

Λόγοι - Αναλογίες

ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΙΤΛΟΣ

ΣΕΛΙΔΑ

30. Σου δίνουμε το... λόγο μας	Λόγος δυο μεγεθών	75
31. Από το λόγο στην αναλογία... τι γλυκό!	Από τους λόγους στις αναλογίες	77
32. Αναλογία; Χιαστί θα βρω το x!	Αναλογίες	79
33. Εκφράζομαι... ακριβώς!	Σταθερά και μεταβλητά ποσά	81
34. Όταν ανεβαίνω... ανεβαίνεις	Ανάλογα ποσά	83
35. Η εύκολη λύση!	Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά	85
36. Μαζί δεν κάνουμε και χάρια δεν μπορούμε!	Αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά	87
37. Παίρνοντας αποφάσεις!	Λύνω προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά	89
38. Η απλή μέθοδος των τριών!	Η απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά	91
39. Είναι απλό όταν ξέρω τις τρεις τιμές!	Η απλή μέθοδος των τριών στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά	93
40. Συγκρίνω (πο)σοστά %	Εκτιμώ το ποσοστό	95
41. Παίζοντας με τα ποσοστά	Βρίσκω το ποσοστό	97
42. Ποσοστά της αλλαγής	Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω την τελική τιμή	99
43. Από πού έρχομαι;	Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω την αρχική τιμή	101
44. Για να μη λέμε πολλά ...	Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό	103
Όταν μιλάμε συμβολικά	Ανακεφαλαίωση για τη θεματική ενότητα 3: Λόγοι - Αναλογίες	105



Λόγοι - Αναλογίες

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τους λόγους και τις αναλογίες. Ανάμεσα στις πρώτες μαθηματικές ιδέες των προϊστορικών ανθρώπων είναι οι αναλογίες και η συμμετρία. Οι πρωτόγονες ζωγραφιές στα σπήλαια μαρτυρούν την ύπαρξη αυτών των ιδεών. Οι ζωγραφιές αυτές έχουν σχεδιαστεί από επιδέξιους τεχνίτες οι οποίοι στην προσπάθειά τους να ερμηνεύσουν το περιβάλλον απόδωσαν εικόνες ζώων, κυνηγών, γεωμετρικών σχημάτων κ.ά. σε μεγέθη όχι τυχαία αλλά σε αναλογία με την πραγματικότητα.

Όπως τότε, έτσι και σήμερα η μελέτη του περιβάλλοντος έδωσε στον άνθρωπο τα ερεθίσματα ώστε να συστηματοποιήσει τις σκέψεις του και να τις μετατρέψει σε γνώση. Η γνώση αυτή αποτελεί το εργαλείο που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για να ερμηνεύει το περιβάλλον του, αλλά ταυτόχρονα είναι και η βάση που του επιτρέπει να επιδρά σε αυτό.



Κεφάλαιο 30ό

Λόγος δυο μεγεθών



Σου δίνουμε το ... λόγο μας



- Συγκρίνω μεγέθη.
- Μελετώ τη σχέση δύο μεγεθών.
- Εκφράζω τη σχέση δύο μεγεθών με λόγο.
- Αναγνωρίζω τους αντίστροφους λόγους.

Δραστηριότητα 1η

Οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου Δοξάτου ερεύνησαν τις αιτίες της αυξημένης κίνησης στους δρόμους γύρω από το σχολείο τους. Βρήκαν τα στοιχεία για τον αριθμό των αυτοκινήτων και τον αριθμό των κατοίκων της πόλης τους για τα έτη 1980 και 2000 και τα κατέγραψαν στους παρακάτω πίνακες:



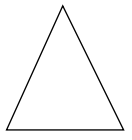
Έτος 1980	Αυτοκίνητα	345
	Κάτοικοι	3.450

Έτος 2000	Αυτοκίνητα	850
	Κάτοικοι	3.150

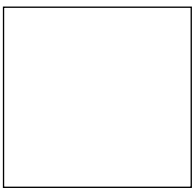
- Παρατηρώντας τα στοιχεία στους πίνακες, σχολιάστε στην ομάδα σας πόσο αυξήθηκε ο αριθμός των αυτοκινήτων μέσα στην τελευταία εικοσαετία και διατυπώστε τα συμπεράσματά σας.
- Συζητήστε τη σχέση του αριθμού των αυτοκινήτων με τον αριθμό των κατοίκων.
- Γιατί σήμερα υπάρχει η ανάγκη του σχολικού τροχονόμου;

Δραστηριότητα 2η

Συμπλήρωσε στους πίνακες την περίμετρο κάθε σχήματος:



Μήκος πλευράς ισόπλευρου τριγώνου (εκατοστά)	3
Περίμετρος τριγώνου (εκατοστά)	



Μήκος πλευράς τετραγώνου (εκατοστά)	5
Περίμετρος τετραγώνου (εκατοστά)	

- Πώς προκύπτει ο αριθμός στη δεύτερη γραμμή και στις δύο περιπτώσεις;.....
- Η σχέση ανάμεσα στο μήκος της πλευράς και την περίμετρο μπορεί να εκφραστεί και ως κλάσμα. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία από τους παραπάνω πίνακες να γράψεις το κλάσμα αυτό για:
- Το τρίγωνο: το τετράγωνο:



Σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητο να συγκρίνουμε δύο μεγέθη και να μελετήσουμε τη σχέση τους:

Λόγος

Το αποτέλεσμα της σύγκρισης δύο μεγεθών που εκφράζεται ως κλάσμα ονομάζεται **λόγος**. Το κλάσμα αυτό έχει αριθμητή το ένα μέγεθος και παρονομαστή το άλλο.

Παραδείγματα

Ο πύργος του Άιφελ έχει ύψος περίπου 300 μέτρα, ενώ ο Λευκός Πύργος περίπου 30 μέτρα.

Ο λόγος των υψών τους είναι $\frac{300}{30}$ ή $\frac{30}{3}$ ή 10.

(Δηλαδή ο πρώτος είναι 10 φορές ψηλότερος.)



Εφαρμογή 1η

Στην έκτη τάξη φοιτούν 28 μαθητές. Υπάρχουν 14 θρανία.

α. Ποιος είναι ο λόγος των μαθητών προς τα θρανία;

β. Ποιος είναι ο λόγος των θρανίων προς τους μαθητές;

Λύση - Απάντηση:

α. Ο λόγος $\frac{\text{μαθητές}}{\text{θρανία}}$ είναι $\frac{2}{1}$, δηλαδή απλοποιώντας $\frac{2}{1}$.

Με άλλα λόγια, αντιστοιχούν 2 μαθητές σε 1 θρανίο.

β. Ο λόγος $\frac{\text{θρανία}}{\text{μαθητές}}$ είναι $\frac{1}{2}$, δηλαδή απλοποιώντας $\frac{1}{2}$.

Με άλλα λόγια, αντιστοιχεί 1 θρανίο σε 2 μαθητές.

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι $\frac{2}{1}$ και $\frac{1}{2}$ είναι αντίστροφοι γιατί $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = \dots$



Εφαρμογή 2η

Τα παιδιά έκαναν μια μικρή έρευνα σχετικά με την κατανάλωση ενέργειας των αυτοκινήτων και βρήκαν ότι ένας πολύ καλός λόγος κατανάλωσης προς απόσταση είναι 1

λίτρο προς 25 χιλιόμετρα ($\frac{1}{25}$).

Ο Νικόλας ρώτησε τον μπαμπά του πόσα περίπου χιλιόμετρα κάνει το αυτοκίνητό τους με ένα ντεπόζιτο βενζίνη και εκείνος του είπε πως συνήθως με 50 λίτρα κάνει 400 χιλιόμετρα. Είναι οικονομικό το αυτοκίνητό τους;

Λύση:

Ο Νικόλας βρίσκει το λόγο $\frac{\text{κατανάλωση (λίτρα)}}{\text{απόσταση (χμ)}}$ του αυτοκινήτου τους: $\frac{50}{400}$.

Απλοποιεί και βρίσκει $\frac{1}{8}$.

Απάντηση: Το αυτοκίνητό τους έχει πολύ μικρότερο λόγο κατανάλωσης προς απόσταση (με 1 λίτρο ταξιδεύει μόνο 8 χιλιόμετρα, πολύ λιγότερα από τα 25 χιλιόμετρα).

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **λόγος**. Μπορείς να εξηγήσεις τη σημασία του με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

❖ Ο λόγος εκφράζει τη σχέση δύο μεγεθών.

❖ Σε κάθε λόγο ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή.

❖ Οι λόγοι $\frac{7}{8}$ και $\frac{8}{7}$ είναι αντίστροφοι.

Κεφάλαιο 31ο

Από τους λόγους στις αναλογίες

Από το λόγο στην αναλογία ... τι γλυκό!



Συγκρίνω δύο λόγους.
Αναγνωρίζω την ισότητα δύο λόγων.
Σχηματίζω αναλογίες.



Δραστηριότητα 1η

Στο πλαίσιο του προγράμματος «Αγωγή Υγείας» οι μαθητές της Στ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου Φαρκαδόνας ασχολήθηκαν με τη θερμιδική αξία των γλυκών. Διαβάζοντας τις ετικέτες σε δύο διαφορετικές σοκολάτες διαπίστωσαν ότι, η πρώτη σοκολάτα, βάρους 50 γραμμαρίων, δίνει 250 θερμίδες, ενώ η δεύτερη σοκολάτα, βάρους 100 γραμμαρίων, δίνει 500 θερμίδες.

- Συμπλήρωσε τον πίνακα όπως έκαναν τα παιδιά:

Βάρος σοκολάτας σε γραμμάρια	50	100
Θερμιδική αξία		



- Σύγκρινε τους δύο λόγους.
- Τι παρατηρείς;
- Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για τη θερμιδική αξία (θερμίδες / γραμμάριο) στις δύο σοκολάτες;

Δραστηριότητα 2η

Για την ίδια εργασία τα παιδιά βρήκαν ότι το ένα γραμμάριο σοκολάτας έχει 5 θερμίδες και κατασκεύασαν τον πίνακα θερμίδων της σοκολάτας.

Βάρος σοκολάτας σε γραμμάρια	1	2	3	4	5
Θερμίδες	5				



- Συμπλήρωσε τον πίνακα
- Τι παρατηρείς στους λόγους που σχηματίζονται;
- Πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης γραμμής από τους αριθμούς της πρώτης;

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές είναι αναγκαίο να μελετάμε τη σχέση (το λόγο) δύο μεγεθών σε διαφορετικές τιμές.

Παραδείγματα

Αναλογία

Όταν συγκρίνοντας δύο λόγους διαπιστώσουμε ότι είναι ίσοι μεταξύ τους, λέμε ότι αποτελούν μια **αναλογία**.

Οι λόγοι $\frac{1}{5}$ και $\frac{2}{10}$ σχηματίζουν αναλογία γιατί

$$\text{είναι ίσοι } \left(\frac{1}{5} = \frac{2}{10} \right)$$

Για να σχηματίσω αναλογία από ένα λόγο, αρκεί να φτιάξω έναν άλλο λόγο που να είναι ίσος με τον πρώτο, όπως στα κλάσματα (πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας και τους δύο όρους με κάποιον αριθμό).



Εφαρμογή 1η

Από 9 πορτοκάλια βγάζουμε 3 ποτήρια χυμό. Από 18 πορτοκάλια βγάζουμε 6 ποτήρια χυμό. Οι λόγοι πορτοκαλιών προς ποτήρια χυμού στις δύο περιπτώσεις σχηματίζουν αναλογία;

Λύση:

Οι λόγοι $\frac{\text{πορτοκάλια}}{\text{ποτήρια με χυμό}}$ $\frac{9}{3}$, $\frac{18}{6}$ είναι ίσοι γιατί $\frac{9 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{18}{6}$.

Απάντηση: Οι λόγοι είναι ίσοι. Άρα σχηματίζουν αναλογία.



Εφαρμογή 2η

Για ένα πετυχημένο ρόφημα σοκολάτα η μαμά βάζει 1 κουταλιά κακάο και 2 κουταλιές ζάχαρη με μία κούπα γάλα. Για να έχουμε την ίδια αναλογία όταν έρθουν τρεις φίλοι μας, πόσες κουταλιές κακάο και πόσες κουταλιές ζάχαρη πρέπει να βάλουμε;

Λύση:

Ο λόγος $\frac{\text{κακάο}}{\text{ζάχαρη}}$ στο ρόφημα είναι $\frac{1}{2}$ για μία κούπα γάλα.

