω τα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα πολλαπλασιάζω τους όρους τους με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών τους.	❐	❐

Κεφάλαιο 23ο

Προβλήματα με πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Η σωστή ενέργεια!

Προσθέτω και αφαιρώ κλάσματα.
Λύνω απλά προβλήματα με δεκαδικούς, μεικτούς και κλάσματα ακολουθώντας μια σειρά από βήματα.

Μερικές φορές η παρουσία των κλασμάτων σε ένα πρόβλημα προκαλεί ανησυχία για το πώς θα το λύσουμε. Αν συμβεί αυτό, θυμηθείτε ότι το κλάσμα είναι ένας αριθμός και στη θέση του θα μπορούσε να είναι ένας φυσικός ή δεκαδικός αριθμός.

Δραστηριότητα 1η

Διαβάζοντας στην ιστοσελίδα της Δ.Ε.Η. (www.dei.gr) στοιχεία σχετικά με την παραγωγή ενέργειας για το 2003 διαπιστώσαμε ότι η ενέργεια που παράχθηκε στη χώρα μας από ανανεώσιμες πηγές ήταν πολύ μικρή. Παρακάτω παρουσιάζονται τα στοιχεία για την ενέργεια που παράχθηκε το 2003 σε θερμοηλεκτρικούς σταθμούς:

- Το 0,15 της ενέργειας παράχθηκε με τη χρήση πετρελαίου.
- Τα $\frac{9}{20}$ παράχθηκαν με τη χρήση λιγνίτη.
- Το $\frac{1}{4}$ παράχθηκε με τη χρήση φυσικού αερίου.
- Η υπόλοιπη ενέργεια παράχθηκε σε υδροηλεκτρικούς σταθμούς.
- Είναι εύκολο να υπολογίσουμε αμέσως αυτό το μέρος της ενέργειας; ....
- Τι πρέπει να κάνουμε πριν προχωρήσουμε στις πράξεις για την επίλυση του προβλήματος;

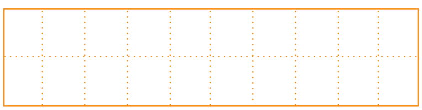
  ....

Δραστηριότητα 2η

Τα παιδιά θέλησαν να φυτέψουν στον κήπο του σχολείου φράουλες (ωριμάζουν στις αρχές Ιουνίου) και ρώτησαν αν υπάρχει καθόλου ελεύθερος χώρος. Ο δάσκαλος τους είπε: «Σωστή ενέργεια! Λοιπόν, το 0,1 του παρτεριού έχει γαρίφαλα, το $\frac{1}{4}$ έχει μαργαρίτες και τα $\frac{2}{5}$ έχουν γκαζόν. Αν υπάρχει ελεύθερος χώρος, είναι δικός σας!».

- Πώς θα βρούμε αν υπάρχει χώρος;..
- Γράψτε με τη σειρά τις ενέργειες που πρέπει να κάνουν τα παιδιά για να βρουν τη λύση στο πρόβλημά τους:..

  ....
- Κάντε τις πράξεις. Μετά χωρίστε το σχεδιάγραμμα του παρτεριού σε όσα μέρη πρέπει και βάψτε με κίτρινο το μέρος με τις μαργαρίτες, με μοβ το μέρος με τα γαρίφαλα, με πράσινο το μέρος με το γκαζόν και με κόκκινο το μέρος με τις φράουλες.



Οι δραστηριότητες αυτές μας βοηθούν να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων	**Παραδείγματα**
Για να **προσθέσουμε** ή να **αφαιρέσουμε ετερώνυμα** κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα.	$\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=\frac{15}{20}+\frac{4}{20}$
Προσθέτουμε ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.	$\frac{11}{18}+\frac{2}{18}=\frac{11+2}{18}=\frac{13}{18}$
Αφαιρούμε ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους.	$\frac{11}{18}-\frac{2}{18}=\frac{11-2}{18}=\frac{9}{18}$

Όταν πρέπει να λύσω ένα πρόβλημα που έχει κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς:

✓ **Ελέγχω** αν οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
✓ Αν δεν είναι στην ίδια μορφή, τους **μετατρέπω** σε αριθμούς μιας μορφής.
✓ **Αποφασίζω** ποιες πράξεις πρέπει να κάνω.
✓ **Εκτελώ** τις πράξεις και ελέγχω το αποτέλεσμα.

