

Εξισώσεις

ΤΙΤΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΙΤΛΟΣ	ΣΕΛΙΔΑ
25. Η εξερεύνηση του άγνωστου!	Η έννοια της μεταβλητής	61
26. Μαθαίνω να ισορροπώ!	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι προσθετός	63
27. Μαθηματικά σε κίνηση!	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος	65
28. Ο άγνωστος πολλαπλασιάζεται!	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου	67
29. Αντανακλάσεις...	Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης	69
Όταν ο άγνωστος αποκαλύπτεται	Ανακεφαλαίωση για τη θεματική ενότητα 2: Εξισώσεις	71



Εξισώσεις

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τις εξισώσεις. Με άλλα λόγια, με τη χρήση γραμμάτων ή συμβόλων στη θέση ενός αριθμού που δεν γνωρίζουμε.

Από την 8η χιλιετία π.Χ. οι κάτοικοι της Μεσοποταμίας, πολύ πριν από τους Σουμέριους, χρησιμοποιούσαν ένα σύστημα αριθμητικής καταγραφής βασισμένο σε μικρές πήλινες «μάρκες». Από εκεί πληροφορούμαστε ότι χρησιμοποιούσαν αριθμητικές μεθόδους πολύ πιο εξελιγμένες από την απλή καταμέτρηση γεωργικών προϊόντων και τους απλούς εμπορικούς και οικονομικούς σκοπούς της εποχής τους.

Βρέθηκαν στις «μάρκες» προβλήματα της εποχής εκείνης που απαιτούν τη χρήση εξισώσεων για την επίλυσή τους. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω πρόβλημα.

*Βρήκα μια πέτρα. Δεν (τη) ζύγισα. Αφαίρεσα το ένα έβδομο.
Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο. Αφαίρεσα το ένα δέκατο τρίτο. (Τη)
ζύγισα. Ποιο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας;*

Φαίνεται πως τα Μαθηματικά ήταν για τους κατοίκους της Μεσοποταμίας ένα απαραίτητο εργαλείο με το οποίο μπορούσαν να αποκρυπτογραφήσουν τις κινήσεις του Ουρανού και μια γλώσσα με την οποία μπορούσαν να επικοινωνήσουν και να καταλάβουν τους θεούς τους.

Κεφάλαιο 25ο

Η έννοια της μεταβλητής

Η εξερεύνηση του άγνωστου!

Κατανόω την έννοια «μεταβλητή».

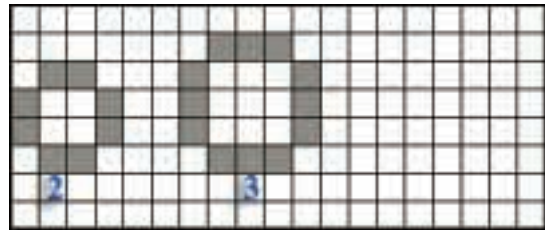
Χρησιμοποιώ μεταβλητές για να εκφράσω τις σχέσεις στις εκφράσεις, τις ισότητες, τις ανισότητες και τις γεωμετρικές σχέσεις. Επιλέγω μεταβλητές και σχηματίζω αριθμητικές παραστάσεις.



Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό σχήμα σχεδιάσαμε σε μιλιμετρέ χαρτί το γράμμα «Ο» σε δύο μεγέθη. Ανάλογα με την πλευρά του καθενός τα ονομάσαμε μέγεθος 2 και μέγεθος 3.

- Συνέχισε βάφοντας όσα τετράγωνα χρειάζεται για να σχηματιστεί το επόμενο μέγεθος (μέγεθος 4).
- Πόσα τετράγωνα πρέπει να βάψεις για κάθε πλευρά;



- Συμπλήρωσε στο διπλανό πίνακα το συνολικό αριθμό από σκιασμένα τετράγωνα που χρειάζεται για να σχηματιστεί κάθε μέγεθος.

Μέγεθος του γράμματος	2	3	4	9	12
Τετράγωνα που χρειάζονται					

- Παρατήρησε τον πίνακα και εξήγησε με ποιον τρόπο μεταβάλλεται ο συνολικός αριθμός των τετραγώνων όταν μεταβάλλεται ο αριθμός των τετραγώνων της πλευράς.
- Η σχέση του συνολικού αριθμού τετραγώνων με το μέγεθος είναι «...επί το μέγεθος» ή ο συνολικός αριθμός τετραγώνων ισούται με το γινόμενο «..... • μ» (όπου μ το μέγεθος).
- Υπολόγισε με το σύντομο τρόπο ($4 \cdot \mu$) τα συνολικά τετράγωνα για το μέγεθος 17.
.....
- Τι μεγέθους είναι το όμικρον που έχει 132 τετράγωνα;

Δραστηριότητα 2η

Στον παρακάτω πίνακα συμπλήρωσε τις ηλικίες του Κώστα και της Σμαρώς για κάθε χρονιά. Μετά απάντησε στις ερωτήσεις.

