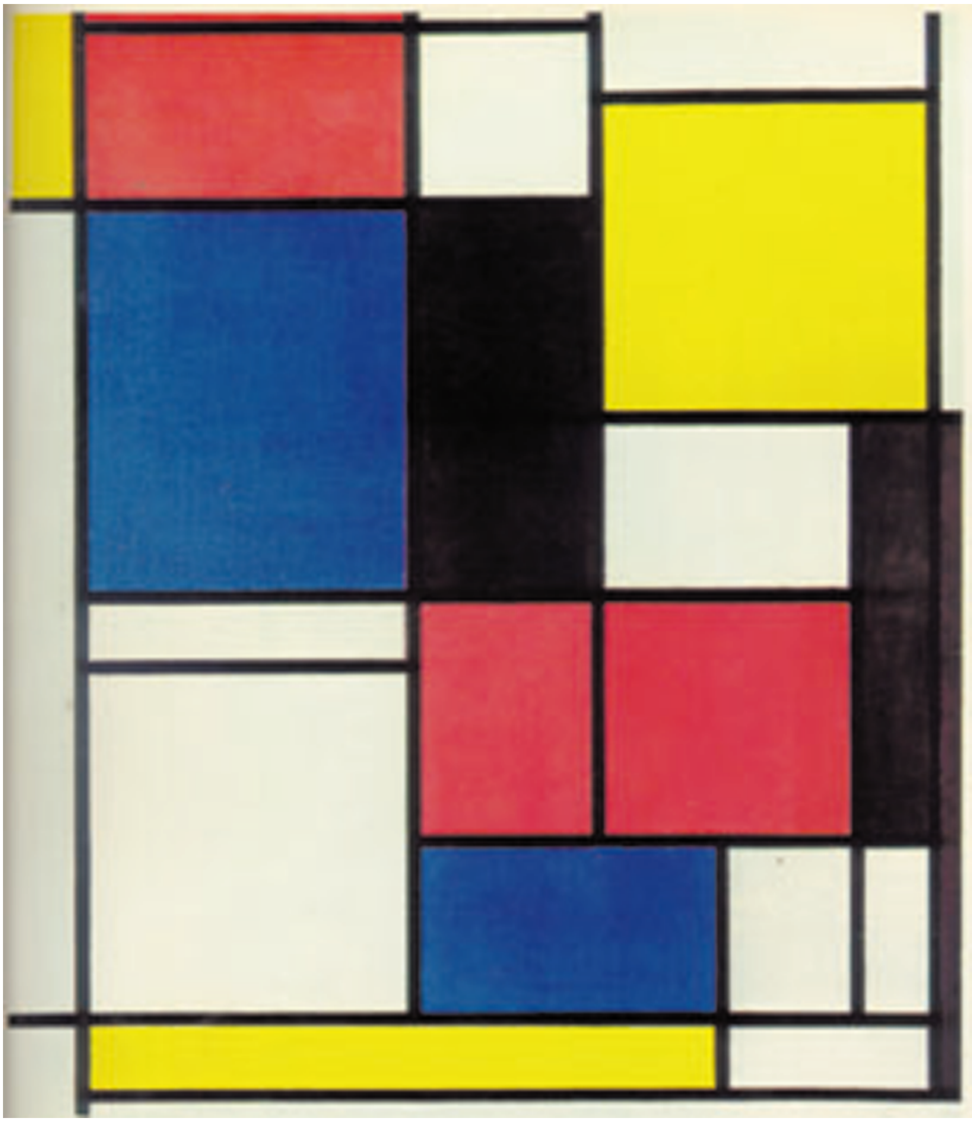
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

# *Εμβαδά*

Είναι αποδεκτό ότι η έννοια του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος προέκυψε από την ανάγκη αντιμετώπισης προβλημάτων της καθημερινής ζωής, αρκετά χρόνια πριν. Πράγματι είναι ιστορικά επιβεβαιωμένο ότι η Γεωμετρία εμφανίστηκε, τουλάχιστον τρεις χιλιετίες π.Χ., ως τέχνη υπολογισμού μηκών, εμβαδών και όγκων στους λαούς που κατοικούσαν κοντά στους ποταμούς Νείλο, Τίγρη και Ευφράτη. Στην Αίγυπτο μάλιστα ήταν τέχνη για μέτρηση γης. Αργότερα η έννοια του εμβαδού θεμελιώθηκε αυστηρά και γενικεύθηκε σε σύνολα πιο πολύπλοκα από τα ευθύγραμμα σχήματα.

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την έννοια του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος. Αρχικά εισάγουμε την έννοια του εμβαδού ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας. Κατόπιν, δίνουμε τύπους υπολογισμού του εμβαδού του τετραγώνου, του ορθογωνίου, του παραλληλογράμμου, του τριγώνου και του τραπεζίου. Στη συνέχεια, δίνουμε τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων και τέλος αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα του τετραγωνισμού ενός πολυγώνου.



Piet Mondrian (Ολλανδός, 1872 - 1944), *Πίνακας ΙΙ*, λάδι σε καμβά, 1921 - 1925
Συλλογή Max Bill, Ζυρίχη.

# Πολυγωνικά χωρία – Πολυγωνικές επιφάνειες

## 10.1 Πολυγωνικά χωρία

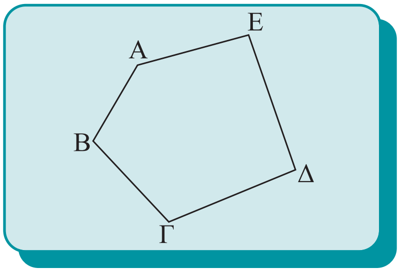
Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, για παράδειγμα ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 1). Το πολύγωνο μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν ένα χωρίο, που λέγεται ***πολυγωνικό χωρίο*** που ορίζεται από το ΑΒΓΔΕ.

Ένα πολυγωνικό χωρίο που ορίζεται από τρίγωνο, τετράπλευρο, ... , ν-γωνο λέγεται αντίστοιχα ***τριγωνικό***, ***τετραπλευρικό***, ... , ***ν-γωνικό***.

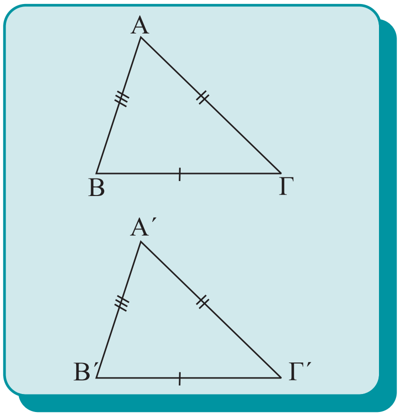
Επίσης, δύο πολυγωνικά χωρία λέγονται **ίσα** όταν τα αντίστοιχα πολύγωνα είναι ίσα (σχ.2).

Τέλος ένα σχήμα που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών χωρίων, που ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγεται ***πολυγωνική επιφάνεια***.

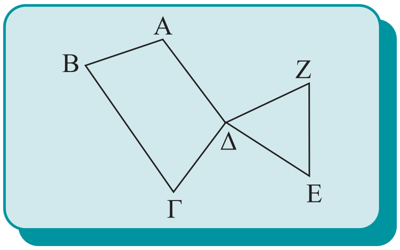
Για παράδειγμα, το σχήμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ.3) είναι μια πολυγωνική επιφάνεια..



*Σχήμα 1*



*Σχήμα 2*



*Σχήμα 3*

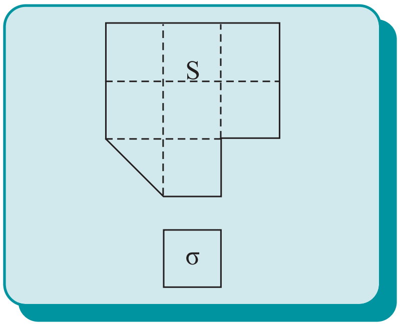
## 10.2 Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

Στο 7ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στη μέτρηση των ευθύγραμμων τμημάτων. Εδώ θα ασχοληθούμε με τη μέτρηση πολυγωνικών χωρίων και επιφανειών.