Εφαρμογή 1η

Η Μυρτώ κούρεψε τα $\frac{3}{5}$ του γκαζόν και ο αδερφός της ο Λευτέρης το $\frac{1}{4}$.
Κούρεψαν όλο το γκαζόν; Αν όχι, πόσο έμεινε;

Λύση

✓ Οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
✓ Αρκεί λοιπόν να τους προσθέσουμε για να δούμε αν το κλάσμα που θα προκύψει θα έχει αριθμητή και παρονομαστή ίσους. Αν ναι, τότε θα είναι ίσο με τη μονάδα, δηλαδή θα έχουν κουρέψει όλο το γκαζόν. Αν όχι, θα αφαιρέσουμε αυτό που θα βρούμε από το κλάσμα «μονάδα» για να βρούμε τη διαφορά τους:
✓ $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$ Ε.Κ.Π. (5, 4) = 20. Άρα: $\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4}+\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5}=\frac{12}{20}+\frac{5}{20}=\frac{17}{20}$. Άρα: $\frac{\quad}{\quad}-\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$.

Απάντηση: Κούρεψαν τα $\frac{17}{20}$ του γκαζόν και μένουν ακόμη — για κούρεμα.

Εφαρμογή 2η

Ένα δοχείο χωράει 3 λίτρα. Κάποια στιγμή έχει $1\frac{3}{4}$ λίτρα νερό. Πόσο νερό χρειάζεται ακόμα για να γεμίσει;

Λύση

✓ Οι αριθμοί του προβλήματος δεν είναι στην ίδια μορφή. Θα τους μετατρέψουμε σε κλάσματα ομώνυμα, με παρονομαστή το 4. Έτσι: $3=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=\frac{12}{4}$ και $1\frac{3}{4}=\frac{4}{4}+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$
✓ Τώρα θα αφαιρέσουμε το νερό που υπάρχει από τη συνολική χωρητικότητα του δοχείου για να βρούμε τη διαφορά τους: $\frac{12}{4}-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}$. Δηλαδή $\frac{4}{4}+\frac{1}{4}$ ή $1\frac{1}{4}$.

Απάντηση: Χρειάζεται ακόμη $1\frac{1}{4}$ λίτρα νερού για να γεμίσει.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την **πρόσθεση** και την **αφαίρεση κλασμάτων** καθώς και τη **λύση απλών προβλημάτων με κλάσματα**. Σχεδίασε ένα σύντομο πρόβλημα που να λύνεται έτσι.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	**Σωστό**	**Λάθος**
Η ισότητα: $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}=\frac{9}{10}$ *είναι σωστή.*	❐	❐
Για να λύσω ένα πρόβλημα που οι αριθμοί του είναι φυσικοί, δεκαδικοί ή κλάσματα πρέπει πρώτα να τους μετατρέψω όλους στην ίδια μορφή.	❐	❐

Προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων

Ό,τι κι αν κάνεις, εγώ θα πολλαπλασιάζομαι!

Πολλαπλασιάζω και διαιρώ κλάσματα.
Λύνω προβλήματα υπολογισμού του κλασματικού μέρους ενός ποσού.
Υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις που περιέχουν κλάσματα.

Η φράση «το κλάσμα ενός αριθμού» μπορεί να εννοηθεί ως ο πολλαπλασιασμός του κλάσματος με τον αριθμό αυτό. Για παράδειγμα, τα $\frac{3}{4}$ του 12 είναι $\frac{3}{4} \cdot 12$.

Δραστηριότητα 1η

Η μαμά σου έχει φτιάξει ένα μικρό ορθογώνιο κέικ, από το οποίο κόβεις το $\frac{1}{2}$. Από αυτό το κομμάτι τρως τα $\frac{3}{4}$. Αν προσπαθήσεις να υπολογίσεις με κλάσμα το μέρος που έφαγες, το κλάσμα αυτό θα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από τα κλάσματα $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$; ....

- Να σχεδιάσεις στο διπλανό σκίτσο το μέρος του ολόκληρου κέικ που έφαγες.
- Πόσο μέρος του κέικ έφαγες; ....
- Ποια πράξη θα κάνουμε για να βρούμε πόσο είναι τα $\frac{3}{4}$ του $\frac{1}{2}$; ....
- Είναι το κλάσμα αυτό μεγαλύτερο ή μικρότερο από τα $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{4}$; ....