Για να φτιάξουμε ένα λόγο που να αποτελεί αναλογία με το $\frac{1}{2}$ για 3 κούπες γάλα, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους του πρώτου λόγου με το 3, δηλαδή $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$.

Απάντηση: Στις 3 κούπες γάλα αντιστοιχούν κουταλιές κακάο προς κουταλιές ζάχαρη.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αναλογία**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- ❖ Η αναλογία εκφράζει την ισότητα δύο λόγων.
- ❖ Σε κάθε αναλογία οι παρονομαστές είναι ίσοι.
- ❖ Οι λόγοι $\frac{2}{9}$ και $\frac{9}{2}$ αποτελούν αναλογία.

Σωστό	Λάθος
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Αναλογία; «Χιαστί» θα βρω το x!

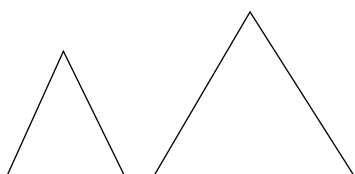


Βρίσκω τη σχέση των όρων της αναλογίας.
Υπολογίζω τον άγνωστο όρο της αναλογίας.



Δραστηριότητα 1η

- Συμπλήρωσε τους αριθμούς του πίνακα:



Πλευρά ισόπλευρου τριγώνου	1	2
Περίμετρος τριγώνου		

- Σύγκρινε τους δύο λόγους.
- Πώς προκύπτει ο δεύτερος λόγος από τον πρώτο;
- Πολλαπλασίασε τους αριθμούς που βρίσκονται στο ίδιο χρώμα.
- Σύγκρινε τα δύο γινόμενα που βρήκες. Τι παρατηρείς;



Δραστηριότητα 2η

Τρεις μήνες σύνδεση στο Internet κοστίζουν 27€. Οι δώδεκα μήνες κοστίζουν €.

- Συμπλήρωσε τον αριθμό στον πίνακα:



Διάρκεια σύνδεσης	3	12
Κόστος	27	



- Μπορείς εύκολα να συγκρίνεις τους δύο λόγους;
- Δοκίμασε τη μέθοδο του πολλαπλασιασμού χιαστί.

.....

- Τι παρατηρείς για τα δύο γινόμενα;

.....

Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε:

Σταυρωτά γινόμενα

Πολλαπλασιάζοντας «χιαστί» τους όρους μιας αναλογίας τα γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα. Τα γινόμενα αυτά λέγονται **σταυρωτά γινόμενα**.

Παραδείγματα

Στην αναλογία $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ τα σταυρωτά γινόμενα

είναι: $4 \cdot 3 = 12$

$6 \cdot 2 = 12$



Εφαρμογή 1η

Ένας φούρναρης ανακάτεψε 36 κιλά αλεύρι σιταριού με 12 κιλά αλεύρι καλαμποκιού για να φτιάξει ψωμί ανάμεικτο. Την επόμενη μέρα, για να κάνει περισσότερα ψωμιά, ανακάτεψε 54 κιλά αλεύρι σιταριού με 18 κιλά αλεύρι καλαμποκιού.

Το ανάμεικτο ψωμί είχε την ίδια αναλογία συστατικών τις δύο μέρες;

Λύση:

Σχηματίζω τους λόγους: $\frac{\text{αλεύρι σιταριού}}{\text{αλεύρι καλαμποκιού}}$ είναι τη μια μέρα $\frac{36}{12}$ και την άλλη $\frac{54}{18}$.

Για να διαπιστώσω αν υπάρχει αναλογία σχηματίζω τα σταυρωτά γινόμενα:

$36 \cdot 18 = \dots\dots\dots$ και $12 \cdot 54 = \dots\dots\dots$

Διαπίστωσα ότι είναι ίσα. Άρα $\frac{36}{12} = \frac{54}{18}$, δηλαδή οι λόγοι αποτελούν αναλογία.

Απάντηση: Το ανάμεικτο ψωμί και των δύο ημερών έχει την ίδια αναλογία συστατικών.



Εφαρμογή 2η

Για να φτιάξουμε καρυδόπιτα χρειαζόμαστε 12 αυγά και 8 κούπες ζάχαρη. Αν έχουμε μόνο 9 αυγά, πόσες κούπες ζάχαρη πρέπει να βάλουμε για να έχει το γλυκό την ίδια αναλογία;

Λύση:

Για να σχηματίσω αναλογία, πρέπει να έχω δύο ίσους λόγους. Ο λόγος $\frac{\text{αυγά}}{\text{ζάχαρη}}$ στη συνταγή είναι $\frac{12}{8}$. Αφού η ποσότητα της ζάχαρης είναι άγνωστη, τη συμβολίζω με x . Άρα ο λόγος των αυγών που έχω προς τη ζάχαρη που χρειάζομαι είναι $\frac{9}{x}$.

1. Σχηματίζω την αναλογία: $\frac{12}{8} = \frac{9}{x}$
2. Εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα: $12 \cdot x = 8 \cdot 9$
3. Κάνω τον πολλαπλασιασμό: $12 \cdot x = \dots\dots\dots$
4. Λύνω την εξίσωση: $x = \dots\dots\dots$ Άρα $x = \dots$

Απάντηση: Πρέπει να βάλουμε $\dots\dots$ κούπες ζάχαρη.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **σταυρωτά γινόμενα**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

❖ Δύο λόγοι αποτελούν αναλογία αν τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.

❖ Σε δύο λόγους πάντοτε τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.

Κεφάλαιο 33ο

Σταθερά και μεταβλητά ποσά

Εκφράζομαι ... ακριβώς!



Μελετώ την έννοια του ποσού.
Διακρίνω τα ποσά από τις αντίστοιχες τιμές τους.
Συγκρίνω και αναγνωρίζω τα σταθερά και τα μεταβλητά ποσά.



Δραστηριότητα 1η

Στο Καρλόβασι, τα παιδιά της Στ' τάξης ανέβασαν ένα θεατρικό έργο. Στις πρόβες τα παιδιά σημείωσαν κάποιες φράσεις:

- «Δώσε ένα κομμάτι από τη δόξα των προγόνων για να γίνει διπλή η περηφάνια μου»
- «Με πόσο πάθος και αρετή πολέμησαν για λίγη ελευθερία!»
- «Οι πολιορκητές απείχαν από το Μεσολόγγι 200 μέτρα»
- «Οι πολιορκούμενοι είχαν τεράστια αποθέματα ανδρείας και θάρρους»
- «Σαράντα πέντε άλογα και χίλιοι πεζοπόροι»
- «Ταλαιπωρημένα άλογα και κουρασμένοι πεζοπόροι»

- Ποιες από τις φράσεις των παιδιών εκφράζουν ποσά (μπορούν να μετρηθούν);
- Τι παρατηρείς για τα άλογα και τους πεζοπόρους στις δύο τελευταίες φράσεις;
- Σκεφτείτε στην ομάδα σας και παρουσιάστε τρεις φράσεις που εκφράζουν ποσά και τρεις που δεν εκφράζουν ποσά.



Δραστηριότητα 2η

Όπως οι άνθρωποι, έτσι και τα ποσά έχουν όνομα κι επίθετο!

Κάποιοι άνθρωποι είναι τόσο γνωστοί που δεν χρειάζεται να πούμε το όνομα και το επίθετό τους για να καταλάβουμε σε ποιον αναφερόμαστε. Λέμε για παράδειγμα, ο Μπετόβεν, ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης. Με τον ίδιο τρόπο κάποια ποσά, όπως το βάρος, το μήκος, το πλάτος, το πλήθος, η θερμοκρασία κ.ά. είναι τόσο γνωστά ώστε δεν αναφέρονται αλλά εννοούνται. Έτσι, όταν λέμε «χίλιοι πεζοπόροι» εννοούμε «το πλήθος των πεζοπόρων ήταν χίλιοι».

Αντιστοίχισε τη φράση με το ποσό στα δεξιά και συμπλήρωσε την τιμή του.

ΦΡΑΣΗ
Σαράντα πέντε άλογα
Το θερμόμετρο δείχνει 9 βαθμούς
Ο Γιάννης είναι 1,55 μ.
Τα κύματα ήταν ένα μέτρο
Ένα κιλό ψωμί
Άνεμος 7 μποφόρ
Τρία μήλα
Τρία κιλά μήλα

ΠΟΣΟ	ΤΙΜΗ
Το ύψος του Γιάννη	
Το ύψος των κυμάτων	
Η θερμοκρασία	
Το πλήθος των αλόγων	
Η ένταση του ανέμου	
Το βάρος του ψωμιού	
Το βάρος των μήλων	
Το πλήθος των μήλων	

Διαβάστε τη φράση «Πάχυνα! Η ζυγαριά δείχνει πενήντα κιλά!» και βρείτε ποιο είναι το **ποσό** και ποια η **τιμή** του.

Ποσό..... Τιμή.....



Στην καθημερινή μας ζωή συναντάμε έννοιες που δεν είναι δυνατό να μετρηθούν και τις αντιλαμβανόμαστε υποκειμενικά – διαισθητικά (π.χ. καλό / κακό, γλυκό / πικρό, θαρραλέος / φοβητσιάρης κ.ά.). Συναντάμε όμως και έννοιες που μπορούν να μετρηθούν.

Ποσά

Οι έννοιες που μπορούν να μετρηθούν και επομένως να εκφραστούν με συγκεκριμένο αριθμό λέγονται **ποσά**.

Υπάρχουν ποσά **σταθερά**, δηλαδή έχουν πάντοτε την ίδια τιμή και ποσά **μεταβλητά**, τα οποία μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές.

Παραδείγματα

Η αίθυσά μας είναι 55 τετραγωνικά μέτρα. (το ποσό είναι το εμβαδό της αίθουσας)

Δουλεύω 8 ώρες την ημέρα. (χρονική διάρκεια)

Η απόσταση Αθήνας - Θεσσαλονίκης είναι σταθερό ποσό.

Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο σε 1 ώρα είναι μεταβλητό ποσό (εξαρτάται από την ταχύτητά του).



Εφαρμογή Διακρίνω τα σταθερά από τα μεταβλητά ποσά

- ❖ Σκεφτείτε στην ομάδα και παρουσιάστε ποσά μεταβλητά και ποσά που παραμένουν σταθερά.
- ❖ Συζητήστε πώς μεταβάλλεται ένα ποσό (τι το επηρεάζει;).

Παράδειγμα απάντησης:

Στον πίνακα που ακολουθεί, σημειώνω στη στήλη **ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΙΜΗ** την τιμή για τα ποσά που παραμένουν **σταθερά** και για τα ποσά που **μεταβάλλονται** σημειώνω τον παράγοντα που τα επηρεάζει στη στήλη **ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ...**



ΠΟΣΑ	ΣΤΑΘΕΡΟ/ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ	ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΙΜΗ	ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ...
Η θερμοκρασία που παγώνει το καθαρό νερό	Σταθερό βαθμοί	—
Το ύψος των κυμάτων της θάλασσας.	Μεταβλητό	—	την ένταση του ανέμου
Το ύψος του Ολύμπου.	Σταθερό	2.917 μ.	—
Το άθροισμα των γωνιών τετραγώνου.	Σταθερό°	—
Η κατανάλωση ενός αυτοκινήτου.	Μεταβλητό	—	την ταχύτητά του
Τα έσοδα του κυλικείου του σχολείου.	Μεταβλητό	—	τις πωλήσεις του
Ο λογαριασμός του τηλεφώνου.	Μεταβλητό	—	τις μονάδες που έγιναν
Το κόστος της τηλεφωνικής μονάδας.	Σταθερό	0,02 €	—
Η θερμοκρασία σήμερα.	Μεταβλητό	—	την ώρα, τον άνεμο κ.ά.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τις έννοιες **ποσό** και **τιμή**. Μπορείς να τις εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα; Δώσε παραδείγματα **σταθερών** και **μεταβλητών** ποσών.



Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

- ❖ Η Στ' τάξη έχει 18 μαθητές. Οι μαθητές είναι το ποσό.
- ❖ Ο Λευτέρης είναι **άριστος** μαθητής (εκφράζει ποσό).
- ❖ Ο Λευτέρης είναι **12** ετών (εκφράζει ποσό).
- ❖ **Σταθερά** είναι τα ποσά που εκφράζονται με διάφορες τιμές.