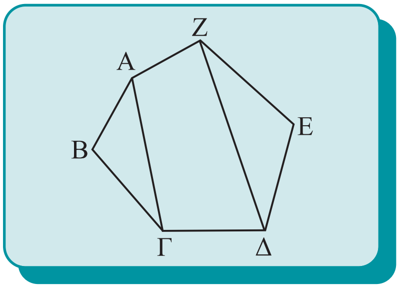
Έστω, λοιπόν ένα πολυγωνικό χωρίο S (σχ.4). Όπως και στα ευθύγραμμα τμήματα, μέτρηση του χωρίου S λέμε τη σύγκρισή του με ένα άλλο επίπεδο χωρίο σ, το οποίο επιλέγουμε ως μονάδα. Η σύγκριση αυτή οδηγεί σε μια σχέση της μορφής: $S = \lambda \cdot \sigma$, όπου λ θετικός αριθμός. (Στην περίπτωση του σχ. 4 είναι $\lambda = 7{,}5$). Ο θετικός αριθμός λ λέγεται ***εμβαδόν*** του πολυγωνικού χωρίου S και συμβολίζεται με (S). Πολλές φορές το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας θα το συμβολίζουμε απλά με το γράμμα Ε. Επίσης, στα επόμενα, θα λέμε εμβαδόν τριγώνου, τετραπλεύρου και γενικά πολυγώνου και θα εννοούμε το εμβαδόν του αντίστοιχου πολυγωνικού χωρίου.

Για το εμβαδόν δεχόμαστε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες (αξιώματα):

- **Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.**



*Σχήμα 4*



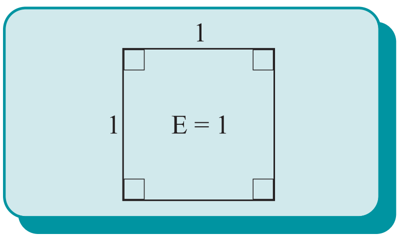

*Σχήμα 5*

**• Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων**. Για παράδειγμα, για το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΑΒΓΔΕΖ του (σχ. 5) έχουμε:

$$(ΑΒΓΔΕΖ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΖ) + (ΖΔΕ)$$

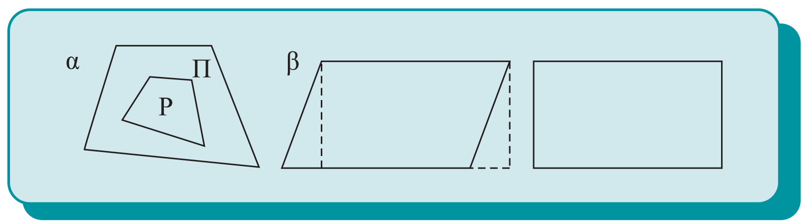
Επίσης δεχόμαστε ότι:

**• Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 είναι 1.**




Από τα παραπάνω αξιώματα προκύπτει ότι:

• Αν ένα πολύγωνο Ρ περιέχεται στο εσωτερικό ενός άλλου πολυγώνου Π (σχ.6α), τότε το εμβαδόν του Ρ είναι μικρότερο του εμβαδού του Π.



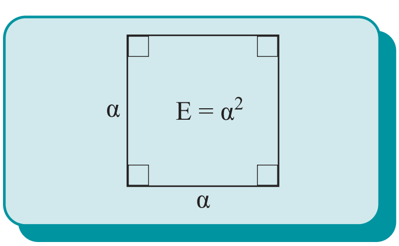

*Σχήμα 6*

Είδαμε παραπάνω ότι αν δύο πολυγωνικά χωρία είναι ίσα, τότε έχουν ίσα εμβαδά. Το αντίστροφο είναι φανερό (σχ. 6β) ότι δεν ισχύει.

Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται ***ισοδύναμα*** ή ***ισεμβαδικά***.

Έτσι σχήματα που δεν είναι ίσα μπορούν να συγκρίνονται ως προς το εμβαδόν τους.

Με τη βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων του εμβαδού μπορεί να αποδειχθεί το επόμενο θεώρημα.




**Θεώρημα**

**Το εμβαδόν Ε ενός τετραγώνου πλευράς α είναι $α^2$, δηλαδή:**

$$\mathbf{Ε = α^2.}$$

## 10.3 Εμβαδόν βασικών ευθυγράμμων σχημάτων

Με βάση το εμβαδόν του τετραγώνου θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα Ι**

**Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.**

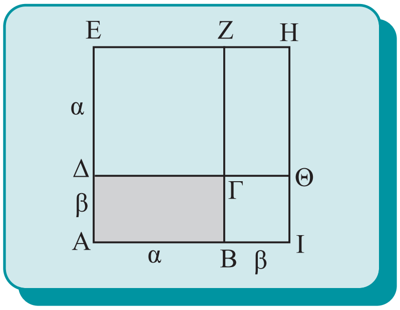
Δηλαδή αν α, β, οι πλευρές και Ε το εμβαδόν είναι:

$$\mathbf{E = \alpha \cdot \beta}$$

**Απόδειξη**

Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ = α και ΑΔ = β (σχ.7). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=α, την ΑΒ κατά ΒΙ=β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά α+β και επομένως είναι:

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\alpha + \beta)^2 \qquad (1).$$



*Σχήμα 7*

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Έτσι έχουμε

$$(\text{ΔΓΖΕ})=\alpha^2,\ (\text{ΒΙΘΓ}) = \beta^2 \text{ και } (\text{ΓΘΗΖ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) \qquad (2)$$

Είναι φανερό όμως ότι

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) + (\text{ΓΘΗΖ}) + (\text{ΒΙΘΓ}) + (\text{ΔΓΖΕ}),$$

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(\text{ΑΒΓΔ}) + \alpha^2 + \beta^2.$$

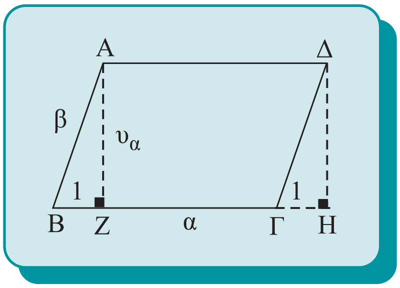
Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στησχέση $(\text{ΑΒΓΔ}) = \alpha\cdot\beta$.

**Θεώρημα ΙΙ**

**Το εμβαδόν Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.**

Δηλαδή $\mathbf{E = \alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta}$ ,

όπου α, β οι πλευρές και $\upsilon_\alpha$, $\upsilon_\beta$ τα αντίστοιχα ύψη.



*Σχήμα 8*

**Απόδειξη**

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ.8) και ας φέρουμε το ύψος ΑΖ που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι (ΑΒΓΔ)=ΒΓ · ΑΖ.

Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΗΓΔ είναι ίσα ($\hat{Z} = \hat{H} = 90°$, ΑΒ = ΔΓ και

$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$), οπότε: (ΖΒΑ) = (ΗΓΔ) (1).
Από το σχήμα όμως έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΖ) + (ΑΖΓΔ), οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΓΔ) + (ΔΓΗ) = (ΑΖΗΔ).$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Ι έχουμε

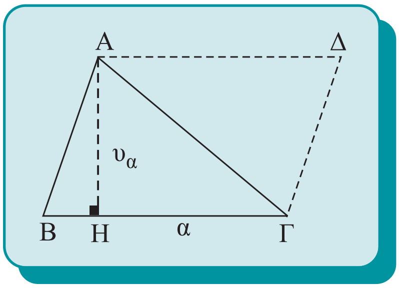
$$(ΑΒΓΔ)=(ΑΖΗΔ)=ΑΔ\cdot ΑΖ= ΒΓ\cdot ΑΖ,$$

που είναι το ζητούμενο.
Με τη βοήθεια του εμβαδού του παραλληλογράμμου θα υπολογίσουμε τον τύπο του εμβαδού τριγώνου.

**Θεώρημα ΙΙΙ**

**Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.**

Δηλαδή $$\mathbf{E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma}.$$



*Σχήμα 9*

**Απόδειξη**
Με πλευρές ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι

$$(ΑΒΓΔ) = \alpha\cdot\upsilon_\alpha \quad (1).$$

Όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ίσα, οπότε:

$$(ΑΒΓ) = (ΑΔΓ) \quad (2).$$

Από το σχήμα έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ)+ (ΑΓΔ) η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην

$$\alpha\cdot\upsilon_\alpha = 2(ΑΒΓ) \text{ ή } (ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha.$$

Τέλος, τον τύπο του εμβαδού τριγώνου θα τον αξιοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου.