Δραστηριότητα 2η

Πήγα σε ένα γαλακτοκομικό αγρόκτημα και αγόρασα γάλα σε ένα δοχείο 10 λίτρων. Το δοχείο δεν χωράει στο ψυγείο μου. Έτσι θέλω να το μεταγγίσω σε δοχεία των 2 λίτρων.

- Πόσα δοχεία χρειάζομαι; ....
- Γράψε την πράξη που έκανες: ....

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αγόρασα το $\frac{1}{2}$ λίτρο γάλα και θέλω να το μεταγγίσω σε μικρές ατομικές κανάτες του $\frac{1}{8}$ λίτρου για να τις σερβίρω με τον καφέ.

- Πόσες ατομικές κανάτες χρειάζομαι; ....
- Γράψε την πράξη που πρέπει να κάνεις: ....
- Γνωρίζεις ότι η διαίρεση και ο πολλαπλασιασμός είναι αντίστροφες πράξεις. Άρα, αντί να διαιρέσεις, μπορείς να πολλαπλασιάσεις με τον αντίστροφο αριθμό.
- Δοκίμασε τώρα να κάνεις την προηγούμενη πράξη αντιστρέφοντας το δεύτερο κλάσμα

  ....

- Είναι λογικό το αποτέλεσμα; ....

Οι δραστηριότητες αυτές μας οδηγούν στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων

Για να **πολλαπλασιάσουμε** κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.

Για να **διαιρέσουμε** δύο κλάσματα, αντιστρέφουμε τους όρους του δεύτερου κλάσματος και κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Παραδείγματα

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20}$ ή $\frac{3}{10}$

$\frac{5}{12} : \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{1} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 1} = \frac{15}{12}$ ή $1\frac{1}{4}$

Υπολογίζω μια αριθμητική παράσταση που έχει κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς

✓ **Εκτελώ** τις πράξεις από αριστερά προς τα δεξιά, με τη γνωστή σειρά (πρώτα δυνάμεις, πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις και μετά προσθέσεις, αφαιρέσεις).
Αν υπάρχουν παρενθέσεις, κάνω τις πράξεις πρώτα μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά.

✓ **Μετατρέπω** τους αριθμούς, σε όποια μορφή χρειάζεται για να κάνω πράξεις.

Εφαρμογή 1η ***Κλασματικό μέρος ενός ποσού***

Το κόστος ενός αυτοκινήτου για τον αντιπρόσωπο είναι τα $\frac{4}{5}$ της τιμής πώλησης. Το αυτοκίνητο πουλιέται 12.500 €. Να βρείτε πόσο κοστίζει στον αντιπρόσωπο.

Λύση

Μπορώ να υπολογίσω το κλασματικό μέρος ενός ποσού (τα $\frac{4}{5}$ του 12.500) με δύο τρόπους:

Α. Αναγωγή στην κλασματική μονάδα: Βρίσκω πρώτα το $\frac{1}{5}$ του 12.500 (12.500 : 5 = 2.500) και μετά βρίσκω τα $\frac{4}{5}$ (4 • 2500 = ...).

Β. Αρκεί να πολλαπλασιάσω το κλάσμα με το ποσό ($\frac{4}{5} \cdot 12500$ ....). Πολλαπλασιάζω κλάσμα με φυσικό αριθμό, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή του με τον αριθμό αυτό (σαν να ήταν ο αριθμός κλάσμα με παρονομαστή το 1): $\frac{4}{5} \cdot 12500 = \frac{4 \cdot 12500}{5} = \frac{50000}{5} =$ ....

Απάντηση: Το αυτοκίνητο κοστίζει στον αντιπρόσωπο .... €.

Εφαρμογή 2η ***Μεικτές αριθμητικές παραστάσεις***

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 0,2 + \frac{4}{5}\right) : \left(3 - 1\frac{1}{3}\right)$

Λύση - Απάντηση

✓ Κάνω πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, με τη σειρά που πρέπει:

$\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 0,2 + \frac{4}{5}\right) : \left(3 - 1\frac{1}{3}\right) = \left(\text{—} + 0,2 + \frac{4}{5}\right) : \text{....} \text{—}$

✓ Μετατρέπω το δεκαδικό και το μεικτό αριθμό σε κλάσματα, για να συνεχίσω τις πράξεις:

(— + — + —) : — = ...