Κεφάλαιο 34ο

Ανάλογα ποσά

Όταν ανεβαίνω... ανεβαίνεις



Μελετώ την έννοια των ανάλογων ποσών.
Συγκρίνω ποσά.
Αναγνωρίζω τα ανάλογα ποσά.

Δραστηριότητα 1η

Για τις ανάγκες του σχολικού συνεταιρισμού τα παιδιά της Στ' τάξης θέλησαν να κάνουν πίνακα με τις ποσότητες και τις τιμές για τους χυμούς του κυλικείου του συνεταιρισμού.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ				
Ποσότητα χυμού (κουτιά)	1	2	4	8	16
Αξία σε €	2	4	8	16	32



- Από τι εξαρτάται η αξία των χυμών σε κάθε περίπτωση;
- Πώς προκύπτει η αξία για κάθε ποσότητα;
- Σύγκρινε τους λόγους που σχηματίζονται. Τι παρατηρείς;

.....
.....

Δραστηριότητα 2η

Το τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα 80 χιλιόμετρα την ώρα.



Μπορείς να υπολογίσεις τα χιλιόμετρα που θα καλύψει σε 2, 3, 4, 5, 6 ... ώρες και να συμπληρώσεις τον πίνακα που ακολουθεί;

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ						
Χρόνος σε ώρες	1	2	3	4	5	6	7
Απόσταση σε χιλιόμετρα	80						

- Πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης γραμμής;
- Σύγκρινε τον πρώτο αριθμό κάθε γραμμής με κάποιον από τους αριθμούς που ακολουθούν. Πώς προκύπτει εκείνος από τον πρώτο;
- Σύγκρινε και τους αντίστοιχους λόγους $\frac{\text{χρόνος}}{\text{απόσταση}}$

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές, όταν ένα ποσό μεταβάλλεται, προκαλεί μεταβολή σε ένα άλλο ποσό.

Ανάλογα ποσά

Δύο **ποσά** είναι **ανάλογα**, όταν οι τιμές του ενός προκύπτουν από τις τιμές του άλλου πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά με έναν σταθερό αριθμό.

Στα ανάλογα ποσά ο λόγος των τιμών τους διατηρείται σταθερός.

Παραδείγματα

Η αξία ενός υφάσματος είναι ανάλογη προς το μήκος του.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Μήκος υφάσματος σε μέτρα	1	2	3	4
Αξία υφάσματος σε €	5	10	15	20

Οι λόγοι τους είναι ίσοι: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = 0,2$

Κάποια ποσά, ενώ φαίνεται ότι εξαρτώνται το ένα από το άλλο, γιατί αυξάνονται ταυτόχρονα, δεν είναι ανάλογα. Τέτοια ποσά είναι η ηλικία και το ύψος ενός ανθρώπου ή η ηλικία και το βάρος του (ευτυχώς!). Μπορείτε να σκεφτείτε κι εσείς άλλα τέτοια ζευγάρια ποσών;



Εφαρμογή 1η

Από τα παρακάτω ζευγάρια ποσών, υπογραμμίζω αυτά που είναι ανάλογα:

- Η πλευρά ενός τετραγώνου και η περίμετρός του.
- Τα χρήματα που κερδίζουμε και τα χρήματα που ξοδεύουμε.
- Η ποσότητα ενός προϊόντος και η χρηματική αξία του.
- Η ώρα της ημέρας και η θερμοκρασία.

Λύση:

Η πλευρά ενός τετραγώνου και η περίμετρός του (είναι ανάλογα γιατί η τιμή της περιμέτρου προκύπτει πάντα)
 Η ποσότητα ενός προϊόντος και η χρηματική αξία του (είναι ανάλογα γιατί η χρηματική αξία των προϊόντων προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε)
 (Στην πραγματικότητα βέβαια, αν αγοράσω μεγάλη ποσότητα μπορεί να έχω έκπτωση!)



Εφαρμογή 2η

Η Ελένη για να διαβάσει 3 σελίδες κάνει 5 λεπτά. Μπορείς να βρεις πόσο θα κάνει για να διαβάσει 15 σελίδες, 30 σελίδες, 180 σελίδες αν κρατήσει τον ίδιο ρυθμό ανάγνωσης;

Λύση – Απάντηση:

Εξετάζω τα ποσά. Παρατηρώ ότι είναι ανάλογα (επειδή όταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται ... η τιμή του ενός, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται ... και η τιμή του άλλου).

Σχηματίζω τον πίνακα ποσών και τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός σελίδων	3	15	30	180
Χρόνος σε λεπτά	5	25



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **ανάλογα ποσά**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

- ❖ Το βάρος του τυριού και το βάρος του γάλακτος από το οποίο γίνεται είναι ποσά ανάλογα.
- ❖ Στα ανάλογα ποσά οι λόγοι των τιμών τους είναι πάντα ίσοι.

Κεφάλαιο 35ο

Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά

Η εύκολη λύση!



Διακρίνω αν δύο ποσά είναι μεταξύ τους ανάλογα.
 Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.
 Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναλογίας.

Δραστηριότητα 1η

Η σχολική ομάδα μπάσκετ θέλει να προμηθευτεί αθλητικά μπλουζάκια. Βρήκαν ότι σε προσφορά τα 2 μπλουζάκια κοστίζουν 12 €. Πόσο θα κοστίσουν τα μπλουζάκια για όλη την ομάδα που αποτελείται από 8 παίκτες;

- Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος μπορώ εύκολα να υπολογίσω πόσο κάνουν τα 8 μπλουζάκια;
- Ξέροντας όμως την τιμή των 2 (πολλών) τι μπορώ να βρω;
- Πώς μπορώ μετά να βρω την τιμή των 8;
- Κάνε τις πράξεις στις κενές σειρές που ακολουθούν:
-
-
-



Δραστηριότητα 2η

Στο ίδιο πρόβλημα μπορούμε να εργαστούμε και με άλλο τρόπο:

- Φτιάχνουμε έναν πίνακα για να καταγράψουμε τα δεδομένα του προβλήματος.
- Στον παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε εσύ τα ποσά και τις αντίστοιχες τιμές που μας δίνει το πρόβλημα.
- Την άγνωστη τιμή μπορείς να την ονομάσεις x.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ



- Σκέφτομαι τη σχέση ανάμεσα στα δύο ποσά. (Για διπλάσια μπλουζάκια, χρειάζομαι διπλάσια χρήματα ή όχι!)
- Τα ποσά και είναι
- Οι λόγοι τους
- Δηλαδή: = — = —
- Με ποια μέθοδο μπορείς να βρεις τον άγνωστο όρο σ' αυτή την αναλογία;
 -

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να βρούμε την άγνωστη τιμή σε ένα πρόβλημα ανάλογων ποσών με διάφορους τρόπους:

α) Με αναγωγή στη μονάδα

Η διαδικασία με την οποία σε ένα πρόβλημα βρίσκω πρώτα την τιμή της μιας μονάδας (με διαίρεση) και στη συνέχεια βρίσκω την άγνωστη τιμή (με πολλαπλασιασμό) λέγεται αναγωγή στη μονάδα.

Παραδείγματα

Τα 5 μέτρα ύφασμα κοστίζουν 30€. Πόσο κοστίζουν τα 12 μέτρα ύφασμα;

Λύση

Τα 5 μέτρα κοστίζουν 30 €

Το 1 μέτρο κοστίζει $30 : 5 = 6$ €

Τα 12 μέτρα κοστίζουν $12 \cdot 6 = 72$ €

β) Σχηματίζοντα την αναλογία

Εργάζομαι ως εξής:

- ❖ Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών.
- ❖ Εξετάζω αν τα ποσά είναι ανάλογα.
- ❖ Χρησιμοποιώ μεταβλητή για την άγνωστη τιμή.
- ❖ Σχηματίζω την αναλογία.
- ❖ Βρίσκω τον άγνωστο όρο της αναλογίας λύνοντας την εξίσωση.

Τα 5 μέτρα ύφασμα κοστίζουν 30 €. Πόσο κοστίζουν τα 12 μέτρα;

Λύση

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Μήκος υφάσματος σε μέτρα	5	12
Αξία σε €	30	x

Τα ποσά μήκος υφάσματος και αξία είναι ανάλογα ποσά (το διπλάσιο μήκος έχει διπλάσια αξία).

Στα ανάλογα ποσά οι λόγοι των τιμών τους είναι ίσοι.

Σχηματίζω την αναλογία και βρίσκω τον άγνωστο όρο.

$$\frac{5}{30} = \frac{12}{x} \text{ Άρα } 5 \cdot x = 30 \cdot 12 \text{ επομένως } 5 \cdot x = 360$$

$$x = 360 : 5 \quad x = 72$$



Εφαρμογή

Ένας αμπελουργός έκανε 600 κιλά κρασί από 1.800 κιλά σταφύλια. Την επόμενη χρονιά έκανε 800 κιλά κρασί. Πόσα κιλά σταφύλια είχε τη δεύτερη χρονιά;

Λύση:

- α) Με αναγωγή στη μονάδα : Τα 600 κιλά κρασί γίνονται από κιλά σταφύλια
 Το 1 κιλό κρασί γίνεται από $1.800 : 600 = \dots$ κιλά σταφύλια
 Τα 800 κιλά κρασί γίνονται $800 \cdot \dots = \dots$ κιλά σταφύλια

β) Με αναλογία:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Βάρος κρασιού σε κιλά	600	800
Βάρος σταφυλιών σε κιλά	1.800	x

Σχηματίζω την αναλογία και εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα: $\frac{600}{1.800} = \frac{800}{x}$

Σχηματίζω την εξίσωση: $600 \cdot x = 1.800 \cdot 800$

και τη λύνω $600 \cdot x = 1.440.000 \quad x = \dots$ Άρα $x = \dots$

Απάντηση: Τη δεύτερη χρονιά είχε κιλά σταφύλια.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αναγωγή στη μονάδα**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

❖ Αναγωγή στη μονάδα σημαίνει «βρίσκω την τιμή των πολλών».

❖ Στην αναλογία τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.

❖ Τα ανάλογα ποσά δεν έχουν πάντα ίσους λόγους.

Σωστό **Λάθος**

Κεφάλαιο 360

Αντιστρόφως ανάλογα ή αντίστροφα ποσά

Μαζί δεν κάνουμε και χύρια δεν μπορούμε!



Μελετώ την έννοια των αντίστροφων ποσών.
Συγκρίνω ποσά.
Αναγνωρίζω τα αντίστροφα ποσά.

Δραστηριότητα 1η

Τα παιδιά της Στ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου Ν. Καλλικράτειας συγκέντρωσαν στο ταμείο τους 90 €. Με τα χρήματα αυτά θέλησαν να εμπλουτίσουν τη βιβλιοθήκη της τάξης τους. Στο τοπικό βιβλιοπωλείο υπήρχαν βιβλία με διάφορες τιμές. Γύρισαν στο σχολείο και έφτιαξαν έναν πίνακα με τις τιμές των βιβλίων και τις ποσότητες που θα μπορούσαν να αγοράσουν με τα 90 € που είχαν.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ				
Τιμή βιβλίου σε €	3	6	9	15	
Αριθμός βιβλίων	30				

- Μπορείς με την ομάδα σου να συμπληρώσεις τον πίνακα;
- Παρατηρήστε στον πίνακα τη σχέση του αριθμού των βιβλίων με την τιμή.
- Όταν η τιμή του βιβλίου γίνει διπλάσια, μπορώ να αγοράσω τον ίδιο αριθμό βιβλίων;
- Συζητήστε: Τι νομίζετε ότι ενδιαφέρει τα παιδιά για τη σχολική βιβλιοθήκη: η ποσότητα ή οι ακριβές εκδόσεις;

Δραστηριότητα 2η

Ο Διευθυντής, κάθε καλοκαίρι, για να ετοιμάσει το Σχολείο για την καινούρια σχολική χρονιά φροντίζει για το βάψιμό του. Για να βαφεί όλο το Σχολείο χρειάζονται 12 μέρες δουλειά. Πέρυσι ο ελαιοχρωματιστής ήταν μόνος και πήρε 12 μεροκάματα. Επειδή όμως οι εργασίες πρέπει να έχουν τελειώσει πριν αρχίσουν τα μαθήματα, φέτος ο Διευθυντής ζήτησε από άλλα 3 συνεργεία (με περισσότερους εργάτες) μια εκτίμηση για τις μέρες που θα χρειαστούν για το βάψιμο. Τις απαντήσεις τους τις κατέγραψε στον παρακάτω πίνακα:



ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός εργατών του συνεργείου	1	2	3	4
Ημέρες εργασίας	12	6	4	3

- Παρατήρησε τη σχέση αριθμού των εργατών προς τις ημέρες που θα εργάζονται για το βάψιμο.
- Προσπάθησε να βρεις τα μεροκάματα που θα χρειαστούν σε κάθε περίπτωση.