**Θεώρημα ΙV**

**Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.**

Δηλαδή $$\mathbf{E = \frac{(B+\beta)}{2}\cdot\upsilon},$$

όπου Β, β οι βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του.

**Απόδειξη**

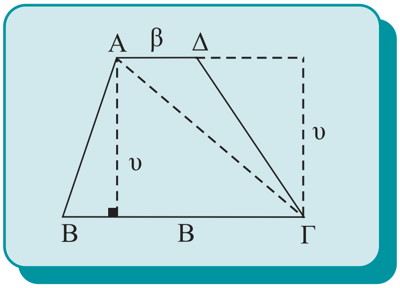
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) (σχ.10), με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

$$\text{Ε} = (\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΑΒΓ}) + (\text{ΑΓΔ}) \qquad (1).$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\,\text{Β}\cdot υ \quad \text{και} \quad (\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{2}\,β\cdot υ \qquad (2).$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι $\text{Ε}=\dfrac{\text{Β}+β}{2}\cdot υ$, δηλαδή το ζητούμενο.



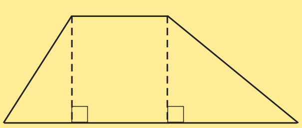

*Σχήμα 10*

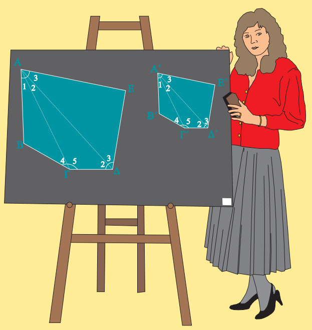
### Πορισμα

**Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.**

### Δραστηριότητα

*Χωρίζοντας το τραπέζιο σε δύο ορθογώνια τρίγωνα και ένα ορθογώνιο (βλ. το παρακάτω σχήμα), να αποδείξετε τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου.*





### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

**Το εμβαδόν Ε ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με**

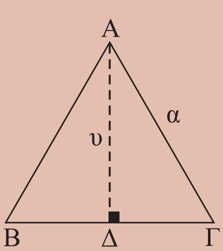
$$\mathbf{Ε = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}}.$$

**Απόδειξη**

Φέρουμε το ύψος ΑΔ (σχ. 11) το οποίο είναι και διάμεσος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε

$$υ^2 = \text{ΑΔ}^2 = α^2 - \text{ΔΓ}^2 = α^2 - \left(\frac{α}{2}\right)^2 = \frac{3α^2}{4},$$

δηλαδή $υ = \dfrac{α\sqrt{3}}{2}$, οπότε $\text{Ε} = \dfrac{1}{2}\,αυ = \dfrac{1}{2}\,α\,\dfrac{α\sqrt{3}}{2} = \dfrac{α^2\sqrt{3}}{4}$.




*Σχήμα 11*

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

**Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.**

**Απόδειξη**

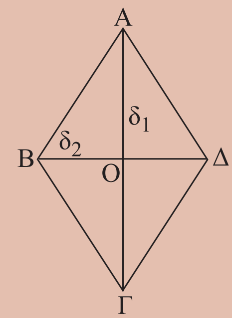
Είναι φανερό (σχ.12) ότι

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) \quad (1).$$

Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες και διχοτομούνται έχουμε:

$$(ΑΒΔ) = \frac{1}{2}\,ΒΔ \cdot ΑΟ = \frac{1}{2}\,\delta_2 \cdot \frac{\delta_1}{2} = \frac{1}{4}\,\delta_1 \cdot \delta_2 \;\text{ και }\; (ΒΓΔ) = \frac{1}{4}\,\delta_1 \cdot \delta_2 \quad (2).$$

Με αντικατάσταση των (2) στην (1) προκύπτει ότι $Ε = \frac{1}{2}\,\delta_1 \cdot \delta_2$ (3).




*Σχήμα 12*

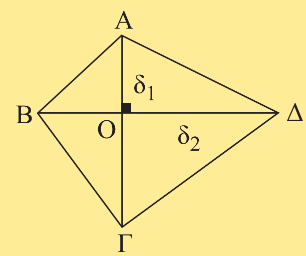
### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Ο προηγούμενος τύπος (3) ισχύει και στην περίπτωση οποιουδήποτε κυρτού ή μη κυρτού, τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους.*
*Πράγματι (σχ. 13, 14)*

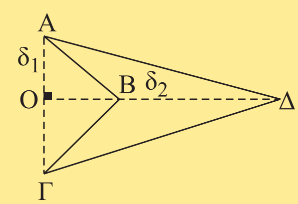
$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) =$$

$$= \frac{1}{2}\,ΒΔ \cdot ΑΟ + \frac{1}{2}\,ΒΔ \cdot ΟΓ = \frac{1}{2}\,ΒΔ\,(ΑΟ + ΟΓ) = \frac{1}{2}\,ΒΔ \cdot ΑΓ.$$

*Μια γενίκευση του τύπου (3), για την περίπτωση του τετραπλεύρου αποτελεί η άσκηση 7 των αποδεικτικών ασκήσεων.*




*Σχήμα 13*




*Σχήμα 14*

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

**Έστω τρίγωνο ΑΒΓ.**

**i) Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου να αποδείξετε ότι**

$$(ΑΒΜ) = (ΑΜΓ).$$

**ii) Από την κορυφή Α να φέρετε τρεις ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τέσσερα ισοδύναμα τρίγωνα.**

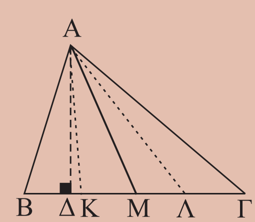
**Λύση**

**i)** Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 15). Το ΑΔ είναι και ύψος στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ, οπότε έχουμε

$$(ΑΒΜ) = \frac{1}{2}\,ΒΜ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2}\,ΜΓ \cdot ΑΔ = (ΑΜΓ)$$

αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

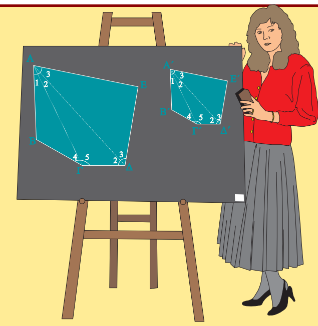
**ii)** Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι οι ζητούμενες ευθείες είναι οι φορείς των διαμέσων ΑΜ, ΑΚ και ΑΛ των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΜ και ΑΜΓ αντίστοιχα.




*Σχήμα 15*

## Δραστηριότητα

*Να χωρίσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα με ευθείες από την κορυφή Α.*



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

## Ερωτήσεις Κατανόησης

**1.** *Να γράψετε τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού:*
*i) τετραγώνου*
*ii) ορθογωνίου*
*iii) παραλληλογράμμου*
*iv) τριγώνου*
*v) τραπεζίου*

**2.** *Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 16. Πόσο είναι το εμβαδόν του;*

**3.** *Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις α=9, β=4 και είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς x. Να βρεθεί το x.*

**4.** *Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α < β. Με ποια ανισοτική σχέση συνδέονται τα $υ_α$ και $υ_β$ ;*

**5.** *Αν ένας ρόμβος έχει μήκη διαγωνίων 4 και 5 αντίστοιχα, με τι ισούται το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος;*

**6.** *Ένας χωρικός αντάλλαξε έναν αγρό, που είχε σχήμα τετραγώνου πλευράς 60 m, με έναν άλλο αγρό (με την ίδια ποιότητα χώματος) που είχε σχήμα ορθογωνίου με πλάτος 40 m και περίμετρο ίση με την περίμετρο του πρώτου. Έχασε ή κέρδισε ο χωρικός από την ανταλλαγή αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

## Ασκήσεις Εμπέδωσης

**1.** *Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α = 4 κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΖ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν των ΑΒΓΔ, ΑΔΖ, ΑΒΖ και ΒΖΓ.*

**2.** *Αν Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΔ = 10 τετραγώνου ΑΒΓΔ, τότε το άθροισμα (ΑΜΒ) + (ΔΜΓ) είναι :*
*Α:25  Β:40  Γ:50  Δ:75  Ε:100*
*Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

**3.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και $\hat{A}$=60°. Να βρεθούν: i) το ύψος $υ_β$ , ii) το εμβαδόν (ΑΒΓ), iii) το ύψος $υ_α$ .*