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τον **πολλαπλασιασμό** και τη **διαίρεση κλασμάτων** και τον **υπολογισμό μεικτών αριθμητικών παραστάσεων.** Σχεδίασε ένα σύντομο πρόβλημα που να λύνεται έτσι.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:	Σωστό	Λάθος
Η ισότητα: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{18}{8}$ *είναι σωστή.*	❐	❐
Για να βρούμε το μισό του $\frac{4}{5}$ *αρκεί να το πολλαπλασιάσουμε με το* $\frac{1}{2}$.	❐	❐

Ανακεφαλαίωση

Αριθμοί και πράξεις

Δίνω... λογαριασμό

Αριθμοί	• **Φυσικοί αριθμοί**	• 0 1 2 3 4 ...
	• **Δεκαδικοί αριθμοί**	• 0,1 1,05 80,5 100,2 0,03 ...
	Αξία θέσης	Η διαφορετική αξία που αποκτά ένα ψηφίο ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται στον αριθμό.
Πράξεις	• **Πρόσθεση**	• $5 + 3 = 3 + 5$ • $(5 + 3) + 7 = 5 + (3 + 7)$ ιδιότητες της πρόσθεσης
	• **Αφαίρεση**	• $7 - 3 = 4$ $4 + 3 = 7$ $7 - 4 = 3$ αντίστροφη πράξη της πρόσθεσης
	• **Πολλαπλασιασμός**	• $8 \cdot 6 = 6 \cdot 8$ • $(8 \cdot 6) \cdot 5 = 8 \cdot (6 \cdot 5)$ • $8 \cdot (6 + 5) = 8 \cdot 6 + 8 \cdot 5$ • $8 \cdot (6 - 5) = 8 \cdot 6 - 8 \cdot 5$ ιδιότητες του πολλαπλασιασμού
	• **Διαίρεση**	• τέλεια $\Delta : \delta = \pi$ $\Delta : \pi = \delta$ $\pi \cdot \delta = \Delta$ αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού • ατελής $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$
	Σειρά των πράξεων	• παρενθέσεις - πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις - προσθέσεις και αφαιρέσεις
Ειδικά θέματα	• **Διαιρέτες**	• Οι αριθμοί που διαιρούν έναν αριθμό
	• **Μ.Κ.Δ.**	• Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες
	• **Πρώτοι αριθμοί**	• Αριθμοί με μόνους διαιρέτες το 1 και τον εαυτό τους
	• **Παραγοντοποίηση αριθμού**	• Ανάλυση του αριθμού σε γινόμενο πρώτων αριθμών
	• **Πολλαπλάσια**	• α, 2α, 3α, 4α, 5α, ...
	• **Ε.Κ.Π.**	• Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια
	• **Δυνάμεις**	• $5^{\alpha} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot ... \cdot 5}_{\alpha \text{ φορές}}$
	• **Έκφραση αριθμού με τη βοήθεια δύναμης του 10**	• $6.000.000.000 = 6 \cdot 10^9$
Κλάσματα	• **Κλασματικοί αριθμοί** ως μέρος του όλου ως πηλίκο διαίρεσης	• Οι αριθμοί που γράφονται $\frac{\alpha}{\beta}$ (ο αριθμός $\beta \neq 0$) τα 3 από τα 5 είναι τα $\frac{3}{5}$ $3 : 5 = \frac{3}{5}$
	• **Ισοδύναμα κλάσματα**	• $\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$

1η Άσκηση

Δείξε πάνω στην αριθμογραμμή με μια γραμμή τη σωστή θέση για κάθε καρτελάκι.

2η Άσκηση

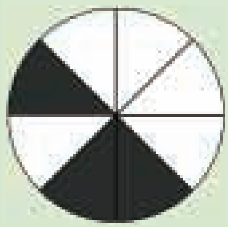
Η πρώτη πράξη στη διπλανή κάρτα δηλώνει ότι 17 • 6 = 102.
Με αυτή τη βοήθεια πώς μπορείς να υπολογίσεις με το νου
το αποτέλεσμα της δεύτερης πράξης; Να εξηγήσεις τη σκέψη σου.

17 • 6 = 102
19 • 6 =

....
....
....
....
....
....

3η Άσκηση

Να γράψεις με κλάσμα και με δεκαδικό αριθμό το σκιασμένο μέρος του κύκλου.



Πρόβλημα

Να γράψετε με την ομάδα σου ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{1}{5}$ και να το λύσετε.

....
....
....
....
....
....
....

Λύση

Απάντηση: ....