Μεροκάματα για κάθε συνεργείο	$1 \cdot 12 = 12$			
-------------------------------	-------------------	--	--	--

- Τι παρατηρείς;
- Συζητήστε: Αν έπρεπε να διαλέξετε εσείς, ποιο συνεργείο θα διαλέγατε;

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές, όταν ένα ποσό αλλάζει, προκαλεί αντίστροφη αλλαγή σε ένα άλλο ποσό.

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Αντιστρόφως ανάλογα ή **αντίστροφα** λέγονται δύο ποσά, στα οποία, όταν πολλαπλασιάζεται η τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, η αντίστοιχη τιμή του άλλου διαιρείται με τον αριθμό αυτό.

Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα με έναν σταθερό αριθμό.

Παραδείγματα

Ο αριθμός των εργατών είναι αντιστρόφως ανάλογος προς τις ημέρες εργασίας για ένα συγκεκριμένο έργο.

Αριθμός εργατών	1	2	3	4
Ημέρες εργασίας	12	6	4	3

Τα αντίστοιχα γινόμενά τους είναι ίσα:

$$1 \cdot 12 = 12, \quad 2 \cdot 6 = 12, \quad 3 \cdot 4 = 12, \quad 4 \cdot 3 = 12$$



Εφαρμογή 1η

Εξετάσετε τα παρακάτω ζευγάρια ποσών, και υπογραμμίστε τα αντιστρόφως ανάλογα:

Αριθμός εργατών και χρόνος εκτέλεσης ενός έργου.

Ταχύτητα αυτοκινήτου ώρες που ταξιδεύει για μια διαδρομή.

Άτομα και ποσότητα φαγητού που καταναλώνουν.

Κιλά και αξία σε οποιοδήποτε προϊόν.

Λύση:

Αριθμός εργατών και χρόνος εκτέλεσης ενός έργου. (Είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί με διπλάσιο αριθμό εργατών ο χρόνος εκτέλεσης ενός έργου μειώνεται στο μισό.)

Ταχύτητα αυτοκινήτου και ώρες που ταξιδεύει για μια διαδρομή. (Είναι αντιστρόφως ανάλογα γιατί με διπλάσια ταχύτητα οι ώρες που θα ταξιδεύει για να καλύψει μια διαδρομή μειώνονται στο μισό.)



Εφαρμογή 2η

Το ποσό που θα μοιράσει η ΛΟΤΤΑΡΙΑ σ' αυτή την κλήρωση στους νικητές είναι 60.000 €. Πόσα θα είναι τα κέρδη του νικητή, αν είναι ένας; Πόσα θα είναι τα κέρδη του καθενός, αν οι νικητές είναι δύο; Αν είναι τρεις ή τέσσερις;

Λύση:

α. Τα ποσά στο πρόβλημα είναι: Αριθμός νικητών, Κέρδη σε ΕΥΡΩ.

β. Εξετάζω τη σχέση των ποσών μεταξύ τους (τι συμβαίνει στα κέρδη όσο αυξάνεται ο αριθμός των νικητών;).

γ. Παρατηρώ ότι τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα

δ. Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών και συμπληρώνω τις τιμές.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ			
Αριθμός νικητών	1	2	3	4
Κέρδη σε €	60.000	20.000



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αντιστρόφως ανάλογα** ή **αντίστροφα ποσά**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

❖ Δύο ποσά που αυξάνονται ταυτόχρονα είναι αντιστρόφως ανάλογα.

❖ Στα αντίστροφα ποσά τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών τους είναι ίσα.

Σωστό **Λάθος**



Κεφάλαιο 37ο

Λύνω προβλήματα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Πάιρνοντας αποφάσεις!



Διακρίνω αν δύο ποσά είναι μεταξύ τους αντιστρόφως ανάλογα.
Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα.
Λύνω προβλήματα με τη μέθοδο των ίσων γινομένων.



Δραστηριότητα 1η

Το πρόγραμμα της παιδικής κατασκήνωσης προβλέπει ότι τα παιδιά θα τρώνε ένα παγωτό την ημέρα. Ο υπεύθυνος για το πρόγραμμα διατροφής της κατασκήνωσης, προμηθεύτηκε τόσα παγωτά, ώστε να επαρκέσουν για **20 ημέρες** για τους **15 μαθητές** που θα φιλοξενούσε η κατασκήνωση. Αν έρθουν **25 μαθητές** για **πόσες ημέρες** θα έχουν παγωτό;

- Μπορώ να βρω εύκολα για πόσες ημέρες θα έχουν παγωτό τα 25 παιδιά;
- Αν στην κατασκήνωση, αντί για 15 παιδιά, πήγαινε **μόνο 1 παιδί**, μπορώ να υπολογίσω για πόσες μέρες θα είχε παγωτά (αν έτρωγε ένα την ημέρα);
- Με τον τρόπο αυτό βρίσκω πόσα είναι τα παγωτά. Στη συνέχεια μπορώ να βρω για πόσες ημέρες θα επαρκέσουν για τους 25 μαθητές.
- **Κάνω τις πράξεις:** Αφού προβλεπόταν 15 παιδιά να έχουν παγωτά για 20 μέρες, **1 παιδί** θα έχει παγωτά για Άρα τα παγωτά είναι
Όμως τα παιδιά είναι 25 και *θα μοιραστούν* τα παγωτά.
Έτσι θα έχουν παγωτά για



Δραστηριότητα 2η

- Στο ίδιο πρόβλημα εργάζομαι με άλλο τρόπο:
- Βρίσκω τα ποσά. Μπορείς να τα ονομάσεις;
- Συμπλήρωσε τα ποσά και τις αντίστοιχες τιμές που μας δίνει το πρόβλημα.

Την άγνωστη τιμή τη συμβολίζω με x.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ

Εξετάζω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά **αριθμός μαθητών** και **αριθμός ημερών** (δηλαδή όταν οι μαθητές γίνουν περισσότεροι, τα παγωτά επαρκούν για περισσότερες ή για λιγότερες ημέρες;) Διακρίνω, ότι τα ποσά **αριθμός μαθητών** και **αριθμός ημερών** είναι μεταξύ τους

Τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών τους είναι

Δηλαδή: • = •

- Μπορείς τώρα να βρεις τον άγνωστο όρο αυτής της ισότητας;

.....
.....

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να βρούμε την άγνωστη τιμή σε ένα πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά με δύο τρόπους:

Παραδείγματα

α) Με αναγωγή στη μονάδα

Η διαδικασία με την οποία σε ένα πρόβλημα με ποσά αντιστρόφως ανάλογα, βρίσκω πρώτα την τιμή της μιας μονάδας (με πολλαπλασιασμό) και στη συνέχεια διαιρώντας βρίσκω την άγνωστη τιμή, λέγεται **αναγωγή στη μονάδα**.

Οι 3 εργάτες τελειώνουν ένα έργο σε 20 ημέρες. Σε πόσες ημέρες τελειώνουν το ίδιο έργο οι 10 εργάτες;

Λύση

Οι 3 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 20 ημέρες.

Ο 1 εργάτης τελειώνει το έργο σε $20 \cdot 3 = 60$ ημέρες

Οι 10 εργάτες τελειώνουν το έργο σε $60 : 10 = 6$ ημέρες

β) Σχηματίζοντας πίνακα ποσών και τιμών

Εργάζομαι ως εξής:

- ❖ Φτιάχνω τον πίνακα ποσών και τιμών.
- ❖ Εξετάζω αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.
- ❖ Χρησιμοποιώ μεταβλητή για την άγνωστη τιμή.
- ❖ Σχηματίζω την εξίσωση που δημιουργείται από τα ίσα γινόμενα των τιμών.
- ❖ Βρίσκω τον άγνωστο όρο, λύνοντας την εξίσωση.

Στο προηγούμενο παράδειγμα εργαζόμαστε με πίνακα. Φτιάχνουμε τον πίνακα ποσών και τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός εργατών	3	10
Ημέρες εργασίας	20	x

Τα ποσά **αριθμός εργατών** και **ημέρες εργασίας** είναι **αντιστρόφως ανάλογα** (ο διπλάσιος αριθμός εργατών τελειώνει το έργο στις μισές μέρες).

Άρα τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα.

Σχηματίζω τα γινόμενα και βρίσκω τον άγνωστο όρο.

$$10 \cdot x = 20 \cdot 3$$

$$10 \cdot x = 60 \quad \text{επομένως } x = 60 : 10 \quad \text{Άρα } x = 6 \text{ ημέρες}$$



Εφαρμογή

Τα 12 λεωφορεία για τη μεταφορά των μαθητών κάνουν 2 δρομολόγια. Τα 4 λεωφορεία χάλασαν. Πόσα δρομολόγια θα κάνουν τα 8 λεωφορεία που έμειναν;

Λύση:

α) με αναγωγή στη μονάδα: Τα 12 λεωφορεία κάνουν 2 δρομολόγια

Το 1 λεωφορείο θα έκανε $12 \cdot 2 = 24$ δρομολόγια

Τα 8 λεωφορεία θα κάνουν $24 : 8 = 3$ δρομολόγια

β) με πίνακα τιμών:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός λεωφορείων	12	8
Δρομολόγια	2	x

Σχηματίζω την εξίσωση των ίσων γινόμενων: $8 \cdot x = 12 \cdot 2$

και τη λύνω $8 \cdot x = 24$ επομένως $x = \dots\dots\dots$ Άρα $x = \dots$

Απάντηση: Τα 8 λεωφορεία θα κάνουν \dots δρομολόγια.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **αναγωγή στη μονάδα σε ποσά αντιστρόφως ανάλογα**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- ❖ Αναγωγή στη μονάδα σημαίνει: βρίσκω την τιμή του ενός.
- ❖ Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.
- ❖ Τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά έχουν πάντα ίσους λόγους.

Σωστό	Λάθος
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Κεφάλαιο 38ο

Η απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά

Η απλή μέθοδος των τριών!

Λύνω τα προβλήματα των ανάλογων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών.

Δραστηριότητα

Τα παιδιά της Στ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου της Αντιμάχειας στα πλαίσια ενός ευρωπαϊκού προγράμματος απέκτησαν φίλους σε ένα σχολείο στη Σκωτία. Αποφάσισαν να τους στείλουν 12 μουσικά CD με ελληνική μουσική. Στα μαγαζιά του νησιού τα 5 μουσικά CD κοστίζουν 30 €. Πόσα χρήματα θα χρειαστούν;

- Ποια είναι τα ποσά;.....
- Πως μεταβάλλονται;
- Είναι τα ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα;
- Αφού διακρίνω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά, προχωρώ στη λύση.

Ξέρω να λύνω πρόβλημα ανάλογων ποσών σχηματίζοντας την αναλογία:

1^ο βήμα: Σχηματίζω τον πίνακα ποσών και τιμών

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Αριθμός CD		
Αξία σε €		x

2^ο βήμα: Σχηματίζω την αναλογία: $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{x}$

3^ο βήμα: Εφαρμόζω τα σταυρωτά γινόμενα :

4^ο βήμα: Λύνω την εξίσωση: $x = \dots\dots\dots$

Παρατηρώ την εξίσωση που σχημάτισα προηγουμένως $x = 30 \cdot 12 : 5$ (ή $x = 30 \cdot \frac{12}{5}$) και τη θέση των αριθμών στον πίνακα ποσών και τιμών. Διαπιστώνω ότι το άγνωστο ποσό (x) είναι ίσο με τον αριθμό που

βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα που σχηματίζουν οι αριθμοί δίπλα του αλλά αντεστραμμένο: $x = 30 \cdot \frac{12}{5}$

Στην παρατήρηση αυτή στηρίχθηκε μια άλλη μέθοδος για να λύνουμε προβλήματα ποσών, όπου γνωρίζουμε τρεις τιμές και ψάχνουμε την τέταρτη. Η μέθοδος αυτή ονομάστηκε **απλή μέθοδος των τριών**.