**4.** *Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 14 και διαγώνιο 5. Να βρείτε το εμβαδόν του.*

**5.** *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ = 10 και αντίστοιχο προς αυτήν ύψος υ = 5. Πάνω στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΖΓ.*
*i) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.*
*ii) Αφού πρώτα συγκρίνετε τα εμβαδά των τραπεζίων ΑΕΖΒ και ΕΖΓΔ να βρείτε το εμβαδόν καθενός από αυτά.*

**6.** *Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$ , ΑΔ = 15m, ΒΓ = 20m και ΑΒ = 12m. Ένας καινούργιος δρόμος περνάει παράλληλα προς τη ΔΓ και αποκόπτει μια λωρίδα πλάτους 3m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο που απομένει;*

## Αποδεικτικές Ασκήσεις

**1.** *Αν Σ είναι σημείο μιας πλευράς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι*

$$(ΣΑΓ) + (ΣΒΔ) = (ΑΒΓ).$$

**2.** *Αν οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Θ να αποδείξετε ότι:*
*i) (ΑΒΕ) = (ΒΕΓ), ii) (ΑΘΒ) = (ΔΓΕΘ) και iii) (ΒΘΔ) = (ΑΘΕ).*

**3.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το βαρύκεντρό του Θ. Από σημείο Σ της διαμέσου ΑΔ φέρουμε τις κάθετες ΣΕ, ΣΖ στις ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*
*i) (ΑΒΣ) = (ΑΓΣ),*
*ii) ΑΒ·ΣΖ=ΑΓ·ΣΕ και*
*iii)* $(ΑΒΘ) = (ΒΘΓ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ).$

**4.** *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ). Αν Μ το μέσο της πλευράς του ΑΒ, να αποδείξετε ότι*

$$(ΑΒΓΔ) = 2(ΜΓΔ).$$

**5.** *Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο της μίας από τις μη παράλληλες* *πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης από αυτή.*

**6.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1, ΑΓ = 2 και* $\hat{A}=120°$. *Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ τα τετράγωνα ΑΒΔΓ και ΑΓΖΘ αντίστοιχα. Τότε:*
*i) να υπολογίσετε το τμήμα ΕΘ,*
*ii) να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Θ είναι συνευθειακά και*
*iii) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας ΒΓΖΘΕΔ είναι* $5+\sqrt{3}$.

**7.** *Αν ω είναι η γωνία των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι*

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2}\, ΑΓ \cdot ΒΔ \cdot ημω.$$

**8.** *Ο ιδιοκτήτης ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, του οποίου το μήκος είναι κατά 18 m μεγαλύτερο του πλάτους, θέλει να σχηματίσει γύρω από το οικόπεδο και εξωτερικά αυτού μια δενδροστοιχία πλάτους 2,5 m. Έτσι αναγκάζεται να αγοράσει από τους γείτονές του 695* $m^2$. *Να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου.*

### Σύνθετα θέματα

**1.** *Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των ημιευθειών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ζ, Η, Θ και Ι, ώστε ΒΖ =ΑΒ, ΓΗ=ΒΓ, ΔΘ=ΓΔ και ΑΙ=ΑΔ. Να αποδείξετε ότι*
*i) (ΙΘΑ) = (ΑΘΔ) = (ΑΓΔ),*
*ii) (ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) = 2(ΑΒΓΔ) και*
*iii) (ΙΖΗΘ) = 5(ΑΒΓΔ).*

**2.** *Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ, το μέσο Ν του ΓΜ και το μέσο Ρ του ΒΝ. Να αποδείξετε ότι* $(MNP) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ)$.

**3.** *Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε* $ΖΓ = ΗΔ = \frac{α}{4}$.
*i) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΖ και ΒΗ τέμνονται κάθετα σε σημείο Κ.*
*ii) Να υπολογισθούν τα μήκη των τμημάτων: ΑΚ, ΑΗ και ΚΗ.*
*iii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΚΗΔ.*

**4.** *Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ο στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι*
*i) (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΑΒΓ) και*
*ii) (ΟΑΓ) + (ΟΒΓ) = (ΟΓΔ).*

**5.** *Αν ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ είναι ρόμβος πλευράς α και τετράγωνο πλευράς α αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) ≤ (ΚΛΜΝ).*

## 10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ, με μήκη πλευρών α, β, γ, προκύπτουν και οι επόμενοι τύποι:

(i) $\mathbf{E = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}}$ (τύπος του Ήρωνα), όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

(ii) $\mathbf{E = τρ}$ , όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(iii) $\mathbf{E = \dfrac{αβγ}{4R}}$ , όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

**Απόδειξη**

**(i)** Στην § 9.4 (Εφαρμογή 2) αποδείξαμε ότι

$υ_α = \frac{2}{α}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$, οπότε έχουμε:

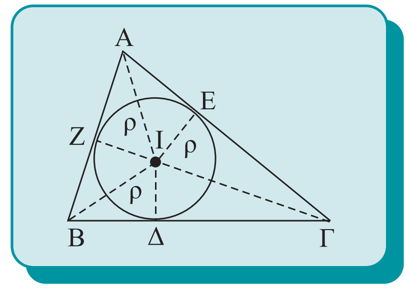
$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\alpha\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} =$$

$$= \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}\,.$$

**(ii)** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 16) και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (Ι, ρ). Φέρουμε τα τμήματα ΙΑ, ΙΒ και ΙΓ και έτσι το τρίγωνο χωρίζεται στα τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΓΑ και ΙΑΒ που έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε έχουμε:

$$E = (AB\Gamma) = (IB\Gamma) + (I\Gamma A) + (IAB)$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\rho = \frac{1}{2}2\tau\rho = \tau\rho.$$




*Σχήμα 16*

**(iii)** Είναι γνωστό ότι $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha$ (Εφαρμογή 5 §8.2), οπότε έχουμε ότι $\upsilon_\alpha = \dfrac{\beta\gamma}{2R}$ και με αντικατάσταση στον τύπο $E = \dfrac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ προκύπτει το ζητούμενο.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**
*Όμοια αποδεικνύεται ότι ο τύπος (2) ισχύει για οποιοδήποτε περιγεγραμμένο σε κύκλο πολύγωνο με ημιπερίμετρο τ.*

Τέλος, το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται και από τον (τριγωνομετρικό) τύπο:

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\,\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma}\,.$$

**Απόδειξη**

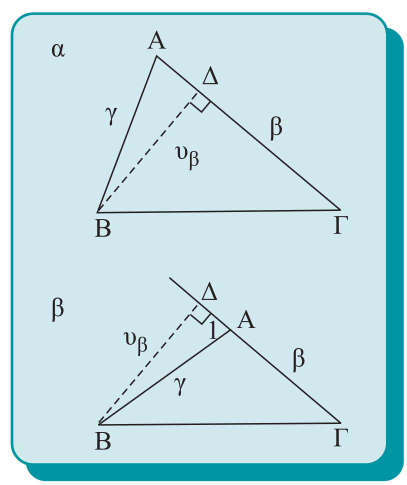
Αν $\hat{A} < 1\llcorner$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ (σχ.17α) προκύπτει ότι $\upsilon_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$.

Αν $\hat{A} > 1\llcorner$, πάλι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ (σχ. 17β) προκύπτει ότι:

$$\upsilon_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A_{\varepsilon\xi} = \gamma \cdot \eta\mu(180° - A) = \gamma \cdot \eta\mu A.$$

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $\upsilon_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$ οπότε

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A}\,.$$




*Σχήμα 17*

Όταν $\hat{A} = 1\llcorner$, τότε $\upsilon_\beta = \gamma$, επομένως πάλι ο τύπος ισχύει.

Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι τύποι.