Χρονιά	Ηλικία Σμαρώς	Ηλικία Κώστα
2006	12	16
2007		
2008		
2009		
2010		



- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι 12, η ηλικία του Κώστα θα είναι: $12 + \dots$
- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι 25, η ηλικία του Κώστα θα είναι: $25 + \dots$
- Όταν η ηλικία της Σμαρώς είναι x , η ηλικία του Κώστα θα είναι:

Έχουμε μάθει ότι μια αριθμητική παράσταση περιέχει αριθμούς και πράξεις. Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι μπορεί να περιέχει και **γράμματα**.

Άγνωστος / Μεταβλητή

Το **γράμμα** ή το **σύμβολο** που χρησιμοποιείται σε μια αριθμητική παράσταση στη θέση μιας τιμής άγνωστης ή μεταβαλλόμενης λέγεται **μεταβλητή**.

Παραδείγματα

Εμβαδό τετραγώνου: a^2 ,
όπου a = το μήκος της πλευράς του.



Εφαρμογή 1η Επιλέγω μεταβλητή

Να εκφράσετε με μια αριθμητική παράσταση τη φράση: «Έφαγαν όλα τα γλυκά! Αυτά που έφερε η Σοφία, τα 4 που έφερε η Φρόσω και τα 10 που έφερα εγώ.»

Λύση

Οποιοδήποτε γράμμα (ή σύμβολο) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή και μια μεταβλητή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θέση οποιουδήποτε αριθμού. Για να εκφράσουμε μια φράση με αριθμητική παράσταση ακολουθούμε τρία βήματα:

1. Προσδιορίζουμε την άγνωστη ποσότητα.
2. Επιλέγουμε μια μεταβλητή για την άγνωστη ποσότητα.
3. Προσδιορίζουμε τις πράξεις ανάμεσα στους αριθμούς και τη μεταβλητή.

Στη συγκεκριμένη φράση:

1. Έχουμε έναν άγνωστο: τα γλυκά που έφερε η Σοφία.
2. Επιλέγουμε σ = τα γλυκά της Σοφίας.
3. Έφαγαν τα γλυκά της Σοφίας, συν 4, συν 10. Άρα έφαγαν $\sigma + 4 + 10$, δηλαδή $\sigma + 14$.

Θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης όταν μάθουμε τον αριθμό που αντιπροσωπεύει η μεταβλητή της.

Απάντηση: Έφαγαν $\sigma + 14$, όπου σ τα γλυκά της Σοφίας.



Εφαρμογή 2η Υπολογίζω τις τιμές

Με βάση το σχήμα να εκφράσεις τις σχέσεις ανάμεσα στα μεγέθη των ωκεανών χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή. Αν ο Ατλαντικός έχει έκταση 100.000.000 τετρ. χλμ. υπολόγισε την έκταση των άλλων ωκεανών.

Λύση - Απάντηση

1^ο βήμα: Συμβολίζω την έκταση του Ατλαντικού με ένα γράμμα. Π.χ. το a και γράφω:

Η έκταση του Ατλαντικού: a

Η έκταση του ΕιρηνικούΤΕΤΡ. ΧΜ.

Η έκταση του Ινδικού:ΤΕΤΡ. ΧΜ

2^ο βήμα: Αντικαθιστώ τη μεταβλητή a με την τιμή της (100.000.000) και κάνω τις πράξεις.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο: **μεταβλητή**. Χρησιμοποίησε μια μεταβλητή σε ένα δικό σου παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

- ❖ Στην αριθμητική παράσταση $2 \cdot (a - 1)$ δεν υπάρχει μεταβλητή.
- ❖ Το γινόμενο a^2 είναι το εμβαδό τετραγώνου με πλευρά 2.
- ❖ Η ισότητα $2x = 2 \cdot x$ είναι σωστή.



Κεφάλαιο 26ο

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι προσθετός

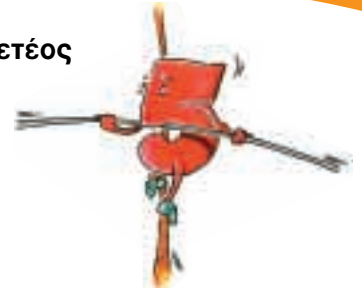
Μαθαίνω να ισορροπώ!



Σχηματίζω την εξίσωση ενός προβλήματος.

Λύνω μια εξίσωση με δοκιμές και έλεγχο.

Λύνω μια εξίσωση χρησιμοποιώντας την αφαίρεση ως αντίστροφη πράξη της πρόσθεσης.



Δραστηριότητα 1η

Η Δέσποινα πήγε στο σχολείο με μερικά ψιλά στην τσέπη της. Στο δρόμο βρήκε 23 λεπτά. Όταν έφτασε στο σχολείο και μέτρησε τα λεφτά της είδε ότι είχε 1,13 €. Πόσα χρήματα είχε άραγε όταν έφυγε από το σπίτι;

- Χρησιμοποίησε μια μεταβλητή για να συμβολίσεις το ποσό που μας ζητάει να βρούμε.

.....