Λύνω το πρόβλημα με την απλή μέθοδο των τριών:

1^ο βήμα: Κάνω **κατάταξη** (τακτοποιώ τα ποσά, προσέχοντας τώρα να βάλω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

τα **5 CD** κοστίζουν **30 €**
τα **12 CD** κοστίζουν **x**;

2^ο βήμα: Ελέγχω ότι τα ποσά είναι ανάλογα

3^ο βήμα: Εφαρμόζω και λύνω $x = 30 \cdot \frac{12}{5}$ δηλαδή $x = \frac{30 \cdot 12}{5}$ άρα $x = \frac{360}{5}$

Άρα $x = 72 \text{ €}$



Από την παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώνουμε ότι, για να λύσουμε προβλήματα ανάλογων ποσών, υπάρχει και μια τρίτη μέθοδος (εκτός από την αναγωγή στη μονάδα και την αναλογία), η απλή μέθοδος των τριών.

Απλή μέθοδος των τριών στα ανάλογα ποσά

Για να βρω την άγνωστη τιμή σε προβλήματα ανάλογων ποσών με την **απλή μέθοδο των τριών**, ακολουθώ τρία βήματα:

1^ο βήμα: Κατάταξη (βάζω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

2^ο βήμα: Σύγκριση ποσών (εξετάζω αν τα ποσά είναι ανάλογα)

3^ο βήμα: Λύση (πολλαπλασιάζω τον αριθμό που είναι πάνω από το x επί το κλάσμα των άλλων δύο αριθμών αντεστραμμένο)

Παραδείγματα

τα **3 τετράδια** κοστίζουν **2 €**
τα **27 τετράδια** κοστίζουν **x €**;

$$x = 2 \cdot \frac{27}{3} \text{ δηλαδή } x = \frac{2 \cdot 27}{3}$$

$$\text{άρα } x = \frac{54}{3} \text{ άρα } x = 18 \text{ €}$$



Εφαρμογή

Ο καυστήρας της κεντρικής θέρμανσης του σχολείου καταναλώνει 54 λίτρα πετρέλαιο σε 3 ώρες. Πόσες ώρες θα λειτουργεί το καλοριφέρ αν στη δεξαμενή υπάρχουν ακόμη 378 λίτρα πετρελαίου;



Λύση:

1^ο βήμα: Κάνω την κατάταξη.

Σε **3** ώρες καίει **54** λίτρα
Σε **x** ώρες καίει **378** λίτρα;

2^ο βήμα: Εξετάζω τα ποσά. Είναι ανάλογα.

3^ο βήμα: Λύνω το πρόβλημα: $x = 3 \cdot \frac{378}{54}$ δηλαδή $x = \frac{3 \cdot 378}{54}$

άρα $x = \dots$ άρα $x = \dots$ ώρες



Απάντηση: Θα λειτουργεί για ώρες.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε την **απλή μέθοδο των τριών σε ποσά ανάλογα**. Μπορείς να την εξηγήσεις με δικά σου λόγια;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

- ❖ Τα προβλήματα των ανάλογων ποσών λύνονται μόνο με την «απλή μέθοδο».
- ❖ Με όποια μέθοδο κι αν λύσω το πρόβλημα το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο.
- ❖ Στην κατάταξη στην απλή μέθοδο των τριών προσέχω τα ποσά του ίδιου είδους να είναι σε στήλες.

Κεφάλαιο 39ο

Η απλή μέθοδος των τριών στα αντίστροφα ποσά



Είναι απλό όταν ξέρω τις τρεις τιμές!

Λύνω τα προβλήματα των αντίστροφων ποσών με την απλή μέθοδο των τριών.



Δραστηριότητα

Για να υδροδοτήσουν ένα νέο οικισμό, οι μηχανικοί της εταιρείας ύδρευσης υπολόγισαν ότι θα χρειαστούν 180 σωλήνες των 5 μέτρων. Στην αποθήκη της εταιρείας υπάρχουν μόνο σωλήνες των 3 μέτρων. Πόσους τέτοιους σωλήνες θα χρειαστούν;

- Για να καλύψουμε την ίδια απόσταση με μικρότερους σωλήνες θα χρειαστούμε περισσότερους ή λιγότερους;.....
- Είναι τα ποσά ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα;
- Αφού διερευνήσω τη σχέση ανάμεσα στα ποσά, προχωρώ στη λύση.

Ξέρω να λύνω πρόβλημα με αντιστρόφως ανάλογα ποσά ση-ματίζοντας τον πίνακα τιμών και εφαρμόζοντας τα ίσα γινόμενα:

- Στον πίνακα ποσών και τιμών συμπληρώνω τις τιμές:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ
Μήκος σωλήνα	
Ποσότητα σωλήνων	x



- Εξετάζω τα γινόμενα των τιμών. Αυτά είναι :
- Εφαρμόζω τα ίσα γινόμενα: • x =
- Λύνω την εξίσωση: x =

Λύνω το πρόβλημα με την απλή μέθοδο των τριών:

Όπως στα ανάλογα ποσά, έτσι και στα αντιστρόφως ανάλογα γνωρίζουμε τρεις τιμές και ψάχνουμε την τέταρτη. Η **απλή μέθοδος των τριών** που εφαρμόζεται στα προβλήματα με ανάλογα ποσά μπορεί να εφαρμοστεί και στα αντιστρόφως ανάλογα μετά την κατάταξη των ποσών του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο.

Με μια διαφορά:

Το άγνωστο ποσό το βρίσκουμε πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό που βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα που σχηματίζουν οι αριθμοί δίπλα του όπως είναι (όχι αντεστραμμένο)

1ο θήμα: Κάνω κατάταξη (τακτοποιώ τα ποσά, προσέχοντας τώρα να βάλω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

όταν το μήκος του σωλήνα είναι **5 μέτρα** χρειάζονται **180 σωλήνες**

όταν το μήκος του σωλήνα είναι **3 μέτρα** χρειάζονται **x σωλήνες;**

2ο θήμα: Ελέγχω τα ποσά και διακρίνω ότι είναι αντιστρόφως ανάλογα

3ο θήμα: Λύνω $x = 180 \cdot \frac{5}{3}$ δηλαδή $x = \frac{180 \cdot 5}{3}$ άρα $x = \frac{900}{3}$ άρα $x = 300$



Από την παραπάνω δραστηριότητα διαπιστώνουμε ότι, για να λύσουμε προβλήματα αντίστροφων ποσών, υπάρχει και μια τρίτη μέθοδος (εκτός από την αναγωγή στη μονάδα και τον πίνακα ποσών και τιμών), η απλή μέθοδος των τριών.

Απλή μέθοδος των τριών στα αντίστροφα ποσά

Για να βρω την άγνωστη τιμή σε προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών με την **απλή μέθοδο των τριών**, ακολουθώ τρία βήματα:

1^ο βήμα: Κατάταξη (βάζω τα ποσά του ίδιου είδους το ένα κάτω από το άλλο)

2^ο βήμα: Σύγκριση ποσών (εξετάζω αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα)

3^ο βήμα: Λύση (πολλαπλασιάζω τον αριθμό που είναι πάνω από το x επί το κλάσμα των άλλων δύο αριθμών)

Παραδείγματα

οι **3 εργάτες** τελειώνουν σε **6 ημ.**
οι **9 εργάτες** τελειώνουν σε **x ημ.;**

$$x = 6 \cdot \frac{3}{9} \quad \text{δηλαδή} \quad x = \frac{6 \cdot 3}{9}$$

άρα $x = \frac{18}{9}$ άρα $x = 2$ ημέρες

Δεν πρέπει να ξεχνώ **στο τέλος να ελέγχω την απάντηση**. Αφού τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, οι περισσότεροι εργάτες χρειάζονται λιγότερες μέρες. **Αυτό που βρήκα είναι λογικό;**



Εφαρμογή

Για να καλύψουν το πάτωμα του γυμναστηρίου με σανίδες, οι τεχνίτες υπολόγισαν ότι θα χρειαστούν 180 σανίδες μήκους 2,5 μέτρων. Τι ποσότητα θα πρέπει να αγοράσουν, αν χρησιμοποιήσουν σανίδες μήκους 2 μέτρων (και ίδιου πλάτους);



Λύση:

1ο βήμα: Κάνω την κατάταξη

όταν το μήκος των σανίδων είναι χρειάζονται

όταν το μήκος των σανίδων είναι χρειάζονται **x σανίδες;**

2ο βήμα: Εξετάζω τα ποσά:

3ο βήμα: Λύνω το πρόβλημα $x =$

.....
.....

Ελέγχω: Με μικρότερες σανίδες θα χρειαστούν περισσότερες από 180 ή λιγότερες;

Απάντηση: Θα χρειαστούν σανίδες.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε την **απλή μέθοδο των τριών σε ποσά αντιστρόφως ανάλογα**. Μπορείς να την εξηγήσεις με δικά σου λόγια;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

❖ Τα προβλήματα των αντίστροφων ποσών λύνονται με τρεις τρόπους.

❖ Στα αντίστροφα ποσά, για να βρω το x πολλαπλασιάζω τον αριθμό που βρίσκεται πάνω του επί το κλάσμα των άλλων δύο αντεστραμμένο.

❖ Στην κατάταξη προσέχω τα ποσά του ίδιου είδους να είναι σε στήλες.

Συγκρίνω (πο)σοστά %



Κατανόω ότι ποσοστό ενός ποσού είναι ένα μέρος του ποσού αυτ
Μετατρέπω τα κλάσματα σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100.
Αντιλαμβάνομαι το σύνολο ως το 100% και εκτιμώ το ποσοστό.



Δραστηριότητα 1η

Η Ε΄ και η Στ΄ τάξη του Δημοτικού Σχολείου Θυμιανών συμμετείχαν στη δενδροφύτευση που οργάνωσε ο δήμος Χίου με σκοπό να αναδασώσει τις καμένες εκτάσεις στο νησί. Τα παιδιά της Ε΄ τάξης φύτεψαν 25 δεντράκια, από τα οποία φύτρωσαν τα 20. Τα παιδιά της Στ΄ τάξης φύτεψαν 50 δέντρα, από τα οποία φύτρωσαν τα 30. Ποια τάξη είχε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας στη δενδροφύτευση;

- Για να απαντήσουμε στην ερώτηση τι πρέπει να λάβουμε υπόψη;
- Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας είχε η τάξη της οποίας φύτρωσαν περισσότερα δέντρα; Εξηγήστε γιατί.



Δραστηριότητα 2η

Στον αγώνα μπάσκετ της Στ΄ τάξης μεταξύ του 21ου και του 109ου Δημοτικού Σχολείου Θεσσαλονίκης, το τελικό σκορ ήταν 57 - 61. Οι δυο καλύτεροι παίκτες των δύο ομάδων ήταν ο Αχιλλέας Ι. κι ο Σωτήρης Κ. Ο Αχιλλέας πέτυχε 17 καλάθια στις 25 προσπάθειες ενώ ο Σωτήρης πέτυχε 16 καλάθια στα 20. Ποιος είχε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;

- Μπορείς εύκολα συγκρίνοντας τις επιτυχημένες βολές των δύο παικτών να αποφασίσεις ποιος ήταν καλύτερος παίκτης;

.....

- Σχημάτισε τους λόγους επιτυχιών προς προσπάθειες για κάθε παίκτη.

$$\text{Αχιλλέας} = \frac{\text{καλάθια}}{\text{προσπάθειες}} = \frac{\quad}{\quad} \quad \text{και} \quad \text{Σωτήρης} = \frac{\text{καλάθια}}{\text{προσπάθειες}} = \frac{\quad}{\quad}$$

- Γιατί δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τους παραπάνω λόγους εύκολα;

.....

- Προσπάθησε να κάνεις τους λόγους ομώνυμα κλάσματα: $\frac{\quad}{\quad}$, $\frac{\quad}{\quad}$

- Είναι εύκολο να συμπεράνεις τώρα ποιος είχε μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;



Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι ένας εύκολος και κοινός τρόπος σύγκρισης του *μέρους προς το σύνολο* είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα κλάσμα με παρονομαστή το 100.

Ποσοστά

Ποσοστό ενός ποσού είναι ένα μέρος του ποσού αυτού (**ο λόγος του μέρους προς όλο το ποσό**).