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η** *Νόμος των ημιτόνων*

**Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι:** $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R.}$

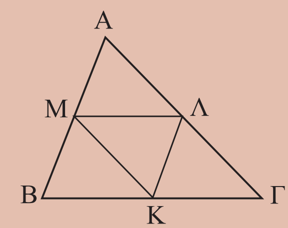
**Απόδειξη**

Από τις ισότητες $E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ και $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ προκύπτει ότι $\dfrac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

ή $\etaμA = \frac{α}{2R}$ ή $\frac{α}{ημA} = 2R$. Όμοια προκύπτει $\frac{β}{ημB} = 2R$, $\frac{γ}{ημΓ} = 2R$, από τις οποίες συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 13, β = 14 και γ = 15 (σχ.18). Να υπολογίσετε:**
**(i) το εμβαδόν του,**
**(ii) τα ύψη του,**
**(iii) τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου,**
**(iv) το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ.**



*Σχήμα 18*

**Λύση**

(i) Έχουμε $τ = \frac{1}{2}(α + β + γ) = 21$ οπότε με αντικατάσταση των δεδομένων στον τύπο του Ήρωνα παίρνουμε:

$$E = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

(ii) Έχουμε $E = \frac{1}{2}αυ_α$ ή $84 = \frac{1}{2}13υ_α$ ή $υ_α = \frac{168}{13}$. Όμοια βρίσκουμε ότι $υ_β = 12$ και $υ_γ = \frac{56}{5}$.

(iii) Από τους τύπους $E = τ \cdot ρ$ και $E = \frac{αβγ}{4R}$ προκύπτουν αντίστοιχα ότι $ρ = 4$ και $R = \frac{65}{8}$.

(iv) Έχουμε $ΜΛ = \frac{13}{2}$, $ΜΚ = 7$, και $ΚΛ = \frac{15}{2}$, οπότε από τον τύπο του Ήρωνα προκύπτει πάλι ότι $(ΚΛΜ) = 21$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Ερωτήσεις Κατανόησης

**1.** *Με τη βοήθεια του τύπου $E = \frac{1}{2}βγ \cdot ημA$ να αποδείξετε ότι $E \leq \frac{1}{2}βγ$. Πότε ισχύει η ισότητα;*

**2.** *Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ)=9 και ρ = 1,5. Ποια είναι η περίμετρός του;*

**3.** *Ποιοι είναι οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου;*

### Ασκήσεις Εμπέδωσης

**1.** *Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = 18, ΒΓ = 20 και ΑΓ = 34. Να βρείτε το εμβαδόν του.*

**2.** *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ = 25, ΑΔ = 11, ΑΒ = 13 και ΔΓ = 15. Να βρείτε το εμβαδόν του και το ύψος του.*

**3.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 4, ΑΓ = 7 και $\hat{A} = 60°$. Να βρείτε το εμβαδόν του.*

**4.** *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) με ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8. Να βρείτε:*
*i) το εμβαδόν,*
*ii) το ύψος $υ_α$,*
*iii) την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου.*

### Ασκήσεις Αποδεικτικές

**1.** *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει* $\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$ *να αποδείξετε ότι* $\hat{A} = 1\llcorner$.

**2.** *Αν Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ, να αποδείξετε ότι:*

i) $E<\tau(\tau-\alpha) \Leftrightarrow A < 1\llcorner$,

ii) $E = \tau(\tau-\alpha) \Leftrightarrow A = 1\llcorner$,

iii) $E>\tau(\tau-\alpha) \Leftrightarrow A > 1\llcorner$.

**3.** *Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο να αποδείξετε ότι*

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

**4.** *Σε τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{A} \neq 1\llcorner$ *φέρουμε τα ύψη ΒΖ και ΓΗ. Να αποδείξετε ότι* $(AZH)=(AB\Gamma)\sigma\upsilon\nu^2 A$.

**5.** *Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha} + \frac{1}{\upsilon_\beta} + \frac{1}{\upsilon_\gamma} = \frac{1}{\rho}.$$

### Σύνθετα θέματα

**1.** *i) Δίνεται γωνία* $x\hat{O}y$ *και σταθερό σημείο Κ στο εσωτερικό αυτής. Από το Κ φέρουμε μεταβλητή ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές Οx, Oy στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα*

$$\frac{1}{(OKM)} + \frac{1}{(OKN)} \text{ είναι σταθερό.}$$

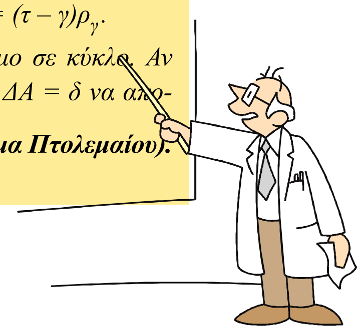
*ii) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Κ στο εσωτερικό του και τα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ που διέρχονται από το Κ. Αν* $E_1, E_2, \ldots, E_6$ *είναι αντίστοιχα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΓ΄, ΒΚΓ΄, ΒΑ΄Κ, ΓΚΑ΄, ΓΚΒ΄ και ΑΚΒ΄, να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_5} = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_4} + \frac{1}{E_6}.$$

**2.** *Αν* $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ *είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι*

$$(AB\Gamma) = (\tau-\alpha)\rho_\alpha = (\tau-\beta)\rho_\beta = (\tau-\gamma)\rho_\gamma.$$

**3.** *Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγράψιμο σε κύκλο. Αν θέσουμε ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ και ΔΑ = δ να αποδείξετε ότι* $\frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}$ ***(2ο Θεώρημα Πτολεμαίου).***

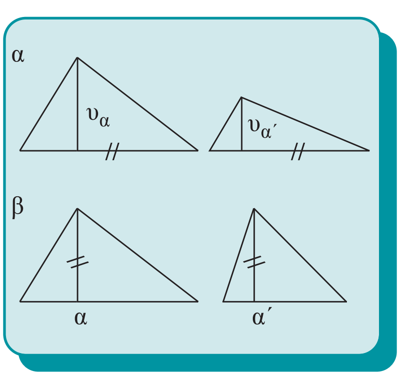


## *Εμβαδόν και ομοιότητα*

### 10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων

Ας θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με εμβαδά Ε και Ε΄ αντίστοιχα. Τότε είναι $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ και $E' = \frac{1}{2}\alpha'\upsilon_{\alpha'}$, οπότε $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha\upsilon_\alpha}{\alpha'\upsilon_{\alpha'}}$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα ότι:

- Αν α = α΄, τότε $\frac{E}{E'} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$ (σχ.19α).
- Αν $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$, τότε $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$ (σχ.19β).



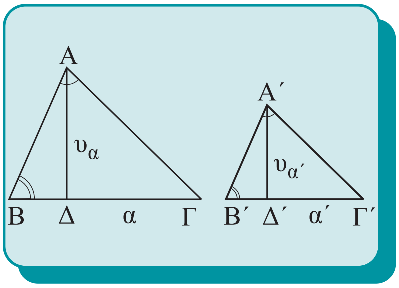
*Σχήμα 19*

Δηλαδή: **αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων**.

Στην περίπτωση που τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια, ισχύει το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα I**

**Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.**




*Σχήμα 20*

**Απόδειξη**

Έστω δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ. 20) με

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{και} \quad \hat{B} = \hat{B}'.$$

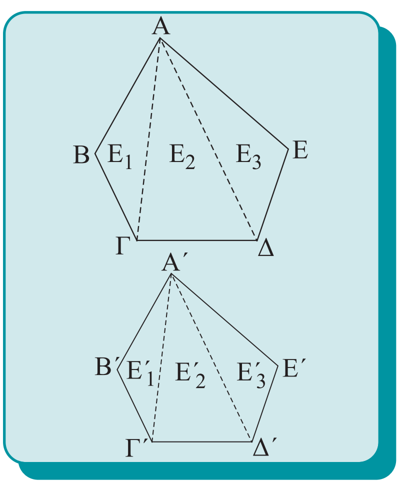
Τότε $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}} = \lambda$ (1), όπου λ ο λόγος ομοιότητας. Αλλά, όπως και παραπάνω, είναι $\dfrac{E}{E'} = \dfrac{\alpha}{\alpha'} \cdot \dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\dfrac{E}{E'} = \lambda^2$.

Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει γενικότερα και για όμοια πολύγωνα, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα II**

**Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.**




*Σχήμα 21*

**Απόδειξη**

Ας θεωρήσουμε δυο όμοια πολύγωνα π.χ. τα πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (σχ. 21) με λόγο ομοιότητας:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \lambda \quad (1).$$

Φέρουμε τις διαγωνίους των πολυγώνων από τις κορυφές Α και Α΄, οπότε αυτά χωρίζονται σε ισάριθμα τρίγωνα όμοια μεταξύ τους.