- Μπορείς με τη βοήθεια της μεταβλητής που επέλεξες και τα ποσά που ήδη γνωρίζεις να εκφράσεις με μια ισότητα την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα;

.....

- Γράψε την ισότητα:

- Οι φίλοι της Δέσποινας διαφωνούν για τα λεπτά που είχε στην τσέπη της. Ο Ανδρέας λέει ότι ήταν 80, η Ειρήνη 85, ο Χρήστος 90 και η Πόπη 95 λεπτά. Ποιος έχει δίκιο και γιατί;

.....



Δραστηριότητα 2η

Η Μαρία αγόρασε στις διακοπές της ένα καλοκαιρινό μπλουζάκι που κόστιζε 12,50 € και ζήτησε από το κατάστημα να προσθέσουν επάνω μια σιδερότυπη στάμπα με το όνομά της. Στο τέλος πλήρωσε 18,40 €. Πόσο στοιχίζει η στάμπα;

- Χρησιμοποίησε μια μεταβλητή για να συμβολίσεις το ποσό που μας ζητάει να βρούμε, και σχημάτισε την ισότητα με τα στοιχεία του προβλήματος:

.....

- Αν η Μαρία μετανιώσει για τη στάμπα που πρόσθεσε στο μπλουζάκι της μπορεί να αναρέσει αυτή τη διαδικασία;

- Οι ενέργειες που αναιρούν η μία την άλλη λέγονται

Γράψε τις αντίστροφες στις πιο κάτω ενέργειες:

Ανεβαίνω Προσθέτω

- Στα μαθηματικά αναιρείται η πρόσθεση;

- Αν ναι με ποιον τρόπο;

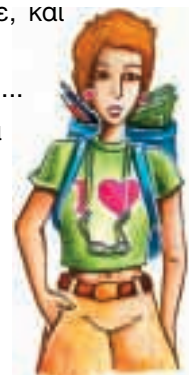
- Με βάση τις αντίστροφες πράξεις γράψε τις αφαιρέσεις που προκύπτουν από μια πρόσθεση, για παράδειγμα: $5 + 3 = 8$

..... - = και - =

- Εφαρμόζοντας τις αντίστροφες πράξεις, τι θα κάνεις για να βρεις τον άγνωστο προσθετέο στην ισότητα που έγραψες για το πρόβλημα;

.....

.....



Από τα προηγούμενα διαπιστώνουμε ότι ένα πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί συμβολικά με μια ισότητα βάζοντας στη θέση του άγνωστου ποσού μια μεταβλητή.

Παραδείγματα

Εξίσωση

Μια ισότητα που περιέχει μια μεταβλητή, λέγεται **εξίσωση** με έναν άγνωστο.

$$x + 5 = 12$$

Η τιμή που επαληθεύει την εξίσωση ονομάζεται **λύση της εξίσωσης**.

Η λύση της εξίσωσης $x + 5 = 12$ είναι ο αριθμός 7. Αν αντικαταστήσω τη μεταβλητή με το 7 έχω $7 + 5 = 12$

Όταν ο άγνωστος έχει τη θέση **προσθετέου**, για να λύσω την εξίσωση **αφαιρώ από το άθροισμα τον άλλο προσθετέο**.

Η λύση της εξίσωσης $x + 5 = 12$ είναι $x = 12 - 5$

Η εξίσωση μοιάζει με μια ζυγαριά που ισορροπεί. Αν πρέπει να αφαιρέσω έναν αριθμό από τη μία πλευρά, για να συνεχίσει να ισορροπεί, πρέπει να αφαιρέσω τον ίδιο αριθμό κι από την άλλη.



Εφαρμογή 1η Η εξίσωση σαν ζυγαριά

Σε μια ζυγαριά με δύο δίσκους τοποθετούμε στον έναν βάρος 115 γραμμαρίων και στον άλλο 45 γραμμάρια. Πόσο βάρος πρέπει να τοποθετήσουμε ακόμη, ώστε να ισορροπήσει η ζυγαριά; Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής, γράψε την εξίσωση που περιγράφει την κατάσταση αυτή και υπολόγισε τον άγνωστο.



Λύση

1. Ονομάζω την άγνωστη τιμή x . Η εξίσωση στη ζυγαριά είναι $45 + x = 115$.
2. Σκέφτομαι πως για να ισορροπήσει η ζυγαριά πρέπει τα βάρη στους δυο δίσκους να είναι ίσα. Υπολογίζω με το νου πόσο είναι το x , προσθέτοντας όσο βάρος χρειάζεται στο 45 ώστε να γίνει 115. Έτσι $45 + \dots = 115$. Άρα $x = \dots$

Απάντηση: Πρέπει ναβάλουμε ακόμη \dots γραμμάρια στο δίσκο.

Εφαρμογή 2η Λύση εξίσωσης με τις αντίστροφες πράξεις

Ο Λευτέρης είχε 16 κάρτες ποδοσφαιριστών, όταν άρχισε να παίζει με τον Γιώργο και κέρδισε μερικές από αυτόν. Τώρα έχει 27 κάρτες. Πόσες κάρτες κέρδισε από τον Γιώργο; Να εκφράσεις με εξίσωση το πρόβλημα και να το λύσεις.