Ποσοστό στα 100 είναι ένα μέρος του ποσού που έχει τιμή 100 και γράφεται με κλάσμα που έχει αριθμητή το μέρος και παρονομαστή το 100 ή με το **σύμβολο %**.

Παραδείγματα

Το τεστ στα Αγγλικά είχε 20 ερωτήσεις.
Μαργαρίτα: Είχα ποσοστό επιτυχίας 19 στα 20 (19/20)
Βασίλης: Είχα ποσοστό επιτυχίας 17 στα 20 (17/20)

Η δασκάλα τους ανακοινώνει τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στα 100 :

- Μαργαρίτα, είχες 95%.
- Βασίλη, εσύ είχες 85%

Για μικρό μέρος μεγάλου ποσού χρησιμοποιούμε κλάσμα με παρονομαστή το 1.000 και το λέμε **ποσοστό στα χίλια (‰)**.



Εφαρμογή 1η Υπολογισμός ποσοστού με το νου

Μετά την επίσκεψη του σχολείου στον κινηματογράφο τα παιδιά έκαναν μια μικρή έρευνα για το αν άρεσε η ταινία. Από τα 180 παιδιά τα 135 απάντησαν ότι τους άρεσε. Πόσο ήταν το ποσοστό στα 100 (%) των παιδιών στα οποία άρεσε η ταινία;



Λύση - Απάντηση:

Σκέφτομαι ότι τα 180 παιδιά είναι το 100% αυτών που ρωτήθηκαν.

Υπολογίζω με το νου ότι τα μισά, δηλαδή τα 90, είναι το 50% και τα μισά από αυτά, δηλαδή τα 45, είναι το 25%. Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να χρωματίσουμε μέχρι τον αριθμό 135 και να συμπληρώσουμε το αντίστοιχο ποσοστό.



Εφαρμογή 2η

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται η αρχική τιμή ενός προϊόντος, που είναι 400 € και 3 τελικές τιμές από τις οποίες καθεμία προκύπτει μετά την έκπτωση. Μπορείς να υπολογίσεις με το νου πόσο στα 100 (%) είναι η έκπτωση σε κάθε περίπτωση;

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΚΠΤΩΣΗΣ (%)	ΤΕΛΙΚΗ ΤΙΜΗ
400		200
400		300
400		350

Λύση: Τα 400 € είναι το 100% της τιμής. Τα μισά (200 €) είναι το 50% της τιμής. Άρα, όταν η τελική τιμή είναι 200 €, η έκπτωση είναι 50%. Τα 100 € αντιστοιχούν στο $\frac{1}{4}$ των 400 €,

δηλαδή στο 25%. Στη β' περίπτωση πληρώνουμε 100 € λιγότερα από την αρχική τιμή. Άρα η έκπτωση είναι 25%. Με την ίδια λογική στη γ' περίπτωση τα 50 € λιγότερα που πληρώνουμε είναι το $\frac{1}{8}$ των 400 € (το μισό του 25%). Άρα η έκπτωση είναι 12,5%.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **ποσοστό**. Μπορείς να τον εξηγήσεις με δικά σου παραδείγματα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

- ❖ Το ποσοστό είναι ένας λόγος.
- ❖ Τα ποσοστά τα χρησιμοποιούμε μόνο για εκπτώσεις.

Κεφάλαιο 41ο

Βρίσκω το ποσοστό

Παίζοντας με τα ποσοστά



Κατανοώ τη σχέση μεταξύ κλάσματος, ποσοστού και δεκαδικού αριθμού.
Εκφράζω ποσοστό στα 100 (%) με κλάσμα και δεκαδικό αριθμό.
Βρίσκω το ποσοστό ενός ποσού όταν ξέρω το ποσοστό στα 100 (%).



Δραστηριότητα 1η

- Στη διπλανή εικόνα βλέπεις ένα βάτραχο. Κάτω από την εικόνα υπάρχει η ένδειξη 0,5 x. Τι νομίζεις ότι σημαίνει;

Στα φωτοαντιγραφικά μηχανήματα, για να μεγεθύνεις ή να σμικρύνεις το φωτοαντίγραφο πρέπει να αλλάξεις την ένδειξη του ποσοστού.



- Ποια ένδειξη θα έβαζες για να πάρεις μια εικόνα που θα είναι μισή από την αρχική σου εικόνα;
- Μετρώντας τις διαστάσεις των δύο εικόνων, βρίσκουμε τη σχέση

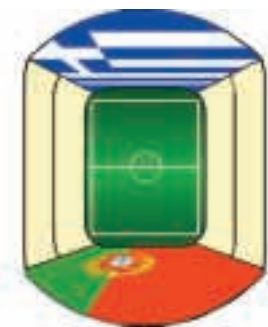
$$\text{τους } \frac{\text{τελικό μέγεθος}}{\text{αρχικό μέγεθος}} = \frac{10 \text{ εκ.}}{20 \text{ εκ.}} = \frac{\quad}{100} = 0, \dots$$

- Η τελική εικόνα είναι το % της αρχικής.



Δραστηριότητα 2η

Στις 4/7/2004 η Εθνική Ομάδα ποδοσφαίρου της Ελλάδας έπαιξε στον τελικό του Ευρωπαϊκού Πρωταθλήματος και στέφθηκε πρωταθλήτρια Ευρώπης. Όλοι οι Έλληνες πανηγύρισαν την κατάκτηση του κυπέλλου, λίγοι όμως ήταν αυτοί που είχαν την ευκαιρία να βρίσκονται στο στάδιο. Το στάδιο «Ντα Λουζ» της Λισαβόνας χωρούσε 65.000 άτομα και ήταν πλήρες. Από το σύνολο των εισιτηρίων, καθεμία από τις ομάδες πήρε το 25%, ενώ τα υπόλοιπα είχαν προπωληθεί. Πόσα ήταν τα εισιτήρια που είχε η ελληνική ομάδα στη διάθεσή της;



- Πώς θα βρεις το μέρος (25%) όταν ξέρεις το σύνολο, (65.000);

.....

- Να εκφράσεις τώρα το ποσοστό 25% με τη δεκαδική του μορφή:

- Κάνε τώρα την ίδια πράξη με τον δεκαδικό αριθμό:

Από τις παραπάνω δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε το ποσοστό με πολλούς τρόπους.

Ποσοστό ενός ποσού

Το ποσοστό στα εκατό (%) μπορεί να γραφεί ως **δεκαδικός αριθμός**, που δηλώνει εκατοστά.

Τα **κλάσματα** είναι δυνατό να μετατραπούν σε ποσοστά αν τα μετατρέψουμε στα ισοδύναμά τους εκατοστιαία ή αν κάνουμε τη διαίρεση ανάμεσα στους όρους (με προσέγγιση εκατοστού).

Βρίσκω το ποσοστό σημαίνει βρίσκω το μέρος του όλου.

Παραδείγματα

$$45\% \left(= \frac{45}{100} \right) = 45 : 100 = 0,45$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{20}{100} = 20\% \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{5} = 1 : 5 = 0,20 = 20\%$$

Το 15% του 70 είναι:

$$\frac{15}{100} \cdot 70 = 10,5 \quad \text{ή} \quad 0,15 \cdot 70 = 10,5$$



Εφαρμογή 1η

Εκφράζω το ποσό 63 λεπτά ως ποσοστό του ΕΥΡΩ.

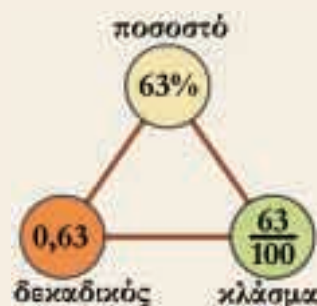
Το γράφω με τη μορφή κλάσματος, με τη μορφή δεκαδικού και με το σύμβολο του ποσοστού.

Λύση - Απάντηση:

❖ με μορφή κλάσματος: $\frac{63}{100}$

❖ με μορφή δεκαδικού:

❖ με σύμβολο ποσοστού: 63%



Εφαρμογή 2η

Στη συσκευασία ενός γιαουρτιού αναγράφεται: «Γιαούρτι από αγελαδινό γάλα. Βάρος 200 γραμμάρια, λιπαρά 3%». Τρώγοντας το συγκεκριμένο γιαούρτι πόσα λιπαρά θα καταναλώσω;

Λύση:

Πρέπει να βρω το ποσοστό των λιπαρών που περιέχονται στα 200 γραμμάρια γιαουρτιού. Πολλαπλασιάζω τα 200 γρ. με το κλάσμα $\frac{3}{100}$ (ή με τον δεκαδικό 0,03) και βρίσκω $\frac{600}{100}$ ή 6 γρ.

Μπορείς να λύσεις το πρόβλημα με άλλο τρόπο σκέψης.

Απάντηση: Θα καταναλώσω 6 γραμμάρια λιπαρά.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό εκφράσαμε τα ποσοστά με τρεις τρόπους και μάθαμε να βρίσκουμε το **ποσοστό ενός ποσού**. Μπορείς να εξηγήσεις με ένα δικό σου παράδειγμα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

❖ Το ποσοστό μπορεί να εκφραστεί μόνο με κλάσμα.

❖ Η μετοχή κέρδισε 0,06 της αξίας της, δηλαδή 6%.

❖ Ο ένας στους τέσσερις $\left(\frac{1}{4}\right)$ είναι το 25% του συνόλου.

Κεφάλαιο 42ο

Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω την τελική τιμή

Ποσοστά της αλλαγής



Κατανόω τη σχέση μεταξύ αρχικής τιμής, ποσοστού και τελικής τιμής. Λύνω προβλήματα γνωρίζοντας την αρχική τιμή και το ποσοστό και ζητώντας την τελική τιμή.



Δραστηριότητα 1η

Καθημερινά ακούμε ή διαβάζουμε στα Μ.Μ.Ε. πληροφορίες, όπως:

- Η τιμή του ψωμιού αυξήθηκε τον τελευταίο χρόνο κατά 3%.
- Οι τιμές των υπολογιστών μειώθηκαν από πέρυσι κατά 8%.
- Η τουριστική κίνηση στη Σάμο ήταν φέτος αυξημένη κατά 12%.

- Τι νομίζεις ότι χρειάζεται να γνωρίζει κάποιος για να μας δώσει αυτές τις πληροφορίες;

●

- Αν εκτός από τις παραπάνω πληροφορίες γνωρίζεις και τις περσινές τιμές, μπορείς να υπολογίσεις τις φετινές τιμές;

- Αν ναι, με ποιον τρόπο

.....



Δραστηριότητα 2η

Η Αγγελική θέλει να αγοράσει καινούριο υπολογιστή. Βρήκε έναν στο διαφημιστικό φυλλάδιο κάποιου καταστήματος με 550 €. Προσέχει όμως ότι, στην άκρη του φυλλαδίου, γράφει ότι στην τιμή δεν συμπεριλαμβάνεται ο Φ.Π.Α. (18%). Μπορείς να βρεις πόσο θα πληρώσει τελικά γι' αυτόν τον υπολογιστή;

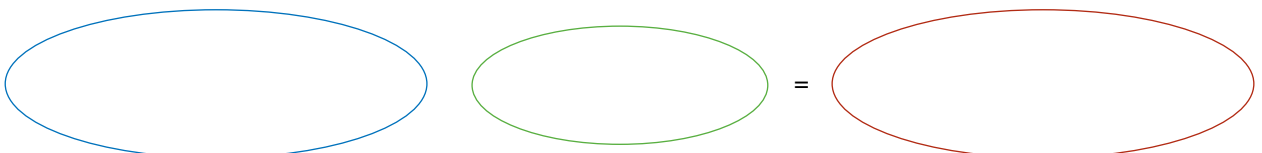


- Τι είναι αυτό που πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα;

- Κάνε την πράξη:

- Ποια είναι τα στοιχεία του προβλήματος των οποίων γνωρίζεις τώρα τις τιμές;

- Γράψε στο παρακάτω σχήμα τα δύο γνωστά στοιχεία του προβλήματος (όχι τις τιμές) (στο πράσινο και στο μπλε πλαίσιο) και το ένα άγνωστο και συμπλήρωσε ανάμεσα τους, τα σύμβολα που δείχνουν τη σχέση μεταξύ τους.



- Μπορείς τώρα να απαντήσεις στην Αγγελική πόσο θα πληρώσει για τον υπολογιστή;

.....



Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι πολλές φορές το ποσοστό δηλώνει πόσο άλλαξε η αρχική τιμή ενός ποσού προσθετικά (αύξηση) ή αφαιρετικά (μείωση).