Αν $E_1$, $E_2$, $E_3$ και $E'_1$, $E'_2$, $E'_3$ είναι τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα και τη σχέση (1), θα έχουμε:

$$\frac{E_1}{E'_1} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \lambda^2, \ \frac{E_2}{E'_2} = \left(\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}\right)^2 = \lambda^2 \quad \text{και}$$

$$\frac{E_3}{E'_3} = \left(\frac{\Delta E}{\Delta'E'}\right)^2 = \lambda^2,$$

οπότε:

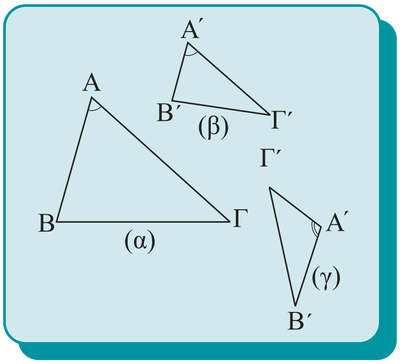
$$\lambda^2 = \frac{E_1}{E'_1} = \frac{E_2}{E'_2} = \frac{E_3}{E'_3} = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{E'_1 + E'_2 + E'_3} = \frac{(AB\Gamma\Delta E)}{(A'B'\Gamma'\Delta'E')},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Για το λόγο των εμβαδών τριγώνων με δύο γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές ισχύει το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα III**

**Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.**



*Σχήμα 22*

**Απόδειξη**

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.22 α,β) ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180°$ (σχ.22 α,γ). Τότε και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει ημΑ = ημΑ΄, οπότε από τις ισότητες

$$E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma\eta\mu A \text{ και } E' = \frac{1}{2}\beta' \cdot \gamma'\eta\mu A'$$

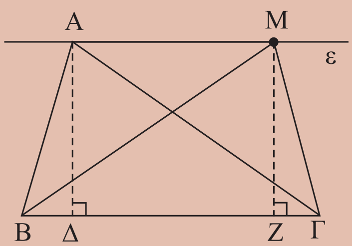
με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$, που είναι το ζητούμενο.

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η**

**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Αν Μ σημείο της ε, να αποδείξετε ότι (ΜΒΓ) = (ΑΒΓ).**

**Απόδειξη**

Φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΜΖ των τριγώνων ΑΒΓ και ΜΒΓ αντίστοιχα. Επειδή η ε είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, προκύπτει ότι ΑΔ = ΜΖ και επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΒΓ είναι ισεμβαδικά, επειδή έχουν κοινή βάση ΒΓ και ίσα ύψη.



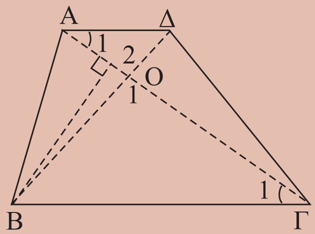
*Σχήμα 23*

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η**

**Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΒΓ και ΑΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να αποδείξετε ότι:**

**(i)** $(OAB) = (O\Gamma\Delta)$, **(ii)** $\frac{(AO\Delta)}{(OB\Gamma)} = \frac{A\Delta^2}{B\Gamma^2}$ **και**

**(iii)** $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$.



*Σχήμα 24*

**Απόδειξη**

**(i)** Είναι (ΟΑΒ) = (ΒΑΔ) – (ΟΑΔ) = (ΑΓΔ) – (ΟΑΔ) = (ΟΓΔ).

**(ii)** Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι όμοια ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$) με λόγο ομοιότητας $\frac{A\Delta}{B\Gamma}$ και επομένως $\frac{(OA\Delta)}{(OB\Gamma)} = \frac{A\Delta^2}{B\Gamma^2}$.

**(iii)** Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ έχουν κοινή κορυφή Β και κοινό το ύψος από αυτήν, επομένως $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)} = \frac{OA}{O\Gamma}$. Από την ομοιότητα όμως των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουμε ότι $\frac{OA}{O\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$, οπότε $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Ερωτήσεις Κατανόησης

**1.** *Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν* $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$ *και* $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{3}{2}$. *Τότε ο λόγος* $\frac{\beta}{\beta'}$ *είναι*

Α: $\frac{2}{5}$ Β: $\frac{3}{4}$ Γ: $\frac{3}{2}$ Δ: $\frac{9}{4}$ Ε: $\frac{4}{9}$

*Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

**2.** *Δυο ρόμβοι ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' έχουν* $\hat{A} = \hat{A}'$ *και* $\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{5}$. *Να υπολογισθεί ο λόγος* $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')}$.

**3.** *Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι ισοδύναμο με ένα τρίγωνο Α'Β'Γ' που έχει* $A'B' \cdot A'\Gamma' = 36$. *Αν είναι* $A + A' = 2\llcorner$, *ποιο είναι το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς;*

### Ασκήσεις Εμπέδωσης

**1.** *Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν* $\alpha = \alpha'$ *και* $\upsilon_\alpha = \frac{3}{2}\upsilon_{\alpha'}$. *Αν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι* $30m^2$, *να βρείτε το εμβαδόν του Α'Β'Γ'.*

**2.** *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με εμβαδόν* $20m^2$. *Αν Μ σημείο στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΒ = 2ΒΜ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ.*

**3.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ζ των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΑ αντίστοιχα, προς το Α, ώστε* $A\Delta = \frac{2}{3}AB$ *και* $AZ = \frac{1}{2}A\Gamma$. *Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι* $30m^2$, *να βρείτε το εμβαδόν του ΑΔΖ.*

**4.** *Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν* $75m^2$. *Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ και Μ σημείο του ΑΔ τέτοιο, ώστε* $\frac{AM}{M\Delta} = \frac{3}{2}$. *Από το Μ φέρουμε παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΕΖΓ.*

**5.** *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν* $\hat{A} = \hat{A}'$ *και* $\hat{B} + \hat{B}' = 2\llcorner$. *Να αποδείξετε ότι* $\alpha\beta' = \alpha'\beta$.

### Αποδεικτικές Ασκήσεις

**1.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Ρ. Αν οι ΑΡ, ΒΡ και ΓΡ τέμνουν τις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

*i)* $\frac{P\Delta}{A\Delta} = \frac{(BP\Gamma)}{(AB\Gamma)}$ , *ii)* $\frac{P\Delta}{A\Delta} + \frac{PE}{BE} + \frac{PZ}{\Gamma Z} = 1$ *και*

*iii)* $\frac{PA}{A\Delta} + \frac{PB}{BE} + \frac{P\Gamma}{\Gamma Z} = 2.$

**2.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{B}, \hat{\Gamma} < 1\llcorner$ *και το ύψος του ΑΔ. Στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α) φέρουμε* $Bx \perp B\Gamma$ *και* $\Gamma y \perp B\Gamma$. *Πάνω στις Bx, Γy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ, ώστε να είναι ΒΕ = ΓΖ = 2ΑΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι*

$$(EBM)+(Z\Gamma N)=2(AB\Gamma).$$

**3.** *Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δυο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι (ΒΟΔ) = (ΑΟΓ).*

**4.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι* $(ΑΒΔ)^2 = (ΑΔΕ)(ΑΒΓ)$.

**5.** *Πάνω στις πλευρές κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ και ΑΔΛΜ. Να αποδείξετε ότι*

$$(ΑΜΖ) + (ΓΗΚ) = (ΒΘΕ) + (ΔΙΛ).$$

**6.** *Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{Α} = 1\llcorner$) *και τρία πολύγωνα* $P_1$, $P_2$ *και* $P_3$ *όμοια μεταξύ τους, που έχουν ως ομόλογες πλευρές τις ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι* $(P_2)+(P_3)=(P_1)$, *όπου* $(P_1)$, $(P_2)$ *και* $(P_3)$ *τα εμβαδά τους.*

### Σύνθετα θέματα

**1.** *Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν* $E_1$, $E_2$, $E_3$ *και* $E_4$ *είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_4$. *Αν υποθέσουμε ότι η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι*

*i)* $E_1 = E_3$, *(ii)* $E_1^2 = E_2 \cdot E_4$,

*iii)* $E_1 \leq \frac{1}{4}E$, *όπου* $E = (ΑΒΓΔ)$.

**2.** *Από εσωτερικό σημείο Σ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Αν* $E_1$, $E_2$, $E_3$ *είναι τα εμβαδά των τριών τριγώνων που σχηματίζονται να αποδείξετε ότι*

*i) καθένα από τα τρίγωνα εμβαδών* $E_1$, $E_2$, $E_3$ *είναι όμοιο με το ΑΒΓ,*

*ii)* $\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2} + \sqrt{E_3} + = \sqrt{E}$, *όπου* $E = (ΑΒΓ)$.

**3.** *Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι*

*i)* $(ΔΕΖ) = \dfrac{2αβγ}{(α+β)(β+γ)(γ+α)}(ΑΒΓ)$,

*ii)* $(ΔΕΖ) \leq \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$.

**4.** *Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Κ,Λ των πλευρών ΑΒ,ΑΓ αντίστοιχα. Από τα Κ,Λ να φέρετε δύο ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία ισοδύναμα μέρη.*

# *Το πρόβλημα του τετραγωνισμού κυρτού πολυγώνου*

## 10.6 Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

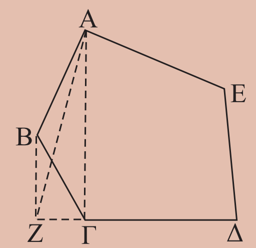
Σε πολλές περιπτώσεις, για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος επιδιώκουμε τον μετασχηματισμό σε ένα ισοδύναμο τετράγωνο. Η κατασκευή ενός τετραγώνου ισοδύναμου με ένα πολύγωνο λέγεται ***τετραγωνισμός*** αυτού. Η λύση των επόμενων δύο προβλημάτων αποτελεί τη μέθοδο κατασκευής του ισοδύναμου τετραγώνου.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

**Να μετασχηματισθεί πολύγωνο σε άλλο ισοδύναμό του με μια πλευρά λιγότερη.**

**Λύση**

Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, π.χ. ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 25) Από την κορυφή Α φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ, που αφήνει προς το ένα μέρος της μόνο μια κορυφή, τη Β. Από το Β φέρουμε την παράλληλο προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την ευθεία ΔΓ στο Ζ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΓ έχουν κοινή βάση ΑΓ και τα αντίστοιχα προς αυτή ύψη ίσα, αφού ΒΖ // ΑΓ. Επομένως, (ΑΒΓ) = (ΑΖΓ), οπότε




*Σχήμα 25*

(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΕ) = (ΑΖΓ) + (ΑΓΔΕ) = (ΑΖΔΕ)

δηλαδή το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισοδύναμο με το τετράπλευρο ΑΖΔΕ και επομένως το αρχικό μας πολύγωνο είναι ισοδύναμο με πολύγωνο που έχει μια πλευρά λιγότερη.

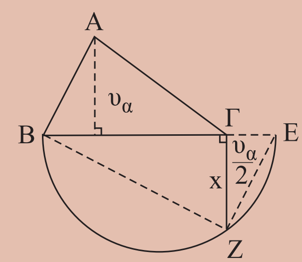
Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία στο τετράπλευρο ΑΖΔΕ, θα μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο. Έτσι, το αρχικό μας πολύγωνο μπορεί να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

**Να μετασχηματισθεί τρίγωνο σε ισοδύναμο τετράγωνο.**

**Λύση**

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και  το ύψος που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΕ = $\frac{υ_α}{2}$ και γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΕ. Φέρουμε την κάθετο της ΒΓ στο Γ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο σε σημείο Ζ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΕ έχουμε:




*Σχήμα 26*

$$ΓΖ^2 = ΒΓ \cdot ΓΕ = α \cdot \frac{υ_α}{2} = \frac{1}{2} αυ_α = (ΑΒΓ),$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι το τμήμα ΓΖ είναι η πλευρά x του ζητούμενου τετραγώνου, που είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

### ΣΧΟΛΙΟ

*Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε κυρτό πολύγωνο τετραγωνίζεται, αφού με πεπερασμένου πλήθους επαναλήψεις της διαδικασίας του προβλήματος 1 και τέλος της διαδικασίας του προβλήματος 2 κατασκευάζεται τετράγωνο ισοδύναμο προς το αρχικό πολύγωνο. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα για μη ευθύγραμμα επίπεδα σχήματα; Η απάντηση θα δοθεί στο επόμενο κεφάλαιο (§11.8).*

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Ερωτήσεις Κατανόησης

**1.** *Τι λέγεται τετραγωνισμός ενός πολυγώνου;*

**2.** *Πώς μετασχηματίζεται ένα ορθογώνιο σε ισοδύναμο τρίγωνο;*

**3.** *Πώς μετασχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο σε ισοδύναμο τρίγωνο;*

**4.** *Πώς μετασχηματίζεται ένα τραπέζιο σε ισοδύναμο τετράγωνο;*

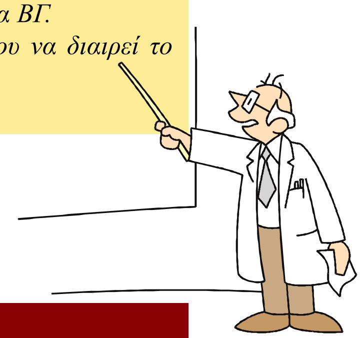
### Ασκήσεις Εμπέδωσης

**1.** *Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο ορθογώνιο πλευρών α,β.*

**2.** *Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με το άθροισμα δύο τετραγώνων πλευρών α,β αντίστοιχα.*

**3.** *Δοσμένο κυρτό τετράπλευρο να διαιρεθεί σε δύο ισοδύναμα μέρη με ευθεία που να διέρχεται από μια κορυφή του.*

**4.** *Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Κ της πλευράς του ΑΔ.*
*i) Να μετασχηματισθεί το ΑΒΓΔ σε ισοδύναμό του τρίγωνο του οποίου μια κορυφή να είναι το Κ και οι άλλες να βρίσκονται πάνω στην ευθεία ΒΓ.*
*ii) Να αχθεί από το Κ μια ευθεία που να διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισοδύναμα μέρη.*



## ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε//ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*
*i) (ΒΔΕ) = (ΓΔΕ), ii) (ΒΑΕ) = (ΓΑΔ),*
*iii) (ΒΑΕ) + (ΓΑΔ) = (ΑΒΓ), με την επιπλέον υπόθεση ότι τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.*

**2.** *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ, ώστε* $ΒΔ = \dfrac{λ}{λ^2+4}ΒΓ$, $λ > 0$. *Να αποδείξετε ότι:*
*i)* $(ΑΒΔ) = \dfrac{λ}{λ^2+4}(ΑΒΓ)$, *ii)* $(ΑΒΔ) \leq \dfrac{1}{4}(ΑΒΓ)$,
*iii)* $(ΑΓΔ) \geq \dfrac{3}{4}(ΑΒΓ)$.

**3.** *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Με τη θεωρία του εμβαδού να αποδείξετε ότι* $\dfrac{ΒΔ}{ΔΓ} = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ}$ *(Θεώρημα διχοτόμου).*

**4.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β = 3γ, ΑΔ μία διχοτόμος του και ΒΕ μία διάμεσός του. Να αποδείξετε ότι:*
*i)* $(ΑΒΔ) = \dfrac{1}{3}(ΑΔΓ)$,
*ii)* $(ΑΒΔ)\cdot(ΔΕΓ) = (ΑΔΓ)\cdot(ΒΕΔ)$,
*iii)* $(ΔΕΓ) = \dfrac{3}{8}(ΑΒΓ)$.