Λύση

1. Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των καρτών που κέρδισε ο Λευτέρης. Την ονομάζω k .
2. Η εξίσωση είναι $16 + k = 27$. Για να λύσω την εξίσωση αφαιρώ από το άθροισμα τον άλλο προσθετέο:
3. $k = \dots - \dots$. Άρα $k = \dots$

Απάντηση: Ο Λευτέρης κέρδισε \dots κάρτες από τον Γιώργο.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **εξίσωση** και **άγνωστος προσθετέος** και μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις πρόσθεσης. Παρουσίασε ένα δικό σου παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

❖ Λύση μιας εξίσωσης είναι η τιμή του άγνωστου που επαληθεύει την εξίσωση.

Σωστό **Λάθος**

❖ Η λύση της εξίσωσης $15 + a = 15$ είναι το 1.

❖ Σε μια εξίσωση πρόσθεσης, κάνεις αφαίρεση για να τη λύσεις.



Κεφάλαιο 27ο

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος

Μαθηματικά σε κίνηση!



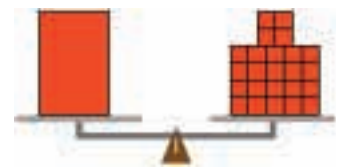
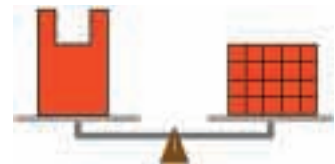
Σχηματίζω την εξίσωση ενός προβλήματος.
Χρησιμοποιώ τις αντίστροφες πράξεις της αφαίρεσης
για να λύσω μια εξίσωση.



Δραστηριότητα 1η

Στη διπλανή ζυγαριά από έναν άγνωστο αριθμό κύβων (κ) αφαιρώ 4 κύβους και η ζυγαριά ισορροπεί.

- Γράψε την εξίσωση που περιγράφει αυτή την ισορροπία:
.....
- Κατόπιν προσθέτω 4 κύβους σε κάθε πλευρά.
- Εξήγησε: Γιατί η ζυγαριά συνεχίζει να ισορροπεί;
.....
- Αρχικά στον αριστερό δίσκο είχαμε $\kappa - 4$ κύβους. Τώρα πόσους έχουμε;
.....
- Γράψε την ισότητα που περιγράφει τώρα την ισορροπία
.....
- Παρατηρώντας τις αλλαγές που έγιναν, μπορείς να διατυπώσεις έναν κανόνα για τον τρόπο που βρίσκουμε τη λύση όταν ο άγνωστος της εξίσωσης είναι μειωτέος;
.....



Δραστηριότητα 2η

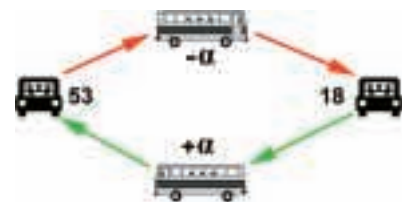
Οι 53 αθλητές του σχολείου ανέβηκαν στο λεωφορείο που θα τους μετέφερε στο στάδιο. Τα αγόρια κατέβηκαν στην κεντρική είσοδο. Το λεωφορείο στη συνέχεια μετέφερε τις 18 αθλήτριες σε άλλη είσοδο στην άλλη πλευρά του σταδίου. Πόσα ήταν τα αγόρια;

- Χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή (α) γράψε την εξίσωση που εκφράζει το πρόβλημα:
.....

- Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η **μετάβαση** στο στάδιο και η **επιστροφή** των παιδιών.
- Παρατήρησε τη σχέση που έχει το σύνολο των παιδιών (53) με τον αριθμό των αγοριών και των κοριτσιών και απάντησε στην ερώτηση:

Τι θα κάνεις για να βρεις πόσα είναι τα αγόρια;

- Υπολόγισε την τιμή του άγνωστου στην εξίσωση που έγραψες:
.....
- Μπορείς να διατυπώσεις και να γράψεις έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι αφαιρετέος;
.....
- Γράψε την εξίσωση που εκφράζει την **επιστροφή των παιδιών** και υπολόγισε την τιμή του άγνωστου:
.....



Ολοκληρώνοντας τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι:

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι μειωτέος

Όταν ο άγνωστος είναι ο **μειωτέος**, για να λύσω την εξίσωση προσθέτω στη διαφορά τον αφαιρετέο.

Παραδείγματα

Η λύση της εξίσωσης $x - 5 = 12$ είναι: $x = 12 + 5$

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι αφαιρετέος

Όταν ο άγνωστος είναι ο **αφαιρετέος**, για να λύσω την εξίσωση αφαιρώ από τον μειωτέο τη διαφορά.

Η λύση της εξίσωσης $18 - x = 7$ είναι: $x = 18 - 7$

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν προσθέσω και στα δυο μέρη τον ίδιο αριθμό.



Εφαρμογή 1η Σχηματίζω και λύνω εξισώσεις

Η Δήμητρα πριν φύγει για το μάθημα της Μουσικής, πήρε από το πορτοφόλι της βιαστικά μερικά κέρματα και πήγε στο βιβλιοπωλείο. Αγόρασε ένα τετράδιο πενταγράμμου που έκανε 2,90 € και ένα ντοσιέ για τα φύλλα των ασκήσεων που έκανε 3,50 €. Όταν γύρισε είδε ότι είχε στην τσέπη της 2,30 €. Προσπάθησε να σχηματίσεις την εξίσωση και να υπολογίσεις πόσα χρήματα είχε πάρει από το πορτοφόλι.



Λύση Ονομάζω x την άγνωστη τιμή (τα χρήματα που πήρε).

α' τρόπος: Σχηματίζω την εξίσωση: $x - (2,90 + 3,50) = 2,30$.

Κάνω πρώτα την πράξη στην παρένθεση: $x - 6,40 = 2,30$.

Για να λύσω την εξίσωση, προσθέτω στη διαφορά τον αφαιρετέο:

$x = 2,30 + 6,40$. Άρα $x = 8,70$. Επαληθεύω την εξίσωση: $8,70 - (2,90 + 3,50) = 2,30$

Απάντηση: Είχε πάρει 8,70 € από το πορτοφόλι της.

β' τρόπος: $x - 2,30 = 2,90 + 3,50$

γ' τρόπος: $x = 2,90 + 3,50 + 2,30$

Εφαρμογή 2η Πόσα χρήματα του έπεσαν;

Ο Αριστοτέλης ξεκίνησε για το σχολείο με 1,20 € στην τσέπη του. Όταν έφτασε στο σχολείο, διαπίστωσε ότι η τσέπη του ήταν τρύπια και του είχαν μείνει μόνο 85 λεπτά. Πόσα χρήματα του έπεσαν στο δρόμο; Να εκφράσεις με μια εξίσωση το πρόβλημα του Αριστοτέλη και μετά να το λύσεις.



Λύση

Άγνωστη τιμή είναι τα λεπτά που έχασε ο Αριστοτέλης. Την ονομάζω λ .

Με βάση το πρόβλημα σχηματίζω την εξίσωση: $1,20 - \lambda = 0,85$.

Για να λύσω την εξίσωση αφαιρώ από τον μειωτέο τη διαφορά:

$\lambda = \dots - \dots$. Άρα $\lambda = \dots$. Επαληθεύω την εξίσωση: $1,20 - \dots = 0,85$

Απάντηση: Του έπεσαν 35 λεπτά.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε να βρίσκουμε τον άγνωστο όταν είναι **μειωτέος** ή **αφαιρετέος** σε μια εξίσωση. Παρουσίασε ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- | | Σωστό | Λάθος |
|--|--------------------------|--------------------------|
| ❖ Για να κάνω επαληθευση, αντικαθιστώ τη μεταβλητή με την τιμή της. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ❖ Για να «ισορροπήσουν» τα δυο μέρη μιας εξίσωσης αρκεί να προσθέσω ή να αφαιρέσω τον ίδιο αριθμό και από τα δυο μέρη. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ❖ Οι εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος λύνονται με μια πρόσθεση. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Κεφάλαιο 28ο

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου

Ο άγνωστος πολλαπλασιάζεται!



Μελετώ τον τύπο του εμβαδού ως εξίσωση.
Σχηματίζω τις αντίστροφες πράξεις του πολλαπλασιασμού.
Λύνω εξισώσεις όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου.

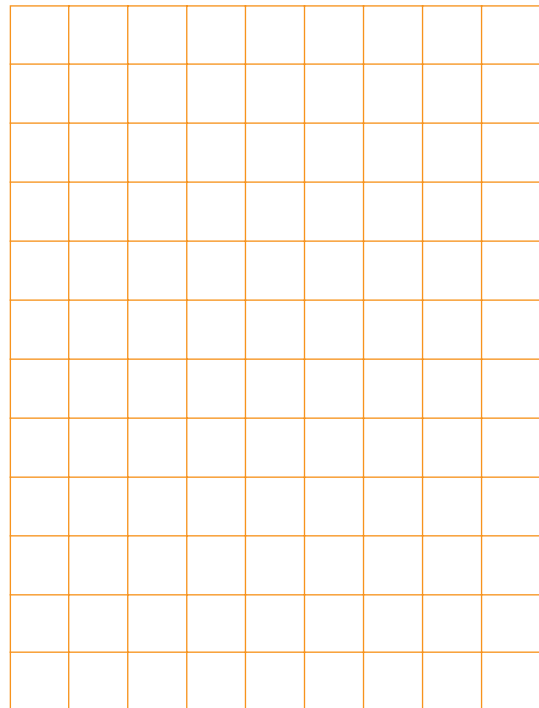
Δραστηριότητα 1η

Στο διπλανό πλαίσιο κάθε τετραγωνάκι είναι 1 τετραγωνικό εκατοστό. Με 3 διαφορετικά χρώματα, να σχεδιάσεις 3 διαφορετικά ορθογώνια με εμβαδό 24 τετραγωνικά εκατοστά το καθένα.

Μήκος	Πλάτος (εκ.)	Εμβαδό (τ.εκ.)
4	6	24

- Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα με τα στοιχεία των ορθογωνίων που σχεδίασες (το πλάτος είναι οριζόντια):
- Τι παρατηρείς για τη σχέση του εμβαδού με το μήκος και το πλάτος;
- Χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή για το μήκος, μία για το πλάτος και μία για το εμβαδό, γράψε την εξίσωση που δείχνει πώς σχετίζονται το μήκος, το πλάτος και το εμβαδό σε ένα ορθογώνιο:

.....



Δραστηριότητα 2η

- Γνωρίζοντας το εμβαδό ενός ορθογωνίου και τη μία από τις δύο πλευρές του, γράψτε με ποιο τρόπο θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την άλλη πλευρά.

.....

- Γράψτε τις διαιρέσεις που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό: $5 \cdot 3 = 15$

..... = : και = :

- Σε ένα ορθογώνιο το πλάτος είναι 3 εκατοστά και το εμβαδό 36 τ. εκ. Να σχηματίσετε την εξίσωση του εμβαδού και να βρείτε την τιμή του άγνωστου:

.....

- Μπορείτε να διατυπώσετε και να γράψετε έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου;

.....

.....



Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

Παραδείγματα

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου

Όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου, για να λύσουμε την εξίσωση διαιρούμε το γινόμενο με τον άλλο παράγοντα.

Η λύση της εξίσωσης $x \cdot 5 = 20$ είναι: $x = 20 : 5$

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν διαιρέσω και τα δυο μέρη με τον ίδιο αριθμό.



Εφαρμογή 1η

Η Μαργαρίτα πολλές φορές για να βοηθήσει τη θεία της και να βγάλει χαρτζιλίκι, προσέχει το μικρό ανιψάκι της. Πληρώνεται με 3 € την ώρα. Χρειάζεται να μαζέψει 165 €. Πόσες ώρες πρέπει να κρατήσει το παιδί;

Λύση

- ❖ Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των ωρών (ω) που πρέπει να κρατήσει το παιδί
- ❖ Γράφω την εξίσωση: $\dots \cdot \omega = 165$
- ❖ Κάνω την αντίστροφη πράξη: $\omega = \dots : \dots$. Άρα $\omega = \dots$
- ❖ Επαλήθευση: αντικαθιστώ τη μεταβλητή με την τιμή στην αρχική εξίσωση και κάνω την πράξη: $3 \cdot \dots = 165$

Απάντηση:

Πρέπει να κρατήσει το παιδί για \dots ώρες (!)



Εφαρμογή 2η

Ο Δημοσθένης ξέρει πως, όταν γράφει τις εργασίες του στον υπολογιστή, η σελίδα χωράει περίπου 250 λέξεις. Πρέπει να γράψει μια εργασία 1.500 λέξεων. Πόσες σελίδες θα είναι; Λύστε το πρόβλημα με εξίσωση.

Λύση

- ❖ Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των σελίδων που θα χρειαστούν. Την ονομάζω σ .
- ❖ Η εξίσωση είναι $250 \cdot \sigma = 1.500$.
- ❖ Κάνω την αντίστροφη πράξη: $\sigma = 1500 : 250$. Άρα $\sigma = 6$.
- ❖ Επαλήθευση: $250 \cdot 6 = 1.500$

Απάντηση:

Η εργασία θα είναι 6 σελίδες.



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό μάθαμε πώς να λύνουμε εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου. Δώσε ένα δικό σου παράδειγμα μιας τέτοιας εξίσωσης.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

- ❖ Η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού είναι η διαίρεση.
- ❖ Η εξίσωση $a \cdot 10 = 10$ δεν έχει λύση.
- ❖ Η εξίσωση $6x = 18$ εκφράζει το εξής πρόβλημα: «Αγόρασα 6 περιοδικά και ξόδεψα x €. Κάθε περιοδικό κόστιζε 18 €. Πόσα € ξόδεψα;»

Σωστό Λάθος

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Κεφάλαιο 29ο

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης

Αντανακλάσεις...



Σχηματίζω τις αντίστροφες πράξεις μιας διαίρεσης.
Χρησιμοποιώ τις αντίστροφες πράξεις για να λύσω μια εξίσωση όταν ο άγνωστος έχει τη θέση του διαιρετέου ή του διαιρέτη.



Δραστηριότητα 1η

Μετά από μια εκπαιδευτική επίσκεψη στους χώρους του εργοστάσιου χαρτοποιίας, ο υπεύθυνος έδωσε στους μαθητές ένα κιβώτιο με τετράδια (τ) για να τα μοιραστούν. Πόσα ήταν τα τετράδια, αν οι 85 μαθητές του σχολείου πήραν 2 τετράδια ο καθένας;

- Γράψε την εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα
- Υπολόγισε «με το νου» πόσα ήταν τα τετράδια:.....
- Πως σκέφτηκες για να το βρεις;.....
- Γράψε τον πολλαπλασιασμό που προκύπτει από τη διαίρεση:



$$15 : 3 = 5 \quad \dots = \dots \cdot \dots$$

- Αφού διαπίστωσης ότι ο πολλαπλασιασμός είναι η αντίστροφη πράξη της διαίρεσης, με ποιον τρόπο θα λύσεις την εξίσωση;.....
- Με ποιον τρόπο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι διαιρετέος;.....

Δραστηριότητα 2η

Σε πόσες θήκες (θ) μπορούμε να μοιράσουμε τα 176 αυγά της φάρμας όταν κάθε θήκη χωράει 4 αυγά;

- Γράψε την εξίσωση του προβλήματος:.....
- Στο διπλανό σχήμα η κόκκινη γραμμή ή η πράσινη δείχνει το μοίρασμα των αυγών σε θήκες τεσσάρων θέσεων;
Με ποια πράξη μπορείς να υπολογίσεις πόσες θήκες χρειάζονται;
- Υπολόγισε τις θήκες που χρειάζονται:
- Υπολόγισε με τον ίδιο τρόπο την τιμή του άγνωστου στην εξίσωση που έγραψες:.....
- Μπορείτε να διατυπώσετε και να γράψετε έναν κανόνα για τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης όταν ο άγνωστος είναι διαιρέτης;
- Παρατηρώντας το σχήμα να περιγράψετε στην ομάδα σας τι μας λέει η εξίσωση της πράσινης γραμμής να τη γράψετε και να υπολογίσετε την τιμή του άγνωστου:
- Αν αντικαταστήσεις τον άγνωστο με την τιμή που βρήκες, επαληθεύονται και οι δυο εξισώσεις;.....



Από τις προηγούμενες δραστηριότητες διαπιστώνουμε ότι ο τρόπος λύσης των εξισώσεων διαίρεσης εξαρτάται από το αν ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης.

Παραδείγματα

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι διαιρετέος

Όταν ο άγνωστος είναι διαιρετέος, για να λύσουμε την εξίσωση πολλαπλασιάζουμε το πηλίκο με τον διαιρέτη.

Η λύση της εξίσωσης $x : 5 = 8$ είναι: $x = 5 \cdot 8$

Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι διαιρέτης

Όταν ο άγνωστος είναι διαιρέτης, για να λύσουμε την εξίσωση διαιρούμε τον διαιρετέο με το πηλίκο.

Η λύση της εξίσωσης $18 : x = 36$ είναι: $x = 18 : 36$

Η ισορροπία της εξίσωσης διατηρείται αν πολλαπλασιάσω και τα δυο μέρη με τον ίδιο αριθμό.



Εφαρμογή 1η

Η Διευθύντρια του σχολείου έδωσε στις μαθήτριες της Στ' τάξης ένα ρολό κορδέλα για τις ανάγκες του χορευτικού που θα παρουσίαζαν. Εκείνες τη χώρισαν σε 18 ίσα κομμάτια. Κάθε κομμάτι ήταν 81 εκατοστά. Πόσα μέτρα ήταν η κορδέλα που τους έδωσε η Διευθύντρια;

Λύση

Ονομάζω την άγνωστη τιμή σ .

- ❖ Σχηματίζω την εξίσωση $\sigma : 18 = 81$.
- ❖ Όταν ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος για να βρω την τιμή του πολλαπλασιάζω το πηλίκο με τον διαιρέτη: $\sigma = 81 \cdot 18$. Άρα $\sigma = 1.458$.
- ❖ Επαληθεύω: $1.458 : 18 = 81$
- ❖ Μετατρέπω τα εκατοστά σε μέτρα: $1.458 : 100 = 14,58$

Απάντηση: Η κορδέλα που τους έδωσε η Διευθύντρια ήταν 14,58 μέτρα.



Εφαρμογή 2η

Ο Θωμάς θέλει να ταξινομήσει τις κάρτες του με τους ποδοσφαιριστές σε κουτιά που χωράνε 45 κάρτες το καθένα. Έχει συνολικά 540 κάρτες. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί;

Λύση

Άγνωστη τιμή είναι ο αριθμός των κουτιών (κ) που χρειάζεται ο Θωμάς.

α' τρόπος: Σχηματίζω την εξίσωση $540 : \kappa = 45$

Εφαρμόζω την μέθοδο της διαίρεσης:

$\kappa = 540 : 45$. Άρα $\kappa = 12$.

Επαληθεύω: $540 : 12 = 45$

Απάντηση: Θα χρειαστεί 12 κουτιά.

β' τρόπος: $45 \cdot \kappa = 540$
.....



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **άγνωστος διαιρετέος** και **άγνωστος διαιρέτης** και μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις αφαίρεσης. Παρουσίασε με την ομάδα σου ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

- ❖ Μια εξίσωση διαίρεσης λύνεται μόνο με πολλαπλασιασμό.
- ❖ Για να υπολογίσουμε τον άγνωστο όταν έχει τη θέση του διαιρέτη σε μια εξίσωση, πολλαπλασιάζουμε το πηλίκο με τον διαιρέτη.



«Όταν ο άγνωστος αποκαλύπτεται»

Ορισμοί

- **Μεταβλητή**
οποιοδήποτε γράμμα (ή σύμβολο) που μπαίνει στη θέση μιας άγνωστης τιμής
- **Εξίσωση**
μία ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μία μεταβλητή
- **Λύση της εξίσωσης**
η τιμή που την επαληθεύει

- ω, x, \dots

- $5 + x = 10,5$

- $x = 5,5$



- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους προσθετέους**

- κάνουμε αφαίρεση, π.χ.:
 $x + 0,2 = 12,8$ άρα $x = 12,8 - 0,2$ άρα $x = 12,6$
 $2 + x = 11,5$ άρα $x = 11,5 - 2$ άρα $x = 9,5$

- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι μειωτέος**

- κάνουμε πρόσθεση, π.χ.:
 $x - 31 = 45$ άρα $x = 45 + 31$ άρα $x = 76$

Πριπτώσεις εξισώσεων

- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι αφαιρετέος**

- κάνουμε αφαίρεση, π.χ.:
 $20,1 - x = 7$ άρα $x = 20,1 - 7$ άρα $x = 13,1$

- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους παράγοντες του γινομένου**

- κάνουμε διαίρεση, π.χ.:
 $x \cdot 3 = 96$ άρα $x = 96 : 3$ άρα $x = 32$
 $14 \cdot x = 11,2$ άρα $x = 11,2 : 14$ άρα $x = 0,8$

- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος**

- κάνουμε πολλαπλασιασμό, π.χ.:
 $x : 0,5 = 24$ άρα $x = 24 \cdot 0,5$ άρα $x = 12$

- **Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρέτης**

- κάνουμε διαίρεση, π.χ.:
 $144 : x = 9$ άρα $x = 144 : 9$ άρα $x = 16$

Χρυσός κανόνας

Η εξίσωση μοιάζει με μια ζυγαριά που ισορροπεί.

Η ισορροπία πρέπει να διατηρηθεί μέχρι το τέλος, όταν θα έχει μείνει μόνο ο άγνωστος από τη μια μεριά και η τιμή του από την άλλη.

Για να διατηρείται πάντα η ισορροπία, ό,τι κάνουμε από τη μια μεριά, πρέπει να κάνουμε κι από την άλλη.

Άσκηση

Να αντιστοιχίσεις τα δύο μέρη των εξισώσεων όταν $x = 9$.

$2x$	=	8
$5 + x$	=	18
$x - 1$	=	14
$7x$	=	1
$10 - x$	=	2
$18 : x$	=	63
$x : 3$	=	3

1ο Πρόβλημα “Το πάρτι”

Σε ένα πάρτι με μπουφέ υπήρχαν 40 μικρά γλυκά. Μετά το γεύμα πέρασαν όλοι οι καλεσμένοι και πήραν από 3 γλυκά ο καθένας. Στο τέλος έμειναν 4 γλυκά στο δίσκο. Πόσοι ήταν οι καλεσμένοι; (Να το λύσεις με εξίσωση)

Λύση



Απάντηση:

2ο Πρόβλημα “Σχολικό περιοδικό”

Η Όλγα υπολογίζει τα έξοδα για την εκτύπωση ενός σχολικού περιοδικού. Εάν το τυπώσει στο «ΕΚΤΥΠΟΝ», κοστίζει 5 λεπτά η σελίδα για οποιονδήποτε αριθμό αντιγράφων, χωρίς επιπλέον χρέωση για τη σελιδοποίηση. Εάν το τυπώσει στο «ΕΝΤΥΠΟΝ», κοστίζει 40 € η σελιδοποίηση και στη συνέχεια 4 λεπτά η σελίδα.

- α) Πόσο θα χρεώσει το «ΕΚΤΥΠΟΝ» για 200 αντίγραφα ενός περιοδικού 30 σελίδων;
- β) Πόσο θα χρεώσει το «ΕΝΤΥΠΟΝ» για την ίδια εργασία;
- γ) Εάν η Όλγα ήθελε μόνο 100 αντίγραφα του περιοδικού, ποια εταιρία θα της έδινε την φτηνότερη λύση;

Λύση



Απάντηση:

3ο Πρόβλημα “Τραπεζικές εργασίες”

Τη Δευτέρα, η Άρτεμη έβαλε 23 € στον τραπεζικό της λογαριασμό ο οποίος έγινε 57 €.

Τι περιγράφει η εξίσωση $\delta + 23 = 57$;

Τι αντιπροσωπεύει το δ ;

Πόσο ήταν το δ ;

Η εξίσωση $57 - \tau = 49$ περιγράφει την κίνηση του λογαριασμού την Τετάρτη.

Τι έκανε η Άρτεμη την Τετάρτη;

Πόσο είναι το τ ;

Η εξίσωση $49 - \gamma = 49$ περιγράφει την κίνηση του λογαριασμού την

Παρασκευή

Πόσο είναι το γ ;

Ποια κίνηση έγινε την Παρασκευή;