Βρίσκω την τελική τιμή ενός ποσού

Όταν η τιμή ενός ποσού αυξάνεται ή μειώνεται, το ποσοστό είναι το μέρος του ποσού που δηλώνει πόση αύξηση ή μείωση υπάρχει στην **αρχική τιμή του ποσού**.

Αν δεν γνωρίζουμε το ποσοστό επί της τιμής (αλλά μόνο το ποσοστό %), βρίσκουμε πρώτα αυτό, που τώρα ονομάζεται **αύξηση** ή **μείωση** της αρχικής τιμής.

Η **τελική τιμή του ποσού** προκύπτει, όταν στην αρχική τιμή προσθέσουμε την αύξηση ή αφαιρέσουμε τη μείωση (το ποσοστό).

Παραδείγματα



Πώς προκύπτει η τελική τιμή του υπολογιστή της δραστηριότητας 2:



$$550 \text{ €} + 99 \text{ €} = 649 \text{ €}$$

Τα **ποσά** στα ποσοστά είναι πάντα **ανάλογα**. [Π.χ: Το κέρδος στα βιβλία είναι 20%. Αφού στα 100 € το κέρδος είναι 20 €, στα διπλάσια (200 €) είναι διπλάσιο (40 €), στα τριπλάσια (300 €) το τριπλάσιο (60 €) κ.ο.κ.]

Άρα μπορούμε να λύνουμε τα προβλήματα ποσοστών με τις **μεθόδους** που λύνουμε τα προβλήματα των ανάλογων ποσών (αναγωγή στη μονάδα, αναλογία, απλή μέθοδος των τριών). Και στις τρεις μεθόδους η μία από τις τιμές είναι το 100 (ή το 1000 αν πρόκειται για ποσοστό %).

Εφαρμογή

Το βιβλιοπωλείο της γειτονιάς κάνει έκπτωση 30% στα βιβλία του. Είναι ευκαιρία να αγοράσεις ένα μεγάλο λεξικό που κόστιζε 25 €. Πόσο θα το αγοράσεις τώρα;

Λύση:

Γνωρίζω την αρχική τιμή και το ποσοστό %.

1. Θα βρω τη μείωση της αρχικής τιμής (την έκπτωση): $\frac{30}{100} \cdot 25 = 0,3 \cdot 25 = 7,5$

2. Θα αφαιρέσω την έκπτωση από την αρχική τιμή: $25 - 7,5 = 17,5$

Απάντηση: Μετά την έκπτωση το λεξικό θα κοστίζει 17,5 €.



Μπορείς να λύσεις το πρόβλημα με μία από τις τρεις μεθόδους, όπως λύνεις τα προβλήματα με ανάλογα ποσά. Πρέπει να προσέξεις όμως στην κατάταξη πώς θα βάλεις τις τιμές και ίσως χρειαστεί να κάνεις κάποια πράξη στο ποσοστό % με το νου, για να βρεις τις τιμές που χρειάζονται.

Για παράδειγμα με αναλογία: Αφού θέλω να βρω κατευθείαν την τελική τιμή για το βιβλίο που κόστιζε αρχικά 25 €, πρέπει να σκεφτώ, ποια θα ήταν η τελική τιμή ενός βιβλίου που κόστιζε αρχικά 100 €. Η έκπτωση του θα ήταν 30 € (έκπτωση 30%). Άρα θα κόστιζε αρχικά 70 €.

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Κόστος μετά την έκπτωση	70	x
Κόστος πριν την έκπτωση	100	25

$$\frac{\text{τελική τιμή} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} = \frac{70}{100} = \frac{x}{25}$$

Μπορείς να το λύσεις συνεχίζοντας με τα σταυρωτά γινόμενα ($100 \cdot x = 70 \cdot 25$) ή από την αρχή με κάποια άλλη από τις μεθόδους λύσης προβλημάτων ανάλογων ποσών.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σχέση: **αρχική τιμή - ποσοστό - τελική τιμή** και μάθαμε να βρίσκουμε την τελική τιμή. Μπορείς να δώσεις ένα δικό σου παράδειγμα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

- ❖ Το ποσοστό μπορεί να εκφράζει την αύξηση ή τη μείωση της αρχικής τιμής.
- ❖ Η τελική τιμή προκύπτει αν πολλαπλασιάσω το ποσοστό % με την αρχική τιμή.



Κεφάλαιο 43ο

Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω την αρχική τιμή

Από πού έρχομαι;

Μελετώ τη σχέση μεταξύ αρχικής τιμής, ποσοστού και τελικής τιμής.
Βρίσκω την αρχική τιμή σε προβλήματα ποσοστών.



Δραστηριότητα 1η

Ένα μαγαζί με ποδήλατα διαφημίζει ότι έχει βάλει έκπτωση 35% σε όλα τα είδη του. Βλέπεις στη βιτρίνα ένα ποδήλατο που κοστίζει μετά την έκπτωση 78 €. Πόσο κόστιζε αρχικά;



- Σε τι διαφέρει το πρόβλημα αυτό από τα προβλήματα ποσοστών του προηγούμενου μαθήματος;

.....

- Θυμήσου το σχήμα του προηγούμενου μαθήματος σχετικά με τις διάφορες τιμές στα προβλήματα ποσοστών και συμπλήρωσε τις τιμές του προβλήματος. Στη θέση των άγνωστων τιμών μπορείς να βάλεις μεταβλητές.



- Στο συγκεκριμένο ποδήλατο γνωρίζεις την τιμή και ψάχνεις
- Στο κλάσμα $\frac{35}{100}$ (ποσοστό %) το 100 δηλώνει την τιμή ενός ποδηλάτου.
- Να βρεις την τελική τιμή για το ποδήλατο των 100 €
- Τώρα μπορείς να συμπληρώσεις τον πίνακα και την αναλογία:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Κοστίζει μετά την έκπτωση		
Κόστιζε πριν την έκπτωση	100	

$$\frac{\text{τελική τιμή}}{\text{αρχική τιμή}} = \frac{\quad}{100} = \quad$$

- Μπορείς να το λύσεις με όποια άλλη από τις μεθόδους των ανάλογων ποσών θέλεις.

Δραστηριότητα 2η

Το πρώι η Βασιλική διάβασε πάνω στο κουτί με το γάλα: «Πίνοντας 500 ml γάλα (2 μεγάλα ποτήρια) ο οργανισμός μας παίρνει το 75% της Συνιστώμενης Ημερήσιας Ποσότητας ασβεστίου». Είδε στο διατροφικό πίνακα ότι 100 ml γάλα περιέχουν 120 mg ασβέστιο και σκέφτηκε να υπολογίσει πόσα mg ασβεστίου χρειάζεται ο οργανισμός καθημερινά.

- Τι πρέπει να βρούμε πρώτα;
- Κάνε την πράξη:
- Αυτό που βρήκες είναι το σύνολο των αναγκών ή το μέρος;
- Είναι αρκετό αυτό που βρήκες, μαζί με το 75% για να εφαρμόσεις κάποια από τις μεθόδους λύσης των προβλημάτων με ποσοστά;
- Επέλεξε μια μέθοδο και εξήγησε πώς θα έλυνες το πρόβλημα.

.....

.....



Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι, στα προβλήματα ποσοστών, επειδή ο αριθμός 100 είναι πάντα γνωστός, αρκεί να ξέρουμε δύο τιμές για να βρούμε την άγνωστη.

Βρίσκω την αρχική τιμή ενός ποσού

Όταν το ζητούμενο σ' ένα πρόβλημα με ποσοστά είναι η αρχική τιμή, για να την υπολογίσουμε αρκεί να γνωρίζουμε το ποσοστό % και μια τιμή ακόμα.

Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε την τιμή που δεν χρειάζεται (π.χ. στο διπλανό παράδειγμα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το κέρδος, δηλαδή την αύξηση).

Σε προβλήματα στα οποία το ποσοστό δηλώνει μέρος του συνόλου και όχι κάποια αύξηση ή μείωση της αρχικής τιμής δεν υπάρχει τελική τιμή.

Παραδείγματα

Πόσο αγοράζει την εφημερίδα το περίπτερο όταν την πουλάει 2 € και το ποσοστό κέρδους είναι 25%;

Λύση: Γνωρίζω το ποσοστό κέρδους στα % και την τελική τιμή πώλησης.

1. Θα υπολογίσω την τελική τιμή όταν η αρχική τιμή είναι 100 €: Αν αγοράζει την εφημερίδα 100 € (αρχική τιμή) και κερδίζει 25 € (κέρδος), άρα την πουλάει 125 € (τελική τιμή).

2. Συμπληρώνω την αναλογία:
$$= \frac{\text{τελική τιμή} \rightarrow 125}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow 100} = \frac{2}{x}$$

$$125 \cdot x = 100 \cdot 2 \quad 125 \cdot x = 200 \quad x = 200 : 125 \quad x = 1,6$$

Απάντηση: Αγοράζει την εφημερίδα 1,6 €.

Στη 2η δραστηριότητα της προηγούμενης σελίδας, πρώτα βρίσκουμε το ποσοστό στην αρχική τιμή, που είναι το μέρος:

$$5 \cdot 120 = 600 \text{ mg ασβέστιο}$$

και μετά την αρχική τιμή, που είναι το σύνολο:

$$\frac{\text{ποσοστό} \rightarrow 75}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow 100} = \frac{600}{x} \quad 75 \cdot x = 600 \cdot 100$$

$$75x = 60000, \text{ άρα } x = 60000 : 75, \text{ άρα } x = 800 \text{ mg ασβέστιο}$$

Εφαρμογή

Ρωτήσαμε κάποιους μαθητές ηλικίας 12 – 14 ετών «πόσο συχνά σερφάρετε στο ίντερνετ;» Οι 210 μαθητές (ποσοστό 70%) απάντησαν «μια φορά την εβδομάδα». Οι υπόλοιποι απάντησαν «μια φορά το μήνα». Πόσοι ήταν οι υπόλοιποι μαθητές;

Λύση

Γνωρίζω το ποσοστό στα % και το ποσοστό στην αρχική τιμή. Δεν ξέρω την αρχική τιμή (πόσοι ήταν όλοι οι μαθητές).

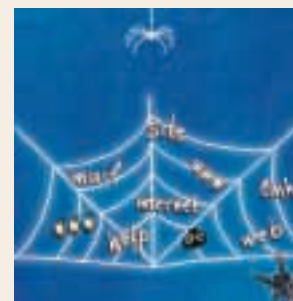
Άρα μπορώ κατευθείαν να συμπληρώσω την αναλογία:

$$\frac{\text{ποσοστό} \rightarrow 70}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow 100} = \frac{210}{x} \quad 70 \cdot x = 210 \cdot 100 \quad 70 \cdot x = \dots\dots\dots$$

$$x = \dots\dots\dots \quad x = \dots\dots\dots \quad \text{Άρα όλοι οι μαθητές ήταν 300.}$$

Οι υπόλοιποι μαθητές ήταν $300 - 210 = 90$

Απάντηση: Οι υπόλοιποι μαθητές ήταν 90.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σχέση: αρχική τιμή - ποσοστό - τελική τιμή και μάθαμε να βρίσκουμε την αρχική τιμή. Μπορείς να εξηγήσεις με ένα δικό σου παράδειγμα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

- ❖ Για να υπολογίσω την αρχική τιμή αρκεί να ξέρω άλλες δύο τιμές.
- ❖ Στα προβλήματα ποσοστών πάντα υπάρχει τελική τιμή.
- ❖ Σε μια έρευνα το δείγμα είναι μέρος του συνολικού πληθυσμού.

Κεφάλαιο 44ο

Λύνω προβλήματα με ποσοστά: Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό

Για να μη λέμε πολλά ...



Κατανοώ την ανάγκη χρήσης του ποσοστού (%).
Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό (%) σε προβλήματα ποσοστών.



Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό πίνακα φαίνεται ο πληθυσμός της Ελλάδας κατά τις απογραφές του 1971 και 2001.