**5.** *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 6cm και* $\hat{A} = 120°$.
*i) Να βρεθεί το εμβαδόν του,*
*ii) Αν Ε είναι σημείο της ΑΓ τέτοιο, ώστε* $ΑΕ = \dfrac{1}{3}ΑΓ$ *και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ.*
*iii) Αν η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ στο Ζ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ.*

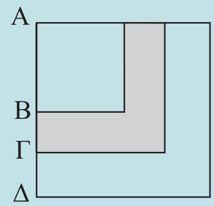
**6.** *Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ||ΒΓ) και τα μέσα Κ, Λ των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*
*i) (ΑΒΛΚ) = (ΚΛΓΔ),*
*ii) (ΜΑΒ) = (ΜΓΔ), για οποιοδήποτε σημείο Μ του ΚΛ.*

**7.** *Θεωρούμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *με ΑΒ = γ. Διαιρούμε την πλευρά ΑΒ σε ν ίσα τμήματα (ν φυσικός, ν ≥ 2) και από τα σημεία διαίρεσης φέρουμε παράλληλες προς την ΑΓ.*
*i) Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του γ τα εμβαδά των ν σχημάτων στα οποία διαιρέθηκε το τρίγωνο ΑΒΓ.*
*ii) Χρησιμοποιώντας το ( i) να αποδείξετε ότι*

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2ν - 1) = ν^2.$$

**8.** *Δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΔΕΖΗ έχουν κοινή την κορυφή Δ και εμβαδόν 36 το καθένα. Αν οι πλευρές ΒΓ και ΕΖ έχουν κοινό μέσο Μ, να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος ΑΒΜΖΗΔ.*

**9.** *Τρία τετράγωνα των οποίων τα μήκη των πλευρών είναι ακέραιοι αριθμοί, έχουν κοινή κορυφή Α και είναι τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο, όπως δείχνει το σχήμα. Αν $ΒΓ = ΓΔ$ και η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν 17, να βρεθεί το εμβαδόν του μικρότερου και του μεγαλύτερου τετραγώνου.*




**10.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τρεις θετικοί αριθμοί λ,μ,ν. Να φέρετε δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία μέρη ανάλογα των αριθμών λ,μ,ν.*

**11.** *i) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείου Μ. Αν η ΑΜ τέμνει την ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι:*

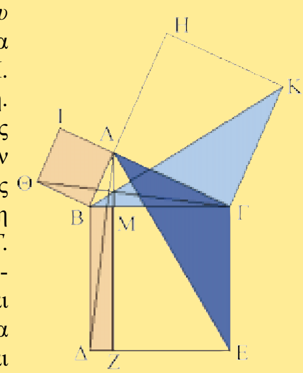
*α)* $\dfrac{ΒΔ}{ΔΓ} = \dfrac{(ΑΜΒ)}{(ΑΜΓ)}$, *β)* $\dfrac{ΜΔ}{ΑΔ} = \dfrac{(ΒΜΓ)}{(ΑΒΓ)}$,

*ii) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Μ. Αν οι ευθείες ΑΜ, ΒΜ και ΓΜ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ στα Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι*

$$\frac{ΑΕ}{ΕΓ} + \frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΑΜ}{ΜΔ}.$$

## ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

*Το Πυθαγόρειο θεώρημα στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη* αποδεικνύεται στην προτελευταία πρόταση (Πρόταση 47) του Βιβλίου Ι. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο *ΑΒΓ* με $\hat{A}$ ορθή. Το τετράγωνο που κατασκευάζεται επί της *ΒΓ* είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των τετραγώνων που κατασκευάζονται επί της *ΑΒ* και *ΑΓ*. Φέρουμε την *ΑΖ* παράλληλη στις *ΒΔ*, *ΓΕ* και τις ευθείες *Α Δ* και *ΘΓ*. Αφού οι γωνίες $Β\hat{Α}Γ$, $Β\hat{Α}Ι$ είναι ορθές, προκύπτει ότι τα τμήματα ΙΑ, ΑΓ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το ίδιο και τα τμήματα *ΒΑ*, *ΑΗ*. Αφού οι γωνίες $Δ\hat{Β}Γ$, $Θ\hat{Β}Α$ είναι ορθές, έχουμε ότι $Δ\hat{Β}Γ = Θ\hat{Β}Α$, οπότε: $Δ\hat{Β}Γ + Α\hat{Β}Γ = Θ\hat{Β}Α + Α\hat{Β}Γ$ ή $Δ\hat{Β}Γ = Θ\hat{Β}Γ$.




**Το Πυθαγόρειο θεώρημα στο Βιβλίο Ι των «Στοιχείων»**

Αφού $ΔΒ = ΒΓ$, $ΘΒ = ΒΑ$ και $Δ\hat{Β}Α = Θ\hat{Β}Γ$, η βάση *ΑΔ* ισούται με τη βάση *ΘΓ* και το *ΑΒΔ* ισούται με το *ΘΒΓ*. Τώρα το παραλληλόγραμμο *ΒΜΖΔ* είναι διπλάσιο από το *ΑΒΔ*, και το τετράγωνο *ΙΑΒΘ* είναι διπλάσιο από το *ΘΒΓ*. Επομένως, το παραλληλόγραμμο *ΒΜΖΔ* είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο *ΙΑΒΘ*. Όμοια, αν φέρουμε την *ΑΕ* και τη *ΒΚ* μπορεί να αποδειχθεί ότι το παραλληλόγραμμο *ΓΜΖΕ* είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο *ΗΚΓΑ*. Επομένως, το τετράγωνο *ΒΔΕΓ* είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των δύο τετραγώνων *ΙΑΒΘ* και *ΗΚΓΑ*.

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Αντικείμενο του κεφαλαίου είναι η έννοια του εμβαδού. Το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων (ή μερών του) που απαιτούνται για να καλύψουν την έκτασή του. Δεχόμαστε την αλήθεια των εξής ιδιοτήτων:

- Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.
- Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων.

Ευθύγραμμα σχήματα με το ίδιο εμβαδόν λέγονται ισοδύναμα.

Με σκοπό την παραγωγή των τύπων υπολογισμού του εμβαδού βασικών ευθύγραμμων σχημάτων δεχόμαστε ότι το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α είναι $E = \alpha^2$. Στηριζόμενοι σ' αυτό αποδεικνύουμε ότι το εμβαδόν Ε ορθογωνίου με πλευρές α, β είναι $E = \alpha\beta$. Στη συνέχεια μετασχηματίζοντας το παραλληλόγραμμο σε ορθογώνιο βρίσκουμε τον τύπο του εμβαδού Ε ενός παραλληλογράμμου. Θεωρώντας πλέον το τρίγωνο ως το μισό κατάλληλου παραλληλογράμμου βρίσκουμε τον τύπο του εμβαδού ενός τριγώνου. Τέλος χωρίζοντας ένα τραπέζιο σε δύο τρίγωνα βρίσκουμε ότι το εμβαδόν Ε ενός τραπεζίου δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{B + \beta}{2}\upsilon.$$

Στη συνέχεια δίνουμε και άλλους τύπους για το εμβαδόν τριγώνου.

Ως πόρισμα αυτών καταλήγουμε στο Νόμο των ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R \cdot$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων.
Επίσης, αποδεικνύουμε ότι για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με

$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \text{ ισχύει ότι } \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}.$$

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι κάθε κυρτό πολύγωνο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμό του τετράγωνο, αποδεικνύοντας πρώτα ότι το πολύγωνο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμό του τρίγωνο και αυτό σε ισοδύναμο τετράγωνο.

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

# ΕΜΒΑΔΟΝ

### Πολυγώνων

**Τετραγώνου:** $E = \alpha^2$

**Ορθογωνίου:** $E=\alpha\cdot\beta$

**Παραλληλογράμμου:** $E = \alpha\,.\,\upsilon_\alpha = \beta\,.\,\upsilon_\beta$

**Τριγώνου:** $E=\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha=\frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta=\frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$ →

- $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$
- $E = \tau\rho$
- $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$
- $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu \Gamma$

**Τραπεζίου:** $E = \frac{1}{2}(B+\beta)\cdot\upsilon$

**Ρόμβου (και τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους):** $E = \frac{1}{2}\delta_1\cdot\delta_2$

### Πολυγωνικών Επιφανειών

$(\Pi.E.)=(\Pi_1)+(\Pi_2)+\cdots+(\Pi_\nu)$

### Εμβαδόν και ομοιότητα

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')}=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\alpha'}, & \text{αν } \upsilon_\alpha=\upsilon_{\alpha'}\\[2mm] \dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}} & \text{αν } \alpha=\alpha'\\[2mm] \dfrac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}, & \text{αν } \hat{A}=\hat{A}' \text{ ή } \hat{A}+\hat{A}'=180^o\\[2mm] \lambda^2, & \text{αν } \overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'} \text{ και } \lambda \text{ ο λόγος ομοιότητας}\end{cases}$$

$$\frac{(AB\Gamma\cdots K)}{(A'B'\Gamma'\cdots K')}=\lambda^2,\ \text{αν } AB\Gamma\cdots K \approx A'B'\Gamma'\cdots K' \text{ και } \lambda \text{ ο λόγος ομοιότητας}$$

### Τετραγωνισμός πολυγώνου

- Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμο τρίγωνο
- Μετασχηματισμός τριγώνου σε ισοδύναμο τετράγωνο