- Τι παρατηρείς σχετικά με τον πληθυσμό των παιδιών (0 – 14 ετών);
- Βρες πόσο μειώθηκε αυτή η πληθυσμιακή ομάδα (μπορείς να χρησιμοποιήσεις υπολογιστή τσέπης)

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΕΛΛΑΔΑΣ ΚΑΤΑ ΦΥΛΟ ΚΑΙ ΟΜΑΔΕΣ ΗΛΙΚΙΩΝ		
	1971	2001
Σύνολο Ελλάδας	8.768.372	10.964.020
0 – 14 ετών	2.223.904	1.666.888
15- 64 ετών	5.587.352	7.423.899
64 ετών και άνω	957.116	1.873.243

- Γιατί δεν είναι εύκολο να εκφράσεις (και να θυμάσαι) τη μείωση και να κάνεις συγκρίσεις χρησιμοποιώντας τις τιμές του πίνακα;
- Για να εκφράσεις τη μείωση ως ποσοστό στους 100 κατοίκους (%), κάτι που είναι πιο εύκολο να διαχειριστείς, τι είναι αυτό που πρέπει να βρεις;

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Μείωση κατοίκων		x
Αρχικός αριθμός κατοίκων		100

- Συμπλήρωσε τον πίνακα ποσών και τιμών. Μπορείς να συνεχίσεις με όποια μέθοδο θέλεις για να βρεις την τιμή του άγνωστου.
- Αυτό που θα βρεις είναι ότι από το 1971 ως το 2001, ο πληθυσμός της Ελλάδας στην ηλικιακή ομάδα 0 – 14 ετών παρουσίασε μείωση%.

Δραστηριότητα 2η

Ένα μαγαζί διαφημίζει εκπτώσεις από 10% ως 40%. Βλέπεις ένα τζην μπουφάν του οποίου η αρχική τιμή ήταν 38 € και η τελική 28,5 €. Πόσο στα εκατό (%) ήταν η έκπτωση;



- Συμπλήρωσε το λόγο $\frac{\quad}{100}$, βάζοντας στη θέση του άγνωστου μια μεταβλητή.
- Γράψε τώρα με λόγια τους όρους σ' αυτό το κλάσμα: _____
- Αφού θέλεις να βρεις κατευθείαν την έκπτωση στα 100 €, τι πρέπει να βρεις πρώτα για να φτιάξεις τον πίνακα ποσών και τιμών με τα δεδομένα που σου χρειάζονται;
- Κάνε αυτή την πράξη με το νου και συμπλήρωσε τον πίνακα:

ΠΟΣΑ	ΤΙΜΕΣ	
Έκπτωση		
		100

- Τώρα μπορείς να συμπληρώσεις την αναλογία: $\frac{\text{έκπτωση} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} = \frac{\quad}{100}$
- Μπορείς να το λύσεις με όποια άλλη από τις μεθόδους των ανάλογων ποσών θέλεις.

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι σε πολλές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να εκφράσουμε ένα μέρος ενός ποσού ως ποσοστό στα εκατό (%).

Βρίσκω το ποσοστό στα εκατό (%)

Η τιμή στην οποία υπολογίζεται το ποσοστό είναι η αρχική τιμή.

Όταν το ζητούμενο σε ένα πρόβλημα είναι το ποσοστό %, δηλαδή το ποσοστό σε αρχική τιμή 100, για να το βρούμε πρέπει να γνωρίζουμε την αρχική τιμή και την αύξηση ή τη μείωση στην αρχική τιμή.

Αν γνωρίζουμε την τελική τιμή και δεν γνωρίζουμε την αρχική τιμή ή το ποσοστό αύξησης ή μείωσης στην αρχική, μπορούμε να υπολογίσουμε πρώτα αυτό που δεν γνωρίζουμε και μετά να συνεχίσουμε για να βρούμε το ποσοστό στα εκατό (%).

Παραδείγματα

Ένα βιβλιοπωλείο αγοράζει ένα βιβλίο 8 € και το πουλά 14 €. Πόσο στα εκατό (%) είναι το κέρδος του;

Λύση: Γνωρίζω την τιμή αγοράς (αρχική τιμή) και την τιμή πώλησης (τελική τιμή).

α. Υπολογίζω το ποσοστό κέρδους στην αρχική τιμή:

$$14 - 8 = 6 \text{ € κέρδος}$$

β. Συμπληρώνω την αναλογία: $\frac{\text{κέρδος} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} = \frac{6}{8} = \frac{x}{100}$

$$8 \cdot x = 6 \cdot 100 \quad \text{άρα } 8 \cdot x = 600 \quad x = 600 : 8 \quad x = 75$$

Απάντηση: Το κέρδος του είναι 75%.

Στη 2η δραστηριότητα της προηγούμενης σελίδας, πρώτα βρίσκουμε την έκπτωση στην αρχική τιμή:

$$38 - 28,50 = 9,50 \text{ € έκπτωση}$$

και μετά την έκπτωση στα 100, δηλαδή το ποσοστό %

$$\frac{\text{έκπτωση} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} = \frac{9,50}{38} = \frac{x}{100} \quad 38 \cdot x = 9,50 \cdot 100$$

$$38 \cdot x = 950 \quad \text{άρα } x = 950 : 38 \quad x = 25\% \text{ έκπτωση}$$



Εφαρμογή

Το οικοπέδο του σχολείου έχει μήκος 60 μέτρα και πλάτος 45 μέτρα. Το κτίριο καταλαμβάνει 675 τετραγωνικά μέτρα και το υπόλοιπο είναι αυλή. Τι ποσοστό στα 100 (%) της επιφάνειας του οικοπέδου είναι χτισμένο και τι ποσοστό είναι ακάλυπτο;

Λύση:

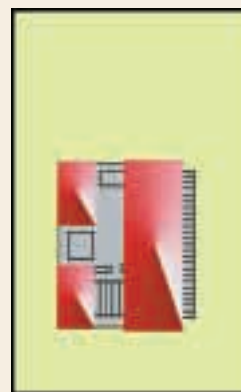
α. Βρίσκω τη συνολική έκταση του οικοπέδου (αρχική τιμή), που είναι η τιμή στην οποία θα υπολογίσω το ποσοστό: $60 \cdot 45 = 2700$ τετραγωνικά μέτρα

β. Το ποσοστό κάλυψης του οικοπέδου είναι 675 στα 2.700.

γ. Συμπληρώνω την αναλογία: $\frac{\text{ποσοστό} \rightarrow}{\text{αρχική τιμή} \rightarrow} = \frac{675}{2700} = \frac{x}{100}$

$$2700 \cdot x = 675 \cdot 100 \quad 2700 \cdot x = \dots \quad x = \dots \quad x = \dots$$

Απάντηση: Το ποσοστό στα 100 (%) της επιφάνειας του οικοπέδου που είναι χτισμένο είναι 25% και το ακάλυπτο μέρος είναι το υπόλοιπο, δηλαδή 75%.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τη σχέση **αρχική τιμή - ποσοστό - τελική τιμή** και μάθαμε να βρίσκουμε το ποσοστό %. Μπορείς να εξηγήσεις με ένα δικό σου παράδειγμα;

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

❖ Στο ποσοστό % το 100 είναι αρχική τιμή.

❖ Για να βρω το ποσοστό % πρέπει να ξέρω το ποσοστό στην αρχική τιμή.

Λόγοι - Αναλογίες Όταν μιλάμε συμβολικά

• Ανάλογα ποσά

πίνακας

α	3	4	6	8
β	6	8	12	16

σχέση

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16} = 0,5 \quad \frac{\alpha}{\beta} = 0,5$$

• Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

α	4	5	8	10
β	10	8	5	4

$$4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 40 \quad \alpha \cdot \beta = 40$$

- Ποσοστό
- Ποσοστό %
- Αρχική τιμή
- Τελική τιμή

- μέρος κάποιου ποσού που δηλώνει τη σχέση *μέρος προς ποσό*
- ένα μέρος του 100 που εκφράζεται ως λόγος, ως δεκαδικός ή με το σύμβολο %
- η τιμή του αρχικού ποσού πάνω στην οποία υπολογίζεται το ποσοστό
- η τιμή που προκύπτει όταν το ποσοστό αφαιρεθεί ή προστεθεί στην αρχική τιμή

- η σχέση που τα συνδέει

- φαίνεται συμβολικά στο σχήμα:



Βρίσκουμε το ποσοστό

- όταν γνωρίζουμε το μέρος και την αρχική τιμή
- όταν γνωρίζουμε το ποσοστό στα εκατό (%) και την αρχική τιμή

- κάνουμε διαίρεση π.χ.:

ποσοστό 3 στα 12 $\frac{3}{12}$ δηλαδή $3 : 12 = 0,25$

- κάνουμε πολλαπλασιασμό π.χ.:

το 25% του 12 $\frac{25}{100} \cdot 12 = \frac{300}{100} = 3$

Βρίσκουμε την τελική τιμή

- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και το ποσοστό αύξησης ή μείωσης
- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και το ποσοστό στα εκατό (%), υπάρχουν δύο τρόποι εργασίας

- κάνουμε πρόσθεση ή αφαίρεση π.χ.:

αύξηση 3 στα 12 τελική τιμή $12 + 3 = 15$

- **α.** βρίσκουμε πρώτα το ποσοστό αύξησης ή μείωσης (με πολλαπλασιασμό)

- **β.** βρίσκουμε την τελική τιμή στα 100 με το νου και σχηματίζουμε αναλογία

Βρίσκουμε την αρχική τιμή

- όταν γνωρίζουμε το ποσοστό % και το ποσοστό στην αρχική τιμή
- όταν γνωρίζουμε το ποσοστό στα εκατό (%) και την τελική τιμή

- σχηματίζουμε αναλογία

- βρίσκουμε πρώτα την τελική τιμή στα 100 με το νου

Βρίσκουμε το ποσοστό %

- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και το ποσοστό στην αρχική τιμή
- όταν γνωρίζουμε την αρχική τιμή και την τελική τιμή

- σχηματίζουμε αναλογία

- βρίσκουμε πρώτα το ποσοστό αύξησης ή μείωσης (με αφαίρεση)

Χρυσί κανόνες

Η τιμή του ποσού στην οποία υπολογίζεται το ποσοστό, για το πρόβλημα ποσοστών, λέγεται αρχική τιμή (ακόμα κι αν είναι η τιμή πώλησης ενός προϊόντος).

Τα ποσά στα ποσοστά είναι πάντα ανάλογα. Τα προβλήματα ποσοστών λύνονται με τις μεθόδους λύσης των ανάλογων ποσών (αναγωγή στη μονάδα, αναλογία, απλή μέθοδο των τριών). Επειδή υπάρχει πάντα η τιμή 100, γνωρίζοντας δύο τιμές, μπορούμε να βρούμε τις άλλες δύο, αρκεί να προσέξουμε στην κατάταξη. Μπορεί να χρειάζεται νοερή πράξη στα 100.



1ο Πρόβλημα “Οι εκλογές”

Στους εκλογικούς καταλόγους είναι γραμμένα 16.000 άτομα. Από αυτά ψήφισαν στις δημοτικές εκλογές 85%. Η παράταξη Α΄ πήρε 51%, ενώ παράταξη Β΄ πήρε 34% των ψήφων. Οι υπόλοιποι ψήφισαν λευκό ή άκυρο. Πόσα άτομα ψήφισαν και πόσες ψήφους πήρε κάθε παράταξη;

Λύση



Απάντηση:

2ο Πρόβλημα “Οι εκπτώσεις”

Η Γεωργία έχει αναλάβει την έρευνα αγοράς για να αγοράσει 25 κρεμαστά με ασημένιες μικρές πλακέτες για αναμνηστικά για την Στ΄ τάξη.

Βρήκε την ίδια πλακέτα σε δύο καταστήματα. Η αρχική τιμή της ήταν και στα δύο 10 €. Το πρώτο κατάστημα είχε βάλει έκπτωση αρχικά 25% και τώρα 10% στην τιμή της έκπτωσης, ενώ το δεύτερο κατάστημα είχε αρχικά έκπτωση 10% και τώρα ακόμη 25%. Υπάρχει διαφορά στην τιμή;

Λύση



Απάντηση:

3ο Πρόβλημα “Κέρδος πάνω στο κέρδος”

Μια αυτοκινητοβιομηχανία πουλάει τα αυτοκίνητα στις αντιπροσωπίες με 20% κέρδος στην τιμή κόστους. Ο αντιπρόσωπός της στην Ελλάδα τα πουλάει με κέρδος 10% στην τιμή αγοράς τους. Ο κ. Παπαγεωργίου αγόρασε το αυτοκίνητό του από τον αντιπρόσωπο και πλήρωσε 9.900 €. Ποιο ήταν το κόστος κατασκευής του αυτοκινήτου;

Λύση

Απάντηση: