ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

§ 2.1 - 2.10

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. i) 6 τμήματα, ii) 10 τμήματα.
2. i) 3 σημεία , ii) 3 τμήματα και 12 ημιευθείες.
3. ΑΓ=ΑΒ+ΒΓ=...
4. ΑΓ=ΑΜ+ΜΒ+ΒΝ+ΝΓ=...

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα ΑΔ,ΒΓ ως συνάρτηση του ΕΖ.
2. Υπολογίστε τα ΓΑ,ΓΒ ως συνάρτηση του ΓΜ.
3. α) Να διακρίνετε περιπτώσεις.
β) προκύπτει από το (α).

Σύνθετα θέματα

1. Να εξετάσετε δύο περιπτώσεις. Αν το Α είναι μεταξύ των Β,Γ ή όχι.
2. 6 τροχονόμοι.

§ 2.11 - 2.16

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Αφαιρούμε την $y\hat{O}z$
2. $\frac{1}{2}$ ορθής.
3. Ορθή γωνία. Μετά από 6 ώρες.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $\Delta\hat{O}E = \Delta\hat{O}y + y\hat{O}E = \cdots$
2. Υπολογίστε τις $\Gamma\hat{O}A, \Gamma\hat{O}B$ ως συνάρτηση της $\Gamma\hat{O}\Delta$.
3. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση.

Σύνθετα θέματα

1. Υπολογίστε τις $A\hat{O}\Delta, B\hat{O}\Gamma$ ως συνάρτηση της $x\hat{O}y$.
2. $\Delta\hat{O}E = B\hat{O}\Delta - B\hat{O}E = \cdots$

§ 2.17 - 2.18

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Άπειροι.
2. Απλή

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Είναι ΟΑ=ΟΔ και ΟΒ=ΟΓ.
2. Η ΟΓ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$.

§ 2.19

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. i) Είναι:
$\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PM} - \overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{PM} + \overset{\frown}{MB}$
ii) Είναι:
$\overset{\frown}{\Sigma A} = \overset{\frown}{\Sigma M} + \overset{\frown}{MA}$ και $\overset{\frown}{\Sigma B} = \overset{\frown}{MB} - \overset{\frown}{\Sigma M}$
2. α) $(\overset{\frown}{A\Gamma}) = 130^o, (\overset{\frown}{\Gamma B}) = 50^o$
3. 30^o και 60^o
4. 72^o

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. 45^o
2. 35^o και 55^o
3. $A\hat{O}B = 36^o$ κτλ.

Γενικές Ασκήσεις

1. Αν Ο μέσο ΑΒ τότε ΕΖ=ΟΖ-ΟΕ κτλ.
2. Αν Ο μέσο ΒΖ αρκεί ΔΒ=ΖΕ.
3. $AE = AB + \frac{B\Delta}{2}, B\Delta = B\Gamma + \Gamma\Delta$ κτλ.
4. Αποδείξτε ότι $A\hat{O}x = 180^o$
5. 45^o

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

§ 3.1 - 3.2

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΓ είναι ίσα.
2. Τα τρίγωνα ΜΑΚ,ΚΒΛ και ΛΓΜ είναι ίσα.
3. Συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α΄Β΄Μ΄ όπου Μ, Μ΄ τα μέσα των ΒΓ και Β΄Γ΄ αντίστοιχα
4. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΑΒΖ

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Είναι $\overset{\Delta}{AKB} = \overset{\Delta}{\Delta KE}$ και $\overset{\Delta}{AK\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta KZ}$.
2 Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ.
3. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ.

§ 3.3 - 3.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ καθώς και τα ΑΒΕ και Α΄ΒΈ΄.
ii) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΕ και Α΄ΒΈ΄.
2. α) Είναι $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma} = \overset{\Delta}{A'\Delta'\Gamma'}$
β) Χρησιμοποιήστε το α).
3. Να βρείτε τρεις πλευρές ίσες.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Εφαρμογή του κριτηρίου ΓΠΓ.
2. Εφαρμογή των κριτηρίων ΠΓΠ και ΠΠΠ.
3. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.

Σύνθετα θέματα

1. α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄.
β) $\overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{A'B'M'}$
γ) $\overset{\Delta}{AB\Theta} = \overset{\Delta}{A'B'\Theta'}$.
2. Χαρακτηριστική ιδιότητα μεσοκαθέτου.
3. α) Απλό, β) Αποδείξτε ότι $E\hat{A}\Gamma = A\hat{B}\Delta$.

§ 3.5 - 3.6

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ, ΒΔ και ΓΕ τα ύψη.
2. α) Αν ΚΔ, ΛΕ⊥ΒΓ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΚ και ΕΓΛ.
β) Αν ΚΗ⊥ΑΓ και ΛΖ⊥ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΗΑΚ και ΖΑΛ.
3. Να συγκρίνετε τα δύο ορθογώνια τρίγωνα που προκύπτουν.
4. Αν ΑΔ⊥ΒΓ και Α΄Δ΄⊥Β΄Γ΄ να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Αν ΜΕ⊥ΑΒ και ΜΔ⊥ΑΓ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΕ και ΑΜΔ.
2. Το τρίγωνο με πλευρές υ_α, μ_α είναι ίσο με το τρίγωνο που έχει πλευρές $\upsilon_{\alpha'}$, $\mu_{\alpha'}$.
3. Αν ΒΔ⊥ΑΓ, Β΄Δ΄⊥Α΄Γ΄, ΓΕ⊥ΑΒ και Γ΄Ε΄⊥Α΄Β΄ αποδείξτε ότι $\overset{\Delta}{BE\Gamma} = \overset{\Delta}{B'E'\Gamma'}$ και $\overset{\Delta}{B\Delta\Gamma} = \overset{\Delta}{B'\Delta'\Gamma'}$.
4. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΕΔΒ και στη συνέχεια τα ΑΒΓ και ΕΒΖ.
5. Σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα τόξα.

Σύνθετα θέματα

1. i) Είναι ΔΒ = ΔΓ και ΔΕ = ΔΖ
ii) Είναι ΑΕ = ΑΖ και ΓΖ΄ = ΒΕ΄.
2. Αν γ = γ΄ προεκτείνετε τις ΑΓ, Α΄Γ΄ κατά τμήματα ΓΔ = α, Γ΄Δ΄ = α΄ αντίστοιχα.

§ 3.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Είναι ο κύκλος (Μ, ΜΑ) χωρίς τα σημεία τομής του με την ευθεία ΒΓ.
2. Είναι ο κύκλος (Ο, 2R).

§ 3.8 - 3.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

2. Εφαρμογή § 3.8.
3. Να λάβετε υπόψη την προηγούμενη άσκηση.
4. Εφαρμογή § 3.8.
5. Αποδείξτε ότι το συμμετρικό κάθε σημείου της γωνίας ως προς τη διχοτόμο είναι σημείο της γωνίας.
6. Ιδιότητες μεσοκαθέτου.

§ 3.10 - 3.11 - 3.12

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Θεώρημα εξωτερικής γωνίας.
2. Είναι $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$.
3. Διακρίνετε περιπτώσεις για τη θέση του ίχνους του ύψους στη ΒΓ.
4. Θεώρημα εξωτερικής γωνίας
5. $A\hat{M}B > \hat{\Gamma}$ κτλ.
6. Φέρουμε ΔΕ⊥ΒΓ.
7. Τα τρίγωνα ΟΒΜ και ΟΓΛ είναι ίσα.
8. Είναι ΒΔ = ΓΔ.
9. Εφαρμογή του: $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ συνεπάγεται β=γ.
10. Εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Από την $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$ προκύπτουν ΑΜ<ΒΜ και ΑΜ<ΜΓ.
2. Εφαρμογή § 3.12.
3. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΑ΄.
4. Αν τα Σ, Ο, Μ δεν είναι συνευθειακά, εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα στο $\overset{\triangle}{\Sigma O M}$.
5. Αν Μ το μέσο της ΑΓ, το $\overset{\triangle}{ABM}$ είναι ισοσκελές.
6. Παίρνουμε το μέσο του $\overset{\frown}{AB}$.
7. Εφαρμογή § 3.12.

Σύνθετα θέματα

1. i) τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ.
ii) Όταν το Ο ταυτίζεται με το σημείο τομής των διαγωνίων.
2. Αποδείξτε ότι $M\hat{E}B = M\hat{B}E$.
3. Εφαρμόστε την τριγωνική ανισότητα.
4. Θεωρήστε τα συμμετρικά του Γ ως προς τις πλευρές της γωνίας.

§ 3.13

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Σύγκριση πλαγίων τμημάτων.
2. Σύγκριση πλαγίων τμημάτων.
3. Σύγκριση κάθετου και πλάγιου τμήματος.

§ 3.14 - 3.15

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Να συγκρίνετε τα αποστήματα των χορδών.
2. Ιδιότητες διακεντρικής ευθείας ενός σημείου.
3. Ισότητα εφαπτόμενων τμημάτων

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Βρείτε ισοσκελή τρίγωνα
2. Φέρτε τη ΜΟ και αποδείξτε ότι $O\hat{M}B = B\hat{M}\Gamma$.
3. Η ΟΡ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

§ 3.16

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σχετικές θέσεις δύο κύκλων.
2. Εφάπτονται εσωτερικά.
3. Εφάπτονται εξωτερικά.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. i) Αποδείξτε ότι
ΡΟ-2R<ΡΟ<ΡΟ+2R
ii) Το Α είναι μέσο του ΟΓ.
2. i) απλό, ii) $O_1O_2 < O_1A + AB + BO_2$ iii) $AB < AO_1 + O_1O_2 + O_2B$.
3. Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων.

§ 3.17 - 3.18

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Διχοτομούμε μια ορθή γωνία.
2. Απλή.
3. Κατασκευή 3 § 3.18.
4. Αρχικά κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο του ΒΓ = α.
5. i), ii) Αρχικά κατασκευάζουμε μια ορθή γωνία $x\hat{A}y$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Στη Γ΄Β΄ παίρνουμε σημείο Β΄΄ τέτοιο ώστε Γ΄Β΄΄ = ΓΒ.
2. Ισότητα τριγώνων.
3. Πάνω στον κύκλο παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = ΑΒ.
4. Είναι $\overset{\triangle}{ABE} = \overset{\triangle}{B\Gamma Z}$ κτλ.
5. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και παίρνουμε το μέσο Ε της ΑΓ.
6. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ και παίρνουμε το μέσο Μ της ΒΓ.
7. Προεκτείνουμε τις διαμέσους ΑΜ και Α΄Μ΄ κατά ίσα τμήματα.
8. Ιδιότητα μεσοκαθέτου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

§ 4.1 - § 4.5

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Αποδείξτε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$.
2. Αποδείξτε ότι $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$
3. Αποδείξτε ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$
4. Βρείτε δύο κατάλληλες γωνίες ίσες.
5. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση.
6. Είναι ΟΜ⊥ΑΒ, ...

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. ΑΜ⊥ΒΓ οπότε ΑΜ//Γx.
2. Αποδείξτε ότι ΑΒ=ΑΕ.
3. Αποδείξτε ότι ΑΔ=ΑΒ.
4. ΔΕ=ΔΙ+ΙΕ = ...
5. ΒΓ=ΒΔ+ΔΕ+ΔΓ = ...

Σύνθετα Θέματα

1. Αποδείξτε ότι ΕΖ//ΒΓ και ΜΚ//ΒΓ.
2. Φέρουμε ΓΖ//Αx//Βy.
3. ΔΕ=ΙαΕ-ΙαΔ
4. α) απλό
β) ΒΕ+ΓΖ=ΒΑ+ΑΓ=σταθερό γ) Προεκτείνουμε την ΕΜ κατά ίσο τμήμα.

§ 4.6 - § 4.8

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. α) $\hat{B} = 60^o, \hat{\Gamma} = 30^o$
β) $\hat{B} = 36^o, \hat{\Gamma} = 54^o$
2. $\hat{A} = 36^o$ οπότε $B\hat{I}\Gamma = 108^o$
3. $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36^o$
4. Οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές.
5. $\hat{\Delta} = 36^o$
6. $\omega = 45^o$, $\varphi = 55^o$
7. ν = 7

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{\Gamma}$ οπότε ..... $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
2. Παρατηρήστε ότι είναι εξωτερικές γωνίες τριγώνου
3. $\Delta\hat{A}E + A\hat{E}\Delta = 90^o$, $A\hat{E}\Delta$ εξωτερική στο τριγ. ΑΕΓ
4. $A\hat{E}B + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 180^o$ κτλ.
5. Υπολογίστε την $\hat{A}$ από τριγ. ΑΒΓ και την $E\hat{\Delta}\Gamma$ από τριγ. ΔΕΓ.
6. Αποδείξτε ότι $\hat{Z} = \hat{E}$.

7. Αποδείξτε ότι $\hat{Z} = \hat{H}$.

Σύνθετα θέματα

1. Αν η ΔΕ τέμνει την ΒΓ στο Κ αποδείξτε ότι το τριγ. ΒΔΚ είναι ορθογώνιο.

2. Παρατηρήστε ότι το τριγ. ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

3. Αρκεί $\Delta\hat{A}B + \hat{A} + \Gamma\hat{A}E = 180^o$.

4. α) Αποδείξτε ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{E}$ β) Προκύπτει από τα τρίγ. ΒΔΓ και ΔΓΕ.

5. i) απλό ii) $Z\hat{A}H = Z\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{A}H$, κτλ.

6. Αν η διχοτόμος της Β τέμνει την ΔΓ στο Ε, από τριγ. ΔΖΕ...

7. Αποδείξτε ότι α//β.

Γενικές Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις $B\hat{\Delta}\Gamma$ και $\Gamma\hat{E}A$ ως συνάρτηση των $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$. Είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 120^o (\hat{A} = 60^o)$

2. Παίρνουμε το μέσο Ζ του ΕΓ.

3. Φέρουμε ΔΗ⊥ΑΒ και ΔΚ⊥ΑΓ

4. Είναι $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^o$ (αφού $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^o$)

5. i) Είναι $\hat{B} > \hat{\Gamma} (AB < A\Gamma)$ ii) προεκτείνουμε την ΑΜ κατά ίσο τμήμα iii) $B\hat{A}E = E\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}$ οπότε από i) και ii) ....

6. Έχουμε τρία ισοσκελή τρίγωνα.

7. Παρατηρήστε τα ίσα εφαπτόμενα τμήματα που σχηματίζονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

§ 5.1-5.2

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Τρίγ. ΑΔΕ ισοσκελές

2. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται

3. i) ΑΕ//=ΓΖ ii) Τα παραλληλόγραμμα έχουν μια κοινή διαγώνιο

4. Τρίγ. ΑΕΔ ισοκελές

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. ΜΕ=ΑΔ και τριγ. ΜΔΒ ισοσκελές

2. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΓ

3. Φέρουμε την ΑΓ

4. Τα ΑΖΒΓ και ΑΒΓΗ είναι παραλληλόγραμμα.

5. Γράφουμε κύκλο (Ο,λ), όπου Ο τυχαίο σημείο της μιας ευθείας.

Σύνθετα θέματα

1. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΓΗΖ

ii) Τα παραλληλόγραμμα, ανά δύο έχουν μια κοινή διαγώνιο

2. Αποδείξτε ότι ΓΖ,ΓΕ διχοτόμοι

3. Αρκεί $\hat{\Gamma} + B\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{\Gamma}Z = 180^o$

4. Φέρουμε από το Δ παράλληλη στην ΑΒ

5. Αν ΓΔ η θέση της γέφυρας φέρουμε ΒΕ//=ΓΔ.

§ 5.3 - 5.5

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. ΑΕ//=ΓΖ

2. $ZE = \frac{B\Delta}{2} = A\Gamma$

3. Να λάβετε υπόψη σας την εφαρμογή της § 4.4

4. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΓΖ

5. Να βρείτε τις ιδιότητες των διαγωνίων του

6. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΚΝ, ΒΚΛ, ΜΓΛ και ΜΑΝ

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο και η ΒΔ διχοτόμος

2. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΔΕ

ii) Με άθροισμα γωνιών σε κατάλληλο τρίγωνο

3. Φέρουμε την ΕΖ

4. Αν ΚΛ ⊥ΕΖ, φέρουμε ΕΗ ⊥ΔΓ και ΚΜ⊥ ΒΓ

Σύνθετα θέματα

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΜΖΓ

2. Αρκεί γων. ΒΖΓ = γων.ΖΒΓ.

3. i) Το άθροισμα ισούται με το ύψος ΒΗ (σταθερό). ii) Από το τυχαίο σημείο Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ και εφαρμόζουμε το (i)

§ 5.6 - 5.9

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Τα Δ,Ε είναι μέσα των ΑΒ,ΑΓ

2. Τα Δ,Η και Ζ,Ε είναι μέσα πλευρών

3. Οι ΕΜ,ΔΜ είναι διάμεσα ορθογωνίων τριγώνων

4. Τα Ε,Ζ είναι μέσα πλευρών και $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

5. Να λάβετε υπόψη σας την ιδιότητα του βαρύκεντρου

6. Το Ε είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΓΔ

7. Το ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο και $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΕΖ

ii) Η ΔΜ διάμεσος και τα Ε,Ζ μέσα πλευρών

2. Φέρουμε την ΔΒ

3. Είναι $M\hat{A}\Delta + \Delta\hat{M}A = 90^o$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$

4. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο

5. Φέρουμε την ΑΓ. Τα Κ,Η είναι βαρύκεντρα τριγώνων

6. Παίρνουμε το μέσο Ζ του ΑΓ

7. i) Να αποδείξετε ότι το ΒΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο

ii) Το Η είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΓ

8. Είναι ΜΔ=ΑΔ και $M\Delta = \frac{\Delta B}{2}$

9. Αν Μ το σημείο τομής των ΕΗ και ΚΖ, αρκεί $\hat{M} = 90^\circ$.

10. Ο δρόμος συνδέει τα μέσα των αποστάσεων.

Σύνθετα θέματα

1. Είναι ΕΖ\\ ΑΒ και ΔΕ=ΕΓ

2. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $A\hat{M}\Gamma = 30^o$

3. Είναι $ZH // = \frac{K\Gamma}{2}$ και Κ βαρύκεντρο.

4. Παρατηρήστε ότι $\hat{B} = 2\hat{E} = 2\hat{\Gamma}$

5. Προεκτείνουμε την ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ

6. Είναι ΒΜ\\ΕΓ και Η ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΜ

7. i) Απλό ii) Αν Ο το μέσο του ΑΒ, αρκεί ΟΚ//ΒΓ.

8. i) Απλό ii) Με άθροισμα γωνιών σε κατάλληλο τρίγωνο. iii) Αν Κ το σημείο τομής των ΑΜ και ΔΖ αρκεί ΒΚ//ΕΖ.

§ 5.10 - 5.11

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Η ΕΖ διάμεσος τραπεζίου και Η,Θ μέσα πλευρών τριγώνου.

2. ΔΕ//ΒΓ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

3. ΕΗ=ΘΖ και Ε,Ζ,Η,Θ μέσα πλευρών τριγώνου.

4. ΚΕ $= \dfrac{ΑΔ}{2}$ και ΚΛ//ΔΓ

5. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ.

6. Η ΜΔ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΒΒ΄Γ΄Γ.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Αρκεί ΗΖ=ΒΖ

2. Το Ζ είναι σημείο της μεσοκαθέτου και το ΖΗΒΓ ισοσκελές τραπέζιο.

3. Φέρουμε ΒΕ⊥ΔΓ, οπότε

$E\hat{B}\Gamma = 30^o$

4. Παίρνουμε το μέσο Ε της ΑΔ.

5. Αρκεί $ΜΕ = \dfrac{ΒΓ}{2}$

6. Είναι $ΔΗ = \dfrac{ΑΒ}{2}$ και Δ,Ε,Ζ μέσα πλευρών τριγώνου.

7. Να λάβετε υπόψη σας το πόρισμα.

8. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση. Για να είναι ορθογώνιο πρέπει ΑΓ=ΒΔ.

9. Η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΕΒΓΔ.

10. Βρείτε κατάλληλα τραπέζια με διάμεσο την ΚΚ΄.

Σύνθετα θέματα

1. Αν η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την ΒΓ στο Ε αρκεί ΔΕ διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

2. Φέρουμε ΜΕ ⊥ΑΔ

3. Αν Κ το κέντρο του ΑΒΓΔ φέρουμε ΚΚ΄⊥ε

4. Η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΔΕΓΑ, οπότε .... $\hat{B} = 30^o$

5. i) Αποδείξτε ότι το ΑΒΜΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο ii) Η προέκταση της ΑΕ τέμνει την ΔΓ στο Ζ

Γενικές ασκήσεις

1.Αν ΑΒ<ΑΓ είναι

$ΑΔ = \dfrac{ΑΒ}{2} < \dfrac{ΑΓ}{2}$ και

$ΑΕ = \dfrac{ΑΓ}{2} > \dfrac{ΑΒ}{2}$

2. Παίρνουμε το μέσο Μ του ΔΕ.

3. α) Τα τρίγωνα ΑΒ΄Β και ΑΕ΄Ε είναι ισοσκελή β) Αποδείξτε ότι ΒΈ΄ =ΓΕ΄.

4. α) απλό β) Αρκεί $H\hat{E}Z = Z\hat{E}\Gamma$

γ) $ΗΕ = \dfrac{ΑΒ}{2} = ΖΓ$ δ) Από το (γ) προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = 2Z\hat{E}\Gamma$

5. Παίρνουμε το μέσο Δ του ΒΚ και φέρνουμε Δ΄Δ ⊥ε

6. α) απλό β) Το Η είναι ορθόκεντρο του τριγ. ΑΔΖ

7) Παρατηρήστε ότι

$ΜΛ // = \dfrac{ΒΗ}{2}$ και $ΜΚ // = \dfrac{ΕΓ}{2}$

8) α) Το Μ είναι το μέσο του ΟΓ και το Ζ βαρύκεντρο του τριγ. ΒΟΓ

β) Να λάβετε υπόψη σας το (α)

9) i) Φέρουμε ΟΚ διάμεσο στο τριγ. ΟΑΒ. Αρκεί να τέμνει την ΔΓ στο μέσο Λ

10) Φέρουμε από τα Δ και Ε κάθετες στις ΑΒ,ΒΓ και ΑΓ,ΒΓ αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

§ 6.1 - 6.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Για το 1ο σχήμα είναι x=40° και y = 2x = 80°.

Για το 2ο σχήμα είναι x=50° και y = 180°-x-35° = 105°.

2. Είναι: $\overset{\frown}{BE} = 120^o$ (Εφαρμογή § 6.3).

3. Είναι x = 40° (γωνία χορδής και εφαπτ.). Επίσης $2y + \overset{\frown}{B\Gamma} = 180^o$ οπότε y = 140°. Για το 2ο σχήμα, είναι y-x=120°. Από $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{B}\Delta$ προκύπτει x+y=260° οπότε x=70° και y=190°.

4. Είναι: $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 95^o$ και $\overset{\frown}{BE} = 45^o$.

5. Είναι $B\hat{O}\Gamma = Z\hat{A} = 140^o$ και

$O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}B = 20^o$.

Επίσης $M\hat{B}\Gamma = M\hat{\Gamma}B = \dfrac{1}{2}70^o = 35^o$

οπότε $B\hat{M}\Gamma = 110^o$.

6. Είναι y εξωτερική γωνία τριγώνου. Σωστή η α).

7. Βλέπε «τόξο που δέχεται γνωστή γωνία».

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Έστω Μ το μέσο του $\overset{\frown}{AB}$. Για το **ευθύ** αποδείξτε ότι η εφαπτομένη στο Μ και η ΑΒ τεμνόμενες από την ΜΒ, σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Για το **αντίστροφο** αποδείξτε ότι $M\hat{A}B = M\hat{B}A$.

2. Αποδείξτε ότι $A\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = 1\llcorner$.

3. Αν η ΜΡ τέμνει την ΑΔ στο Ν, δείξτε ότι: $N\hat{P}\Delta + P\hat{\Delta}A = 1\llcorner$.

4. Είναι η τομή δύο κατάλληλων τόξων.

Σύνθετα Θέματα

1. Φέρτε την κοινή εσωτερική (ή εξωτερική) εφαπτομένη και δείξτε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

2. Έστω Ζ,Η τα δεύτερα κοινά σημεία των ΑΒ,ΑΓ με το μικρότερο κύκλο. Αρκεί Δ μέσο $\overset{\frown}{ZH}$.

3. Αποδείξτε ότι $A\hat{A}P = \Delta\hat{A}P$

§ 6.5 - 6.6

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων.

$\hat{B} = 120^o, \hat{\Gamma} = 60^o$ και $\hat{\Delta} = 80^o$

2. Αρκεί $\hat{A} = 90^o$.

3. Αποδείξτε μια γωνία ορθή.

4. Εφαρμογή 1 § 6.6.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Φέρτε την κοινή χορδή ΑΒ και αποδείξτε ότι: $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_{\varepsilon\xi}$.

2. Αποδείξτε ότι οι ευθείες ε, ΔΕ τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

3. Αν τα ύψη ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ τέμνονται στο Η, παρατηρήστε ότι τα τετράπλευρα ΒΖΗΔ, ΔΗΕΓ και ΒΖΕΓ είναι εγγράψιμα.

4. Αποδείξτε ότι $\hat{K} + \hat{M} = 180^o$. Γι' αυτό λάβετε υπόψη ότι τα τρίγωνα ΚΑΔ και ΜΒΓ είναι ισοσκελή. (ΚΛΜΝ είναι το τετράπλευρο που σχηματίζεται).

Σύνθετα θέματα

1. Αποδείξτε ότι $E\hat{A}O + A\hat{E}\Delta = 90^o$ ή φέρτε την εφαπτόμενη στο Α.

2. Αρκεί $E\hat{\Delta}O = O\hat{E}\Delta$. Παρατηρήστε ότι ΟΒΔΜ και ΟΜΓΕ είναι εγγράψιμα.

3. Αν Δ,Ε,Ζ είναι οι προβολές ενός σημείου Μ του περιγ/νου κύκλου στις ΒΓ,ΑΓ,ΑΒ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι:

$Z\hat{E}M + M\hat{E}\Delta = 180^o$. (παρατηρήστε ότι τα ΜΖΑΕ, ΜΕΔΓ είναι εγγράψιμα).

4. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΓΔΕ είναι ίσα.

§ 6.7

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. i) Μεσοπαράλληλη ii) Κύκλος με κέντρο το κέντρο της γης

2. i) Ο κύκλος (Ο,R-ρ) **ii)** Ο κύκλος (Α,ρ).

3. Η θέση του θησαυρού είναι κοινό σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ και του κύκλου (Δ,4m).

4. Αν (O,R) είναι ο δοσμένος κύκλος ο γ.τ είναι ο κύκλος (O,R/2).

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Αν Ο το μέσο του ΒΓ είναι $AO = \frac{B\Gamma}{2} =$ σταθ. οπότε ο γ.τ. του Α είναι ο κύκλος $\left(O, \frac{B\Gamma}{2}\right)$.

2. Αν Μ η προβολή του Α πάνω σε ευθεία ε, που διέρχεται από το Β, τότε $A\hat{M}B = 1$∟.

3. Είναι ΟΜ=ΜΑ.

4. i) Είναι: $B\Gamma = 2AM = 2\mu$, ii) Το τρίγωνο ΑΔΜ κατασκευάζεται.

Σύνθετα θέματα

1. Το Μ είναι και μέσο του ΑΡ.

2. i) Το Α είναι τομή δύο γ.τ. **ii)** Από το Α φέρουμε ΑΚ//ΒΝ οπότε Β μέσο ΚΓ.

3. Το ΑΒΔ κατασκευάζεται, οπότε το Γ είναι στη τομή δύο γ.τ.

Γενικές ασκήσεις

1. i) Αρκεί $\Delta\hat{A}E = 180°$, ii) Αποδείξτε ότι δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, iii) Είναι $\Delta\hat{M}E = 90°$.

2. Ο Κύκλος $\left(K, \frac{\delta}{2}\right)$, όπου δ=ΑΓ–ΑΒ και Κ το μέσο της ΒΓ.

3. Προεκτείνουμε εκατέρωθεν τη ΒΓ.

4. Το Β ανήκει σε κύκλο ακτίνας $\frac{R}{2}$.

5. Αρκεί $\hat{E} + \hat{H} = 180°$.

6. Βρείτε κατάλληλα εγγράψιμα τετράπλευρα

7. Μια εξωτερική γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική.

8. i) $H_1M_1M_2M_3$ ισοσκελές τραπέζιο.

ii) Αποδείξτε ότι δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

iii) Προκύπτει με συνδυασμό των i) και ii).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

§ 7.1-7.6

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. $\hat{A} = 80°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{\Gamma} = 40°$

2. $\omega = 45°$

3. α=30 cm, β=20 cm, γ=15cm

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. $\hat{A} = 100°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{\Gamma} = 20°$

2. Να λάβετε υπόψη σας τις ιδιότητες των αναλογιών

3.
$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{MA}{MA+MB} = \frac{3}{3+4} \Leftrightarrow \cdots$$

§ 7.7

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Θεώρημα Θαλή

2. i) Θεώρημα Θαλή (ΖΓ\\ΑΔ), ii) Θεώρημα Θαλή (ΑΔ\\ΒΖ και ΑΒ\\ΔΗ)

3. Θεώρημα Θαλή (ΑΒ\\ΓΔ και ΒΕ\\ΑΓ)

4. Θεώρημα Θαλή και ΒΜ=ΜΓ

5. Αρκεί $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Delta}$

6. Αρκεί $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$

7. Αρκεί $\frac{M\Delta}{MB} = \frac{ME}{M\Gamma}$

8. Αρκεί $\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{H\Delta}{HE}$

9. h = 8m.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Να εξετάσετε 2 περιπτώσεις. Το Γ μεταξύ Ο και Β ή Ο και Α

2. Αρκεί $\frac{x}{3\mu} = \frac{y}{2\mu} = \frac{\omega}{4\mu}$, όπου μ αυθαίρετο τμήμα

3. Αρκεί $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AH}{H\Gamma}$

4. Θεώρημα Θαλή (ΔΖ\\ΒΓ) και ιδιότητες αναλογιών

5. Θεώρημα Θαλή (ΔΕ\\ΒΓ)

6. i) Αρκεί ΑΚ=2ΜΚ

ii) Αρκεί $\frac{ME}{E\Gamma} = \frac{MK}{AK}$

7. Αρκεί $\frac{\Delta E}{\Delta\Gamma} = \frac{Z\Gamma}{\Delta\Gamma}$

Σύνθετα θέματα

1. Φέρουμε ΔΖ\\ΒΓ

2. Φέρουμε ΑΕ\\ΒΓ

3. Θεώρημα Θαλή (ΒΕ\\ΟΑ και ΒΖ\\ΟΑ)

4. Φέρουμε ΔΗ\\ΒΖ. Από θεώρημα Θαλή προκύπτει ότι $\frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{\kappa\cdot\lambda}{\lambda+1}$

5. Να αποδείξετε ότι $\frac{K\Gamma}{KB} = \frac{M\Gamma}{M\Delta}$

§ 7.8-7.9

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Θεώρημα διχοτόμου στα τρίγ. ΑΒΜ και ΑΜΓ

2. ΔΕ=ΔΒ+ΕΒ= .....

3. Παρατηρήστε ότι ΜΕ εξωτερική διχοτόμος του τριγ. ΑΜΓ

4. Αρκεί $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$

5. Θεώρημα διχοτόμου για τις ΑΔ,ΒΕ και ΓΖ

6. Αποδείξτε ότι ΒΕ διχοτόμος της $B\hat{\Delta}\Gamma$.

7. Παρατηρήστε ότι ΟΓ,ΟΔ διχοτόμοι

8. Είναι ΔΒ < ΔΓ και ΒΓ = 42m (ΑΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ).

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Παρατηρείστε ότι ΟΑ εξωτερική διχοτόμος του τριγ. ΟΒΔ

2. Θεώρημα Θαλή (ΑΔ\\ΕΜ) και ΑΔ διχοτόμος

3. i) Η ΒΙ διχοτόμος στο τριγ. ΑΒΔ και

ΒΔ= $B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$, ii) Αρκεί

$\frac{AI}{I\Delta} = \frac{AK}{KM}$ iii) Προκύπτει από το (ii)

4. Θεώρημα διχοτόμου και τριγωνική ανισότητα

5. i) Θεώρημα διχοτόμου στο τρίγωνο ΟΔΓ και Θαλή ii) όμοια

Σύνθετα θέματα

1. Αποδείξτε ότι ΑΚ, ΑΛ διχοτόμοι στο τρίγ. ΕΑΖ

2. Θεώρημα διχοτόμου. Για το αντίστροφο αν η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την ΒΔ στο Ε αρκεί ΓΕ διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$.

3. Φέρουμε τη διχοτόμο ΜΔ του τριγ. ΑΜΒ, που τέμνει τον κύκλο στο Ε

4. Αν η ΔΖ τέμνει τη ΒΓ στο Κ αρκεί

$\frac{HK}{H\Delta} = \frac{K\Gamma}{\Delta\Gamma}$

5. Η άγνωστη κορυφή ανήκει σε ευθεία και κύκλο

Γενικές ασκήσεις

1. Να λάβετε υπόψη σας ότι ΚΔ\\ΑΒ\\ΛΕ

2. Φέρουμε Αx\\ΒΓ. Να λάβετε υπόψη σας την ιδιότητα του βαρυκέντρου

3. i) Φέρουμε ΓΗ\\ΑΒ ii) Εφαρμόζουμε το (i) για το τρίγ. ΑΒΔ και την ευθεία ΖΓ

4. Θεώρημα Θαλή (ΑΔ\\ΒΖ) και διχοτόμου (ΑΖ διχοτόμος)

5. Αποδείξτε ότι οι ΕΜ και ΖΜ είναι διχοτόμοι

6. i) Να εκφράσετε τα τμήματα ως συνάρτηση των ΟΑ,ΟΓ,ΟΔ
ii) Όμοια με το (i)

7. Αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, το Ζ προσδιορίζεται

8. Αν η παράλληλη από το Α προς την Οx τέμνει την Οy στο Δ, το Δ προσδιορίζεται (και στις τρεις περιπτώσεις).

9. Φέρουμε τα αποστήματα των χορδών

10. Να λάβετε υπόψη σας, ότι το άθροισμα δυο αντίστροφων θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του δύο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Παρατηρήστε ότι ΑΒΓ ≈ ΔΕΓ.

2. Παρατηρήστε ότι ΑΒΓ ≈ ΑΔΕ.

3. Το τρίγωνο που προκύπτει είναι όμοιο με το αρχικό (πλευρές ανάλογες).

4. Παρατηρήστε ότι σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα.

5. Παρατηρήστε ότι ΑΒΔ ≈ΑΔΓ και ΑΒΔ ≈ΑΒΓ.

6. Παρατηρήστε ότι ΑΒΔ ≈ ΑΕΓ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Παρατηρήστε ότι σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα.

2. Αποδείξτε ότι έχουν ίσες γωνίες και ανάλογες πλευρές.

3. Παρατηρήστε ότι $AB A_1 \approx AB A_2$.

4. Παρατηρήστε ότι ΗΑΕ ≈ ΗΒΔ και ΗΒΖ ≈ ΗΕΓ.

5. Παρατηρήστε ότι ΜΔΖ ≈ ΜΔ΄Ζ΄.

6. Παρατηρήστε ότι ΑΒΔ ≈ ΔΑΓ.

Σύνθετα θέματα

1. Φέρτε παράλληλες ώστε να δημιουργηθούν δύο παραλληλόγραμμα και δύο τρίγωνα.

2. Παρατηρήστε ότι σχηματίζεται εγγράψιμο τετράπλευρο.

3. Εφαρμόστε θεώρημα διχοτόμων και παρατηρήστε ότι ΑΒΔ ≈ ΑΔΓ.

4. Αποδείξτε ότι ΑΔΒ ≈ ΑΔΓ.

5. Παρατηρήστε ότι ΑΒΔ ≈ ΑΕΓ και ΑΒΕ ≈ ΒΔΕ.

Γενικές Ασκήσεις

1. Παρατηρήστε ότι ΑΒΤ ≈ ΑΓΤ.

2. Παρατηρήστε ότι ΑΒΔ≈ΑΒΕ, ΑΔΓ≈ΑΕΓ.

3. Παρατηρήστε ότι ΒΔΕ≈ΓΔΖ, ΑΒΕ≈ΑΓΖ.

4. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Θαλή στις παραλληλίες που προκύπτουν από τα κάθετα τμήματα.

5. (i) Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 4.(ii) Θεωρήστε το αντιδιαμετρικό σημείο του Μ (iii) Χρησιμοποιήστε τα (i), (ii).

6. Θεωρήστε σημείο Ε της ΑΓ, ώστε: $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

§ 9.1 - 9.2

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο θεώρημα.

2. Παρατηρήστε ότι $\hat{\Gamma} = 30^o$

3. Να συγκρίνετε τα ΑΔ και ΓΔ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο θεώρημα.

2. Παρατηρήστε ότι ΑΓΒ=ΑΔΒ=1∟. $A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Delta}B = 1∟$.

3. Σχηματίστε τη ΒΔ και εργασθείτε στα τρίγωνα ΕΒΔ και ΕΓΔ.

4. **(i)** Χρησιμοποιήστε το Πυθαγόρειο στα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄.

5. Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και παρατηρήστε ότι β = γ.

Σύνθετα θέματα

1. Εργαστείτε στα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΑΓ.

2. i) Θεωρήστε ΛΔ⊥ΚΒ ii) Χρησιμοποιήστε το i)

3. Αποδείξτε ότι το ΑΒΚΔ είναι ορθογώνιο. **(ii)** Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο.

4. Χρησιμοποιήστε ότι $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$.

5. Θεωρήστε τις προβολές των Γ και Δ στην ΑΒ.

6. Παρατηρήστε ότι ΔΑΒ ≈ ΑΒΓ και ΔΑΓ ≈ ΑΒΓ.

§ 9.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Εξετάστε ποια είναι η μεγαλύτερη γωνία.

2. Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 1.

3. Εφαρμόστε το θεώρημα οξείας γωνίας ή το νόμο των συνημιτόνων.

4. Παρατηρείστε ότι $\hat{A} = 60^o$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1 Εφαρμόστε γενικευμένο Πυθαγόρειο ως προς τη $\hat{B}$.
(Παρατηρήστε ότι $\hat{B} > 90°$).

2. Εργασθείτε στα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΔΓ για τις $\hat{\Gamma}, \hat{\Delta}$.

3. Εφαρμόστε το θεώρημα οξείας γωνίας για τις $\hat{B}, \hat{\Gamma}$.

4. Εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου.

5. Φέρτε κάθετες από τα Δ και Ε στη ΒΓ.

6. Χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα και υψώστε στο τετράγωνο.

Σύνθετα θέματα

1. Χρησιμοποιήστε ότι $\hat{A} = 30^o$.

2. Εργασθείτε στα τρίγωνα ΑΜΓ και ΒΜΔ.

3. Χρησιμοποιήστε Πυθαγόρειο.

§ 9.5

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Χρησιμοποιήστε 1ο και 2ο θεώρημα Διαμέσων.

2. Χρησιμοποιήστε το 1^o θεώρημα Διαμέσων

3. Χρησιμοποιήστε το 1^o θεώρημα Διαμέσων

4. Χρησιμοποιήστε τους τύπους των Διαμέσων.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα και το 1ο θεώρημα Διαμέσων.

2. Χρησιμοποιήστε το 2^o θεώρημα Διαμέσων.

3. **(i)** Χρησιμοποιήστε την τομή των διαγωνίων ΑΓ,ΒΔ **(ii)** Χρησιμοποιήστε το (i).
4. Χρησιμοποιήστε διαδοχικά το 1ο θεώρημα Διαμέσων.
5. Φέρτε τη διάμεσο ΑΜ.
6. Χρησιμοποιήστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων.

Σύνθετα θέματα

1. Φέρτε κατάλληλες παράλληλες από το μέσο μιας πλευράς.
2. Εργασθείτε με το μέσο του ΜΝ.
3. Εφαρμόστε το 1^o θεώρημα Διαμέσων στα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΓΔ.
4. Εφαρμόστε το 1^o θεώρημα Διαμέσων στα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ.
5. Εφαρμόστε το 1^o θεώρημα Διαμέσων στα τρίγωνα ΡΑΓ και ΓΑΔ.

§ 9.7

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Υπολογίστε το γινόμενο $AB \cdot A\Gamma$.
2. Παρατηρήστε ότι

$$ME = \frac{B\Delta}{2},\ NE = \frac{\Delta\Gamma}{2}$$

3. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών.
4. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Πυθαγόρειο Θεώρημα ii) Θεώρημα Τεμνουσών.
2. Θεώρημα διχοτόμου και τέμνουσας - εφαπτομένης.
3. i) Θεώρημα Τεμνουσών, ii) Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων.
4. Παρατηρήστε ότι το ΓΝΗΜ είναι εγγράψιμο. όπου Η το σημείο τομής των ΑΒ και ΟΜ.
5. Παρατηρήστε ότι ΒΔΜΗ εγγράψιμο.

Σύνθετα Θέματα

1. Παρατηρήστε ότι $\Delta E\Gamma \approx AE\Gamma$.
2. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Διαμέσων και υπολογίστε τη μ_α.
3. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Διαμέσων.
4. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών για τις ΒΕΑ και ΓΖΑ.

Γενικές ασκήσεις

1. **(i)** Εφαρμόστε το Πυθαγόρειο **(ii)** Με απαγωγή σε άτοπο.
2. Εφαρμόστε το θεώρημα Τεμνουσών και όμοια τρίγωνα.
3. Υπολογίστε όλους τους όρους ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου.

4. Θεωρήστε το ύψος και εφαρμόστε τα θεώρημα οξείας και αμβλείας γωνίας.
5. i) ΘΜ=α/2, όπου Θ βαρύκεντρο, ii) αν ΒΚ ύψος το ΔΗΚΓ είναι εγγράψιμο
6. Εφαρμόστε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα και το θεώρημα Διαμέσων.
7. Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων ($AB^2 + A\Gamma^2 = 4R^2 =$ σταθερό).
8. Αποδείξτε ότι ισχύει το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΕΔΗ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

§ 10.1 - 10.3

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. (ΑΒΓΔ)=16 τ.μ., (ΔΑΖ)=$4\sqrt{3}$.
Άν ΖΙ⊥ΑΒ τότε ΖΙ=2 οπότε (ΑΒΖ)=4τ.μ.=(ΔΓΖ) και $(B Z\Gamma) = 8 - 4\sqrt{3}$
2. Εφαρμόστε τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha$. Σωστό το Γ.
3. α) $\upsilon_\beta = 3\sqrt{3}$ μ.μ
β) $(AB\Gamma) = 12\sqrt{3}$ τ.μ.
γ) Βρίσκουμε πρώτα το ΒΓ.
4. Άν α,β οι διαστάσεις του ορθογωνίου, έχουμε: α+β=7 και $\alpha^2+\beta^2=25$ και προκύπτει Ε=12τ.μ.
5. α) (ΑΒΓΔ)=50τ.μ.
β) (ΑΕΖΒ)=(ΕΖΓΔ)=25τ.μ.
6. Φέρουμε ΔΗ⊥ΒΓ και βρίσκουμε ότι ΔΓ=13, οπότε το εμβαδόν της λωρίδας είναι 3·13=39τ.μ.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Φέρουμε ΑΗ, ΔΖ⊥ΒΓ και εφαρμόζουμε τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha$.
2. i) Εφαρμογή 3 π10.3
ii) Είναι $(AB\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma) = (BE\Gamma)$ και (ΑΔΓ)=(ΒΕΓ).
3. i) Εφαρμόστε την εφ. 3 π10.3 στα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{\Sigma B\Gamma}$ ii) Χρησιμοποιήστε το i). Για το υπόλοιπο χρησιμοποιήστε πάλι το i) για Σ=Θ.
4. Φέρουμε από το Μ παράλληλο προς τη ΔΓ.
5. Επίσης από το Μ φέρουμε παράλληλο προς τη ΔΓ

6. i) Φέρουμε ΕΗ⊥ΑΘ και εφαρμόζουμε θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΕΘ και βρίσκουμε $E\Theta = \sqrt{3}$
ii) Διαπιστώνουμε ότι $E\Theta^2+AE^2=A\Theta^2$
iii) $(AB\Gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ τ.μ.=(ΕΑΘ) οπότε $(B\Gamma Z\Theta E\Delta) = 5 + \sqrt{3}$
7. Φέρουμε ΒΜ, ΔΛ⊥ΑΓ και είναι (ΑΒΓΔ)=(ΑΒΓ)+(ΑΓΔ)
8. 58m και 76m.

Σύνθετα θέματα

1. i) ΘΙ, ΑΔ διάμεσοι στα $\overset{\Delta}{I\Theta\Delta}$, $\overset{\Delta}{A\Theta\Gamma}$ αντίστοιχα
ii) (ΙΘΔ)=2(ΑΔΓ)
ii) Χρησιμοποιήστε το ii).
2. Διαδοχική εφαρμογή της εφαρ. 3 της π 10.3.
3. i) Αποδείξτε ότι

$$B\hat{A}K + A\hat{B}K = 90^\circ$$

ii) Από το $\overset{\Delta}{ABZ}$ βρίσκουμε πρώτα $AZ = \frac{5\alpha}{4}$ και ακολούθως $AK = \frac{4\alpha}{5}$. Επίσης βρίσκουμε ότι $AH = \frac{\alpha}{4}\sqrt{17}$ και $KH = \frac{13}{20}\alpha$
iii) $(AKH\Delta) = \frac{77}{200}\alpha^2$ τ.μ.
4. i) Από το Ο φέρουμε κάθετες στις ΑΒ, ΓΔ και εφαρμόζουμε τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha$ ii) Από το i) είναι (ΑΒΓ)-(ΟΑΒ)=(ΟΓΔ).
5. Αν δ_1, δ_2 τα μήκη των διαγωνίων, είναι: $\alpha^2 = \frac{1}{4}(\delta_1^2 + \delta_2^2)$ και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την $x^2 + y^2 \geq 2xy,\quad x,y \in \Re$

§ 10.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Να βρείτε το εμβαδόν του (ΑΒΓ) με τον τύπο του Ήρωνα.
2. Φέρουμε ΔΖ||ΑΒ και με τον τύπο του Ήρωνα βρίσκουμε (ΔΖΓ)=84τ.μ. και αν ΔΗ⊥ΒΓ είναι ΔΗ=12 οπότε (ΑΒΓΔ)=216 τ.μ.

3. $(ΑΒΓ) = 7\sqrt{3}$

4. i) Ε=24 ii) $υ_α = \frac{24}{5}$

iii) Ε=τρ, οπότε ρ=2

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιούμε τους τύπους $βγ = α \cdot υ_α$, $Ε = \frac{1}{2} α \cdot υ_α$ και $Ε = \frac{αβγ}{4R}$

2. i) Από τη δοθείσα με τύπο Ήρωνα καταλήγουμε στην $α^2<β^2+γ^2$ ii) και iii) όπως το i).

3. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν τον ίδιο περιγεγραμμένο κύκλο.

4. Με $Α < 90^o$, ΑΗ = β συν Α και ΑΖ=γ συνΑ οπότε.....

Όμοια για $\hat{Α} > 90^o$.

5. Χρησιμοποιούμε τους τύπους Ε=τ·ρ και $Ε = \frac{1}{2} α \cdot υ_α$.

Σύνθετα Θέματα

1. i) Είναι

$$\frac{1}{(ΟΚΜ)} + \frac{1}{(ΟΚΝ)} = \frac{(ΟΜΝ)}{(ΟΚΜ)(ΟΚΝ)}$$

ii) Οι ευθείες ΒΚΒ΄ και ΓΚΓ΄ είναι τέμνουσες των πλευρών της $\hat{Α}$ οπότε από το i).....

2. $(ΑΒΓ)=(ΑΒΙ_α)+(ΑΓΙ_α)-(ΒΓΙ_α)$

3. Παρατηρήστε ότι (ΑΒΓΔ)=(ΑΒΔ)+(ΒΓΔ) και εφαρμόστε τον τύπο $Ε = \frac{αβγ}{4R}$

§ 10.5

1. Εφαρμογή του τύπου $\frac{Ε}{Ε'} = \frac{υ_α}{υ_{α'}}$ οπότε (Α΄Β΄Γ΄)=20 τ.μ.

2. (ΒΜΓ)=5τ.μ.

3. Θεώρημα ΙΙΙ της π 10.5. Είναι (ΑΔΖ)=10τ.μ.

4. Θεώρημα Ι της π 10.5 και είναι (ΒΕΖΓ)=48τ.μ.

5. Εφαρμογή του θεωρήματος ΙΙΙ § 10.5.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΡΒΓ}$ και $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ έχουν κοινή βάση ΒΓ.

ii) Εφαρμόζουμε το i).

iii) $\frac{ΡΑ}{ΑΔ} = \frac{ΑΔ - ΡΔ}{ΑΔ} = 1 - \frac{ΡΔ}{ΑΔ}$

2. Θεώρημα ΙΙΙ της π10.5.

3. Αποδείξτε πρώτα ότι $Α\hat{Ο}Γ + Δ\hat{Ο}Β = 2∟$

4. Γράψτε την αποδεικτέα σε μορφή αναλογίας.

5. Είναι $Μ\hat{Α}Ζ + Β\hat{Α}Δ = 2∟$ άρα θεώρημα ΙΙΙ § 10.5.

6. Θεώρημα Ι § 10.5.

Σύνθετα Θέματα

1. $Α\hat{Ο}Β + Α\hat{Ο}Δ = 2∟$ οπότε θεώρημα. ΙΙΙ §10.5

i) Είναι (ΑΒΓ)=(ΒΔΓ) ii) Απλό

iii) $Ε = 2Ε_1 + Ε_2 + Ε_4$,

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$, x,y≥0.

2. i) Απλό ii) $\frac{Ε_1}{Ε} = \left(\frac{ΔΕ}{ΒΓ}\right)^2$.

3. i) (ΔΕΖ)=(ΑΒΓ)–(ΑΖΕ)–(ΒΖΔ)–(ΔΓΕ)

ii) $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, x,y≥0

4. Αν ΚΜ και ΛΝ οι ζητούμενες ευθείες τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΑΒΓ έχουν κοινή γωνία Α. Το ίδιο για τα τρίγωνα ΑΛΝ και ΑΒΓ.

§ 10.6

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Η πλευρά x του τετραγώνου ικανοποιεί την x^2=αβ.

2. Αν x η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου τότε $x^2=α^2+β^2$.

3. Πρόβλημα 1 § 10.6.

4. Πρόβλημα 1 § 10.6.

Γενικές ασκήσεις

1. i) Τα τρίγωνα έχουν ίσα ύψη και την ίδια βάση iii) Εφαρμογή 3 § 10.1

2. i) Σύγκριση εμβαδών,

ii) Αρκεί $\frac{λ}{λ^2 + 4} \leq \frac{1}{4}$.

3. Βρείτε με δύο τρόπους το λόγο $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$.

4. i) Θεώρημα ΙΙΙ § 10.5 ii) τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΔΕΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Ε, iii) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν κοινή τη γωνία Γ.

5. i) Απλό, ii) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν τη γωνία Γ κοινή, iii) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΔΕΓ είναι όμοια.

6. ι) Απλό, ii) ΜΚ διάμεσος στο $\overset{\Delta}{ΑΜΔ}$ και ΜΛ διάμεσος στο $\overset{\Delta}{ΒΜΓ}$.

7. i) Αν $d = \frac{γ}{ν}$ εκφράστε ως συνάρτηση του d τα εμβαδά του τριγώνου και των τραπεζίων που σχηματίζονται.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου και των τραπεζίων δίνουν το εμβαδόν του (ΑΒΓ)

8. Είναι (ΑΒΜΖΗΔ)=

$= (ΑΒΓΔ) + (ΔΕΖΗ) - (ΔΕΜΓ) = 54$

9. Είναι $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = 17$ οπότε ΑΓ=9 και ΑΒ=8, $ΑΒ^2$=64, $ΑΔ^2$=100

10. Τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΖΗ και ΑΒΓ είναι όμοια μεταξύ τους και γράφουμε το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΓ.

11. i) Όπως άσκηση 1 (αποδεικτικές) § 10.5, ii) προκύπτει από το i).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

§ 11.1 - 11.2

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Είναι:

$φ_5 = 108^\circ$, $φ_6 = 120^\circ$, $φ_{10} = 144^\circ$ και

$φ_{12} = 150^\circ$, $ω_5 = 72^\circ$, $ω_6 = 60^\circ$,

$ω_{10} = 36^\circ$ και $ω_{12} = 30^\circ$

2. Σωστή η δ

3. § 11.1

4. Λύστε τις εξισώσεις.

5. Λύστε την ανίσωση $φ_ν<90^o$ ως προς ν

6. Θεώρημα Ι § 11.2.

7. i) $\overset{\frown}{ΑΕ} = \overset{\frown}{ΔΓ}$

ii) $Ζ\hat{Α}Ε = Ζ\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Ε = 90^\circ$

iii) Αξιοποιήστε το i)

iv) Ξεκινήστε με την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΒΗΓ.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Είναι $φ_λ + φ_μ + φ_ν = 360^o$

2. Αποδείξτε ότι έχει πλευρές και γωνίες ίσες.

3. Εφαρμόστε το 2^o θεώρημα διαμέσων στο $Α\hat{Β}Γ$

4. Αν ΑΒ=$λ_ν$ και Μ το μέσο του $\overset{\frown}{ΑΒ}$ το ΟΑΜΒ έχει κάθετες διαγωνίους

5. Τα πολύγωνα είναι όμοια

6. Τα πολύγωνα είναι όμοια.

Σύνθετα θέματα

1. Βρείτε για ποια ν υπάρχει θετικός ακέραιος κ τέτοιος ώστε $κφ_ν=360^o$

2. Αν $A_1A_2...A_\nu$ το κανονικό ν-γωνο είναι:
$(\Sigma A_1A_2)+(\Sigma A_2A_3)+...+(\Sigma A_\nu A_1)$
$=(A_1A_2......A_\nu)$
3. Συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΓΔ

§ 11.3.

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. $E_3=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2, E_4=2R^2$,
$E_6=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$
2. Είναι $\lambda_\nu=R$, $E_\nu=150\sqrt{3}cm^2$ $(\nu=6)$.
3. Είναι $\alpha_\nu=4\sqrt{2}$, $\nu=4$
$E_4=128cm^2$
4. $AB=\lambda_6=R$, $B\Gamma=\lambda_4=R\sqrt{2}$ κτλ
$(AB\Gamma\Delta)=\frac{R^2}{2}(2+\sqrt{3})$

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Το άθροισμα των γωνιών είναι (2ν-4) ορθές, οπότε ν=6, R=2.
2. Το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και $AB=\lambda_6$, $\Delta\Gamma=\lambda_3$, $A\Gamma=B\Delta=\lambda_4$
3. Εφαρμογή 3 § 11.3. Είναι:
$\lambda_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ και
$\alpha_{12}=\frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{3}}$
4. Αν $AB=\lambda_6$ και Γ το μέσο του $\overset{\frown}{AB}$ είναι $A\Gamma=\lambda_{12}$ και το ΟΑΓΒ έχει κάθετες διαγωνίους.

Σύνθετα θέματα

1. Εφαρμόστε το 1ο θεώρημα Διαμέσων
2. Υπολογίστε το γινόμενο $AB\cdot A\Gamma$.
3. Παρατηρήστε ότι $A\Gamma=2R$.

§ 11.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Εφαρμόστε τον τύπο του μήκους κύκλου.
2. $L=10\sqrt{3}cm$.
3. $\ell=\pi$ cm.
4. Απλή.
5. $AB=\lambda_4$ και $B\Gamma=\lambda_3$.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Αν Κ το κέντρο του κύκλου (Κ) παρατηρήστε ότι: $A\hat{K}\Delta=2A\hat{O}\Gamma$
2. Σχέσεις ακτίνων και διακέντρου

3. Χρησιμοποιούμε τους τύπους $E=\tau\rho$, $E=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ και τον τύπο του Ήρωνα

Σύνθετα θέματα

1. Αν Κ, Λ τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ αντίστοιχα και (Μ, x) ο κύκλος που εφάπτεται στα τρία ημικύκλια είναι:ΟΜ=R- x,
$OK=\frac{R}{2}$, $KM=\frac{R}{2}+x$ και το ΟΚΜ είναι ορθογώνιο οπότε $x=\frac{R}{3}$
2. Παρόμοια με την 1. Η ακτίνα του κύκλου (Κ) είναι $\frac{R}{4}$
3. $6{,}2+\sqrt{61}+6\pi$

§ 11.6 - 11.8

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. $E=\pi\frac{R^2}{4}$
2. R=12 $E=144\pi$ cm^2
3. $\ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}}=\frac{\pi\alpha 60}{180}=\frac{\pi\alpha}{3}$,
$E=\frac{1}{2}(\pi-\sqrt{3})\alpha^2$
4. Παρόμοια με την εφαρμογή 1 § 11.7.
5. Η περίμετρος είναι πR και το εμβαδόν $\frac{R^2}{2}(2\sqrt{3}-\pi)$

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Είναι $O\hat{B}\Gamma=30^\circ$, $\ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}}=\frac{\pi R}{3}$
Περίμετρος $=R(1+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3})$
Εμβαδόν $=\frac{R^2}{6}(3\sqrt{3}-\pi)$
2. Αρκεί να βρούμε το εμβαδόν ενός από τα μη γραμμοσκιασμένα μικτόγραμμα τρίγωνα. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\frac{\alpha^2}{6}(6+\pi-3\sqrt{3})$
3. Αν Α,Β είναι τα κοινά σημεία των κύκλων (Κ, R) και (Λ, R) με $\delta=R\sqrt{2}$ αποδείξτε πρώτα ότι το ΑΚΒΛ είναι τετράγωνο.
4. $E=\frac{\pi}{8}(AB^2-A\Gamma^2-\Gamma B^2)$,
ΑΒ=ΑΓ+ΓΒ

5. Αν (Κ, κ) ο εγγεγρ. στον τομέα κύκλος τότε: ΟΚ=R-κ ΚΓ=κ, όπου $K\Gamma\perp OA$ και $A\hat{O}K=30^\circ$. Είναι $\kappa=\frac{R}{3}$.

Σύνθετα θέματα

1. i) $A\widehat{B}\Gamma=180^\circ$ άρα ΑΓ=2R
ii) $\frac{(AB\Gamma)}{E}=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$, iii) Το κυκλικό τμήμα με χορδή την ΑΒ έχει εμβαδόν $\frac{R^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$ και το κυκλικό τμήμα με χορδή τη ΒΓ έχει εμβαδόν $\frac{R^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3})$.
2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι
$E=(\pi-1)R^2$
3. Βρίσκουμε πρώτα ότι
$K\hat{A}\Lambda=120^\circ$ (Α κοινό σημείο των κύκλων).
4. Εφαρμογή 1 § 11.7.

Γενικές ασκήσεις

1. ii) Τα πολύγωνα είναι όμοια,
iii) $L=\frac{3}{2}\pi R$.
2. α) Διαφορά εμβαδών δύο κυκλικών τομέων. β) Χρησιμοποιούμε και την $\omega_\nu=\frac{360}{\nu}$.
3. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των γωνιών των τομέων είναι 4 ορθές.
4. Η ακτίνα του κάθε κύκλου είναι $\frac{\alpha}{4}$ και το ζητούμενο εμβαδόν
$(4-\pi)\frac{\alpha^2}{16}$
5. ii) $\rho=10\left(2-\sqrt{2}\right)$.
6. Η ακτίνα καθενός από τους τέσσερις κύκλους είναι
$x=25\left(3-2\sqrt{2}\right)$.
7. Γωνία δύο τεμνουσών του κύκλου. Βρίσκουμε $\omega_{min}=12^\circ$
8. i) $AM^2=A\Gamma\cdot A\Delta$ και
$A\Sigma^2=A\Gamma\cdot AB$
ii) Το τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{AM}$, του κύκλου με διάμετρο το ΑΔ

iii) Το μήκος του διαγραφόμενου τόξου είναι $\frac{1}{2}\pi AB$

9. i) $\varepsilon_1 = (O\overset{\frown}{A\Gamma}) - (OA\Gamma)$,

$\varepsilon_2 = (O\overset{\frown}{AB}) - (OAB)$ και η ΟΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, ii) Πάρτε και έναν άλλο εγγεγραμμένο κύκλο και συγκρίνετε τις ακτίνες τους., iii) α) Οι ακτίνες ρ_1,ρ_2 των μέγιστων εγγεγραμμένων κύκλων στα κυκλικά τμήματα χορδών ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα είναι:

$\rho_1 = \frac{1}{2}(R - \frac{\gamma}{2}), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(R - \frac{\beta}{2})$

β) $\rho_1 = \frac{R}{4}$ και $\rho_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}R$

10. i) Απλό

ii) Χρησιμοποιήστε το i), iii) Το ΟΒΒ΄Ο΄ είναι παρ/μο., iv) Προσθέτουμε και αφαιρούμε διαδοχικά από τα μέλη της iii) τα εμβαδά του μικτόγραμμου τριγ. ΑΒΓ και του κυκλικού τμήματος χορδής ΓΒ΄ αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

§ 12.3

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Η ζητουμένη ευθεία είναι η τομή των δύο επιπέδων που ορίζει το σημείο Ο με καθεμία από τις ασύμβατες ευθείες.

2. Φέρουμε το τυχαίο επίπεδο που περιέχει τη μία ευθεία και τέμνει τις άλλες δύο στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Η ευθεία ΑΒ είναι η ζητούμενη.

3. Το επίπεδο (Α,ε΄) τέμνει τον κύκλο (Κ) σε δύο, ένα ή κανένα σημείο. Επομένως υπάρχουν δύο, μία ή καμμία τέτοια ευθεία.

4. Τα επίπεδα (Μ,Χ,Χ΄) και (Μ,Ψ,Ψ΄) έχουν δύο κοινά σημεία. Το Μ και το Ο. Άρα η κοινή ευθεία είναι η ΜΟ.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Τέμνουμε το επίπεδο με το επίπεδο του κύκλου.

2. Χρησιμοποιούμε τις προτάσεις: (i) δύο επίπεδα τέμνονται σε ευθεία αν έχουν ένα κοινό σημείο και (ii) μία ευθεία που έχει δύο σημεία της σε επίπεδο τότε ανήκει σ΄ αυτό.

3. Με απαγωγή σε άτοπο.

4. Η ζητούμενη ευθεία ορίζεται από τα σημεία τομής των ε_3 και ε_4 με το επίπεδο $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

5. Αν οι ευθείες τομής του ενός με τα δύο άλλα τέμνονται, τότε αυτό είναι κοινό σημείο και των τριών επιπέδων. Αν είναι παράλληλες, τότε και η τρίτη είναι παράλληλη σε αυτές.

§ 12.4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Από το Ο φέρουμε τις παράλληλες των ασύμβατων και αυτές ορίζουν το ζητούμενο επίπεδο.

2. Τέμνουμε την ευθεία ξ με το επίπεδο το παράλληλο στο π που περνάει από το Α και ενώνουμε αυτό το σημείο με το Α.

3. Φέρουμε επίπεδο παράλληλο στο π που τέμνει τις ασύμβατες σε δύο σημεία. Αυτά ορίζουν μία από τις ευθείες που ικανοποιούν το πρόβλημα.

4. Τότε η ευθεία είναι παράλληλη και στα δύο επίπεδα, διότι είναι παράλληλη μια ευθεία του καθενός.

5. Αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο ότι η κοινή ευθεία δεν μπορεί να τέμνει τις ε και ε΄.

6. Φέρουμε τυχαίο επίπεδο από την ξ που τέμνει το π και χρησιμοποιούμε τον ορισμό της παραλληλίας ευθείας και επιπέδου.

7. Φέρουμε από το Ο ευθεία παράλληλη στην ε. Κάθε επίπεδο που περιέχει αυτήν και όχι την ε είναι λύση του προβλήματος.

8. Φέρουμε την παράλληλη στην κοινή ευθεία των δύο επιπέδων.

9. Το ζητούμενο επίπεδο ορίζεται από δύο ευθείες παράλληλες στις δοσμένες, που διέρχονται από το Ο. Αν οι δοσμένες είναι παράλληλες, βρίσκουμε δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου τους και αναγόμαστε στην πρώτη περίπτωση.

10. Κατασκευάζουμε τα επίπεδα (ε_1,ξ_1) και (ε_2,ξ_2), όπου ξ_1, ξ_2//ε τέμνουσες των ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Αποδεικνύουμε ότι δύο απέναντι πλευρές του σχηματιζόμενου τετραπλεύρου είναι παράλληλες και ίσες.

2. Τα επίπεδα αυτά περνάνε από δύο παράλληλες ευθείες, άρα η τομή είναι παράλληλη σ΄ αυτές.

3. Καθιστούμε τα τμήματα αυτά διαγωνίους παραλληλογράμμου και προκύπτει το ζητούμενο.

4. Γίνεται χρήση του ορθού του θεωρήματος του Θαλή.

Σύνθετα θέματα

1. Ανά δύο οι παράλληλες πλευρές των τριγώνων ορίζουν τρία επίπεδα που είτε θα τέμνονται σε ένα σημείο ή θα τέμνονται ανά δύο σε τρεις ευθείες παράλληλες.

2. Τα σημεία A_1, B_1 και Γ_1 είναι σημεία της κοινής ευθείας των δύο επιπέδων των τριγώνων. Ανά δύο οι πλευρές των τριγώνων ορίζουν τρία επίπεδα που περνάνε από το ίδιο σημείο ή τέμνονται ανά δύο σε τρεις ευθείες παράλληλες (προηγούμενη άσκηση).

3. Είναι ευθεία παράλληλη στην ε.

§ 12.5

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Υπάρχει ευθεία του π παράλληλη στην ε.

2. Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθέτων.

3. Το ζητούμενο επίπεδο είναι αυτό που ορίζεται από μία ευθεία και την κοινή κάθετό τους.

4. Είναι η ευθεία η παράλληλη σε μία κάθετη της ε.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθέτων.

2. Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθέτων.

3. Εφαρμογή του i) θεωρήματος των τριών καθέτων

ii) Τα ΣΓ και ΣΝ είναι τα ύψη των ορθογώνιων τριγώνων ΣΑΜ και ΣΑΒ επομένως ισχύουν οι σχέσεις αυτές.

iii) Από τις προηγούμενες σχέσεις και επειδή έχουν μία κοινή γωνία, είναι όμοια.

iv) Από τα όμοια τρίγωνα, επειδή το ένα είναι ορθογώνιο θα είναι και το άλλο.

v) Η ΣΓ είναι κάθετη στην ΓΝ και ορθογώνια στην ΑΓ.

vi) Εφαρμογή του θεωρήματος των τριών καθέτων (ii)

vii) Είναι κύκλος διαμέτρου ΑΓ στο επίπεδο που περνάει από το Γ και είναι κάθετο στην ΣΓ.

§ 12.6

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Είναι η τομή του μεσοκάθετου επιπέδου στο τμήμα που ορίζουν τα δύο σημεία με το δοσμένο επίπεδο.

2. Είναι η τομή του μεσοκάθετου επιπέδου στο ΑΒ με την ευθεία.

3. Η ζητούμενη κάθετη είναι η ευθεία του π που είναι κάθετη στην προβολή της ε στο π.

4. Ο γ.τ. είναι κύκλος σε επίπεδο κάθετο στην ε, με διάμετρο ΑΒ, όπου Β η προβολή του Α στην ε.

5. Ο γ.τ. είναι κύκλος του π με διάμετρο ΟΟ΄, όπου Ο΄ η προβολή του Ο στο π.

6. Ο γ.τ. είναι η ευθεία η κάθετη στην ε από το Ο΄, την προβολή του Ο στο π.

7. Ο γ.τ. είναι η κάθετη ευθεία στο επίπεδο του τριγώνου, που περνάει από το περίκεντρο.

8. Ο γ.τ. είναι το κοινό σημείο των μεσοκάθετων επιπέδων στα τμήματα που ορίζουν τα τέσσερα δοσμένα σημεία ανά δύο.

9. Ο γ.τ. είναι τα επίπεδα τα παράλληλα στο π, σε απόσταση λ, κείμενα εκατέρωθεν του π.

10. Είναι το επίπεδο το παράλληλο στο (Α,Β,Γ), που περνάει από το Μ.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Ο γ.τ. είναι το επίπεδο το παράλληλο στις δύο ασύμβατες, που διαιρεί την απόσταση των ασύμβατων σε λόγο λ.

2. Χρησιμοποιούμε την προηγούμενη άσκηση. Η ζητούμενη ευθεία ε_3 ορίζεται ως η τέμνουσα των δύο ασύμβατων ε_1 και ε_2 που περνάει από το σημείο τομής της ε_3 με το επίπεδο το παράλληλο στις ε_1 και ε_2 το οποίο χωρίζει την απόστασή τους σε λόγο λ.

3. Το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο τομής των δύο κύκλων (Α΄,ρ) και (Β΄,ρ΄), όπου Α΄ και Β΄ οι προβολές των Α και Β στο π και

$\rho = \sqrt{\mu^2 - AA'^2}$ και

$\rho' = \sqrt{\nu^2 - BB'^2}$.

Σύνθετα θέματα

1. Ο γ.τ. είναι κύκλος του π με κέντρο την προβολή Ο΄ του μέσου Οτου ΑΒ και ακτίνα $\rho = \sqrt{\dfrac{AB^2}{4} - OO'^2}$.

2. Προβάλλουμε το Α στο π και ενώνουμε την προβολή Α΄ με το κέντρο του κύκλου. Τα άκρα της διαμέτρου είναι τα ζητούμενα σημεία.

3. Το επίπεδο ορίζεται από το μέσον Ο του ΑΒ και την ευθεία ε.

4. Ο γ.τ. είναι επίπεδο κάθετο στην ΑΒ στο σημείο Μ΄ για το οποίο ισχύει $OM' = \dfrac{A^2}{2AB}$, όπου Ο το μέσον του ΑΒ.

5. Θεωρούμε επίπεδο κάθετο στην ΓΔ που περιέχει την ΑΒ και χρησιμοποιούμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

6. Εφαρμογή της άσκησης 5.

7. Τα μεσοκάθετα επίπεδα στα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τέμνονται σε ένα σημείο Ο που ανήκει και στα μεσοκάθετα επίπεδα των υπολοίπων.

8. Το σταθερό σημείο είναι το σημείο τομής του π με την ευθεία ξ που είναι κάθετη στο επίπεδο (Ο,ε) στο Ο.

§ 12.7

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Κάθε επίπεδο που περιέχει την κάθετη ΟΟ΄ στο επίπεδο π ικανοποιεί το πρόβλημα.

2. Οι έδρες σ και π περιέχουν την ακμή ε που είναι κάθετη στο π

3. Γίνεται χρήση των γ.τ. (i) του μεσοκάθετου επιπέδου στο τμήμα ΒΓ και (ii) κύκλου με κέντρο το μέσο Μ του ΒΓ και ακτίνα το μισό του ΒΓ.

4. Φέρουμε από το Ο ευθεία παράλληλη στην ε και ευθεία κάθετη στο σ. Αυτές οι δύο ευθείες ορίζουν το επίπεδο π.

5. Από τυχαίο σημείο της ε φέρουμε ευθεία κάθετη στο π. Η ε και η κάθετη ορίζουν το ζητούμενο επίπεδο.

§ 12.8

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Εάν $\varepsilon \perp \pi$ τότε κάθε επίπεδο που περιέχει την π είναι κάθετο. Εάν η ε είναι πλάγια στο π, τότε το επίπεδο (ε,ε΄) είναι κάθετο στο π, όπου ε΄ η προβολή της ε στο π.

2. Εφαρμογή του Θεωρήματος του Θαλή στο επίπεδο που ορίζει η ευθεία με την προβολή της.

3. Εφαρμογή της προηγούμενης άσκησης.

4. Οι παράλληλες ευθείες και οι προβάλλουσες δύο σημεία που βρίσκονται ένα στην καθεμία, ορίζουν επίπεδα παράλληλα, που τεμνόμενα από τρίτο δίνουν τομές ευθείες παράλληλες.

5. Τα ζεύγη των απέναντι πλευρών προβάλλονται ως παράλληλες ευθείες.

6. Κατασκευάζουμε στο επίπεδο της προβολής τρίγωνο $AB_0\Gamma$ ίσο με το ΑΒΓ και συγκρίνουμε αυτό με την προβολή ΑΒ΄Γ, όπου Β η ορθή γωνία και Α,Γ οι τομείς των πλευρών της με το επίπεδο.

7. Απλή εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

8. Από τον ορισμό του συνημιτόνου γωνίας έχουμε:

i) $AB\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ii) $AB\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ iii) $AB\dfrac{1}{2}$.

9. Φέρουμε την κάθετη στο επίπεδο π στο Α, η οποία μαζί με την ε ορίζουν επίπεδο, πάνω στο οποίο κατασκευάζουμε ευθεία που σχηματίζει γωνία 60^o με την ε.

10. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Θαλή της γεωμετρίας του επιπέδου.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Συγκρίνουμε τις γωνίες που σχηματίζουν η κάθετη και η πλάγια με τις προβολές τους.

2. Παρατηρούμε ότι τα επίπεδα αυτά έχουν κοινό το έκκεντρο του τριγώνου.

3. Το μέσο μιας διαγωνίου με τις δύο άλλες κορυφές συνιστούν ισοσκελές τρίγωνο, άρα η διάμεσος είναι και ύψος. Το ίδιο και για το μέσο της άλλης διαγωνίου και προκύπτει το ζητούμενο.

4. Αν Γ΄ η προβολή του Γ στο ζητούμενο επίπεδο και ΓΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το τρίγωνο ΓΓ΄ Δ είναι ορθογώνιο στο Γ΄ και έχει δύο γνωστές πλευρές την ΓΔ και την Γ΄Δ άρα κατασκευάζεται.

5. Από το σημείο τομής Γ του τμήματος ΑΒ με το διχοτόμο επίπεδο φέρουμε επίπεδο κάθετο στην ακμή της διέδρου και προβάλλουμε σε αυτό τα σημεία Α και Β.

6. Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και Α΄Δ το ύψος του Α΄ΒΓ θα έχουμε ότι τα εμβαδά των δύο τριγώνων είναι όπως ο λόγος των υψών τους. Αλλά τα ύψη είναι γνωστά.

Γενικές ασκήσεις

1. Ο γ.τ. είναι τα επίπεδα που διχοτομούν τις δύο παραπληρωματικές δίεδρες γωνίες που έχουν τη γωνία των ε και ξ ως αντίστοιχη επίπεδη.
2. Θεωρούμε την ορθή γωνία των ξ και ε΄ (όπου ε΄//ε), που προβάλλεται στο άλλο επίπεδο ως ορθή. Επειδή η ε΄ προβάλλεται ως παράλληλη στην ε, η ξ προβάλλεται ως κάθετη σε αυτή.
3. Οι ευθείες οι παράλληλες στο π που τέμνουν τις ε και ξ έχουν προβολές στο π ευθείες που περνάνε από το μέσο του τμήματος που ορίζουν τα ίχνη των ευθειών ε και ξ. Άρα οι ευθείες που συναντούν τις ε και ξ τέμνονται από την κάθετη στο επίπεδο π στο σημείο αυτό.
4. Προβάλλουμε τα ίχνη της τέμνουσας στις δύο έδρες και στην ακμή της δίεδρης και σχηματίζονται δύο ζεύγη ίσων τριγώνων.
5. Προβάλλουμε τα σημεία στις έδρες και την ακμή της δίεδρης και προκύπτουν δύο τρίγωνα ίσα.
6. Θεωρούμε ότι οι προβολές δε συμπίπτουν και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα των τριών καθέτων οδηγούμαστε σε άτοπο.
7. Τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του στρεβλού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ προβάλλονται στο κέντρο του παραλληλογράμμου και επομένως αυτά ορίζουν τη διεύθυνση των παραλλήλων.
8. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή για τα ΜΜ΄, ΝΝ΄ και την κοινή κάθετο των ασύμβατων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

§ 13.1-4

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Το ύψος είναι κάθετο ενώ η ακμή είναι πλάγια ως προς τα επίπεδα της βάσης.
2. Οι κάθετες τομές ορθού πρίσματος και οι βάσεις είναι παράλληλα σχήματα.
3. Οι ακμές ενός πρίσματος και οι προβολές τους στα επίπεδα των βάσεων σχηματίζουν ίσα ορθογώνια τρίγωνα.
4. $E=\alpha^2\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right), V=\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^3$.
5. $E_3=3\sqrt{3}\rho\left(\frac{\rho}{2}+\upsilon\right)$

$E_4=4\rho\left(\rho+\sqrt{2}\upsilon\right)$,

$E_6=3\rho\left(2\upsilon+\sqrt{3}\rho\right)$, $V_3=\frac{3\sqrt{3}}{4}\rho^2\upsilon$

$V_4=2\rho^2\upsilon$, $V_6=\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^2\upsilon$

6. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή για τα επίπεδα των εδρών, στα οποία βρίσκονται τα άκρα του τμήματος και το μεσοπαράλληλο επίπεδο σε αυτά.
7. $E=6\alpha^2$ και α=6 μ.
8. $\delta=4\sqrt{29}$, E=832, V=1536
9. $E=6\alpha^2=3\beta^2=2\delta^2$, όπου α=ακμή, β=διαγώνιος βάσης και δ=διαγώνιος κύβου.
10. Ακμή α=5, όγκος V=150.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Συμπληρώνουμε το πρίσμα σε παραλληλεπίπεδο.
2. Εκφράζουμε το εμβαδόν της κάθετης τομής ως συνάρτηση της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου και της περιμέτρου.
3. Ο όγκος πρίσματος εκφράζεται ως γινόμενο μιας κάθετης τομής επί την ακμή και το εμβαδόν με την περίμετρο της κάθετης τομής επί την ακμή.
4. Καθιστούμε το ευθύγραμμο τμήμα διαγώνιο σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τρεις ακμές δια του Α και τρεις δια του Γ΄.
5. Καθιστούμε το τμήμα ΑΓ΄ διαγώνιο σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και προβάλλουμε στις τρεις έδρες του που περνάνε από το Α.
6. (i) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν ως πλευρές τη διαγώνιο και την ακμή του κύβου. (ii) Υπολογίζουμε το λόγο της υποτείνουσας προς την προβολή της ακμής σε αυτήν.
7. Τέμνουμε το παραλληλεπίπεδο με το διαγώνιο επίπεδο ΒΒ΄Δ΄Δ και ανάγεται σε γνωστό πρόβλημα της γεωμετρίας του επιπέδου.

Σύνθετα θέματα

1. Παρατηρούμε ότι οι πλευρές του τριγώνου είναι διαγώνιοι των εδρών.
2. Η τομή του επιπέδου (Α΄,Β,Δ) με την διαγώνιο είναι το κέντρο ισόπλευρου τριγώνου και τα ύψη σχηματίζουν τις αντίστοιχες των διέδρων.
3. Το επίπεδο που περνάει από τα σημεία Κ, Λ και Ν τέμνει τις ακμές Γ΄Δ΄, Δ΄Α΄ και ΑΑ΄ σε σημεία που αποδεικνύουμε ότι είναι μέσα, οπότε οι πλευρές του σχηματιζόμενου εξαγώνου είναι ίσες. Επίσης και οι γωνίες είναι ίσες.
4. Εφαρμόζουμε γνωστή πρόταση της γεωμετρίας του επιπέδου σύμφωνα την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών του.

§ 13.5 - 9

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Το ύψος κανονικής πυραμίδας, το απόστημα και το μισό της πλευράς της βάσης σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο. Επίσης, το ύψος, το απόστημα της βάσης και το απόστημα της πυραμίδας συνιστούν επίσης ορθογώνιο τρίγωνο.
2. Η αντίστοιχη της δίεδρης με έδρες την βάση και μία από τις έδρες κανονικής πυραμίδας έχει αντίστοιχη τη γωνία που σχηματίζουν το απόστημα της πυραμίδας και το απόστημα της βάσης.
3. Εφαρμόζουμε τους τύπους.
4. Απλή εφαρμογή των τύπων.
5. E_π=87.561 τ.μ, V=2.664.792 κ.μ.
6. $E_o=\mu^2\sqrt{7}$, $V=\frac{\mu^3}{\sqrt{6}}$.
7. (i) $\frac{1}{3}$, (ii) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.
8. $3\sqrt{6}$.
9.

$V=\frac{7\sqrt{3}}{16}\alpha^2\upsilon, V=\frac{9\alpha}{4}\sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}+2^2}$,

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Στηριζόμενοι στο ότι ο όγκος μιας πυραμίδας δεν αλλάζει αν η κορυφή της πυραμίδας κινηθεί σε επίπεδο παράλληλο στη βάση της, μετακινούμε μία κορυφή του τετραέδρου παράλληλα σε μία απέναντι ακμή του τετραέδρου, ώστε να γίνει σημείο της απέναντι έδρας του παραλληλεπιπέδου.
2. Προβάλλουμε δύο κορυφές στις απέναντι έδρες και στην ακμή που ορίζουν οι άλλες δύο κορυφές και σχηματίζονται δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα. Από τους λόγους των πλευρών τους προκύπτει το ζητούμενο.
3. Θεωρούμε ως βάση ένα τρίγωνο που έχει τη μετακινούμενη ακμή ως πλευρά. Το εμβαδόν της βάσης είναι σταθερό διότι έχει σταθερό μήκος

βάσης και ύψος. Επίσης, το ύψος της πυραμίδας δεν αλλάζει διότι η απέναντι κορυφή προβάλλεται σε σταθερό επίπεδο.
4. Θεωρούμε το λόγο του ενός τετραέδρου ως προς ένα βοηθητικό που έχουν κοινό ύψος, και το λόγο του βοηθητικού ως προς τον όγκο του δεύτερου που έχουν επίσης κοινό ύψος και πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο.
5. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη άσκηση δύο φορές και προκύπτει το ζητούμενο.
6. Εφαρμόζουμε την άσκηση 5.
7. Υπολογίζουμε το ύψος της βάσης και από αυτό το απόστημα. Επειδή η γωνία της ακμής και του ύψους της βάσης είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου, υπολογίζεται το ύψος και από αυτό ο όγκος είναι. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}\alpha^2$.

Σύνθετα θέματα

1. Αν ΑΒ είναι η κάθετη σε επίπεδο, στο σημείο Β, προβάλλουμε τις κορυφές Δ και Γ στο επίπεδο αυτό και προκύπτει ότι ο αρχικός όγκος του τετραέδρου ισούται με τον όγκο του τετραέδρου που έχει κορυφές τα Α,Β και τις προβολές στο επίπεδο των δύο άλλων.
2. Η κάθετη τομή ενός πρίσματος, από σημείο Μ εσωτερικό του πρίσματος, περιέχει τις αποστάσεις του Μ από τις έδρες και σχηματίζεται ισόπλευρο τρίγωνο στο οποίο το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου Μ από τις πλευρές του τριγώνου είναι σταθερό.
3. Τα μέσα τριών ακμών που περνάνε από την ίδια κορυφή του κύβου, μαζί με την κορυφή αυτή σχηματίζουν ένα τετράεδρο, με ακμές βάσης ίσες με το μισό της διαγωνίου τετραγώνου πλευράς α. Υπολογίζουμε το ύψος της βάσης, το εμβαδόν της βάσης, το ύψος του τετραέδρου και εν τέλει τον όγκο του, το οκταπλάσιο του οποίου αφαιρείται από τον όγκο του κύβου.

§ 13.10-12

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Απλή εφαρμογή των τύπων.
2. Εφαρμόζουμε τους τύπους.
3. Εφαρμογή των τύπων.
4. Υπολογίζουμε τον όγκο κυλίνδρου ενός εκατοστού ύψους, που έχει την ίδια βάση.
5. Εξισώνουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας με το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας 4 και υπολογίζουμε την ακτίνα του κυλίνδρου.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Από τους τύπους του όγκου και του εμβαδού της ολικής επιφάνειας απαλείφουμε την ακτίνα ρ.
2. Υπολογίζουμε τον όγκο των δύο κυλίνδρων που σχηματίζονται. Θέτουμε x την απόσταση του Μ από το Α και διπλασιάζοντας τον όγκο του μικρού κυλίνδρου βρίσκουμε τον όγκο του μεγάλου.
3. Υπολογίζουμε την διαφορά των δύο κυλίνδρων που σχηματίζονται κατά την περιστροφή του ορθογωνίου και βρίσκουμε τον ζητούμενο όγκο. Αθροίζουμε τα εμβαδά, λαμβάνοντας υπόψη τόσο τις κυρτές επιφάνειες των δύο κυλίνδρων, όσο και τους δύο κυκλικούς δακτυλίους που αποτελούν τις βάσεις των κυλίνδρων.

§ 13.13-15

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Υπολογίζουμε τη γενέτειρα του κώνου από το ύψος και την ακτίνα και εφαρμόζουμε τους τύπους.
2. Απαλείφουμε τη γενέτειρα μεταξύ του τύπου της κυρτής επιφάνειας και της σχέσης που συνδέει την ακτίνα, το ύψος και την ακμή και προσδιορίζουμε την ακτίνα του κώνου.
3. Από το ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη γενέτειρα και κάθετη πλευρά την ακτίνα βρίσκουμε το ύψος του κώνου. Μετά, με εφαρμογή των τύπων, υπολογίζουμε τα ζητούμενα.
4. Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο που παράγεται ο κώνος προκύπτει το ύψος και η γενέτειρα του κώνου. Με αυτά υπολογίζουμε τον όγκο και την επιφάνεια.
5. Υπολογίζουμε την ακμή λ και στη συνέχεια το ύψος υ. Κατόπιν αντικαθιστούμε στους τύπους του όγκου και του εμβαδού.
6. Υπολογίζουμε το λ και μετά το λόγο των εμβαδών που είναι $\sqrt{5}$.
7. Υπολογίζουμε το λόγο των δύο επιφανειών αφού υπολογίσουμε την ακμή από το ύψος και την ακτίνα.
8. Απλή εφαρμογή των τύπων.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Χωρίζουμε τον κώνο με επίπεδο παράλληλο στη βάση. Τότε, ο μικρός κώνος που αποτέμνεται είναι το μισό του αρχικού.
2. Ο όγκος που παράγεται κατά την περιστροφή του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με τον όγκο του ΑΜΚ μείον ογκ(ΓΛΚ) μείον όγκ.(ΒΓΜΠ)
3. Αν φέρουμε δύο επίπεδα παράλληλα στη βάση που να χωρίζουν την κυρτή επιφάνεια του κώνου σε τρία ίσα μέρη, ο μικρός κώνος που δημιουργείται θα είναι το $\frac{1}{3}$ του αρχικού. Επίσης ο μικρός κώνος μαζί με το μεσαίο κόλουρο κώνο αποτελούν τα $\frac{2}{3}$ του αρχικού κώνου.
4. Απλή εφαρμογή του τύπου.
5. Χρησιμοποιούμε την ομοιότητα των δύο τριγώνων.
6. Χρησιμοποιούμε τους τύπους του κώνου.

§ 13.16-18

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Η ακτίνα της σφαίρας, η ακτίνα του κύκλου τομής και η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο συνιστούν ορθογώνιο τρίγωνο.
2. Από το εμβαδόν της τομής υπολογίζουμε την ακτίνα της τομής και στη συνέχεια υπολογίζουμε την απόσταση δ του επιπέδου από το κέντρο.
3. Υπολογίζουμε την ακτίνα του κύκλου της τομής και μετά βρίσκουμε το εμβαδόν της.
4. Η ζητούμενη ακτίνα είναι ύψος ορθογώνιου τριγώνου που ορίζεται από το κέντρο της σφαίρας, το φωτεινό σημείο και ένα σημείο του κύκλου.
5. Απλή εφαρμογή του τύπου, $E=400\pi$.
6. Αν ρ και ρ΄ είναι οι ακτίνες των σφαιρών, ο λόγος των επιφανειών τους είναι το τετράγωνο του λόγου των ακτίνων τους
7. Εφαρμόζουμε τον τύπο του όγκου της σφαίρας, $V=36\pi$.
8. Ο λόγος των όγκων δύο σφαιρών είναι ίσος με τον κύβο του λόγου των ακτίνων τους.
9. $E=\pi(\rho^2 - \rho'^2)$.
10. Ο συνολικός όγκος του σχήματος αποτελείται από τον όγκο ενός κυλίν-

δρου ακτίνας ρ και ύψους ρ και τον όγκο μιας σφαίρας ακτίνας ρ.

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Υπολογίζουμε τους όγκους των τριών στερεών από τους τύπους και αποδεικνύουμε τις σχέσεις του προβλήματος.

2. Αν Μ τυχόν σημείο της τομής και Κ και Λ τα κέντρα της σφαίρας, το επίπεδο (Κ,Λ,Μ) τέμνει τις σφαίρες κατά μέγιστους κύκλους και το τρίγωνο ΚΛΜ έχει γνωστά μήκη πλευρών. Επομένως η προβολή του Μ στην ΚΛ είναι σταθερό σημείο και επειδή οι σφαίρες είναι σχήματα εκ περιστροφής, το Μ είναι σημείο κύκλου.

3. Υπολογίζουμε τους όγκους των τριών στερεών και παίρνουμε τους λόγους του κυλίνδρου προς τη σφαίρα και του κώνου προς τη σφαίρα.

Σύνθετα θέματα

1. Εξισώνουμε τα εμβαδά των δύο επιφανειών και βρίσκουμε ότι το ύψος είναι διπλάσιο της ακτίνας.

2. Αν δ είναι η απόσταση της βάσης του κώνου ή του κυλίνδρου από το κέντρο της σφαίρας εκφράζουμε τους όγκους σε συνάρτηση του δ και μηδενίζοντας την παράγωγο ως προς δ βρίσκουμε πότε ο όγκος γίνεται μέγιστος.

3. Ο κύβος έχει διαγώνιο ίση με τη διάμετρο της σφαίρας. Το οκτάεδρο αποτελείται από δύο τετραγωνικές πυραμίδες, με βάσεις εγγεγραμμένες σε μέγιστο κύκλο της σφαίρας.

4. Από τα δοσμένα μεγέθη υπολογίζουμε τα εμβαδά και τους όγκους των στερεών.

5. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα ΙΙ, §13.18 για τον υπολογισμό των τριών όγκων. Η ζητούμενη σχέση αποδεικνύεται αντικαθιστώντας τους υπολογισθέντες όγκους και τις προβολές των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα κατά τα γνωστά από τη γεωμετρία του επιπέδου.

Γενικές Ασκήσεις

1. Σχηματίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του τυχαίου σημείου Μ από τις κορυφές του τετραέδρου και εφαρμόζουμε το Θεώρημα των διαμέσων στα διάφορα τρίγωνα που σχηματίζονται. Καταλήγουμε σε μία σχέση που περιέχει σταθερά τμήματα εκτός από ένα, το οποίο όταν μηδενιστεί καθιστά την ποσότητα ελάχιστη.

2. Το επίπεδο πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των δύο απέναντι ακμών για να τέμνει τις υπόλοιπες τέσσερις. Οι πλευρές του τετραπλεύρου που σχηματίζεται από την τομή είναι ανά δύο παράλληλες στις ακμές στις οποίες είναι παράλληλο το επίπεδο. Άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

3. Από την ευθεία ε φέρουμε επίπεδο παράλληλο στη ζ που τέμνει την ξ σ΄ ένα σημείο. Από αυτό το σημείο φέρουμε επίπεδο που να περιέχει την ξ και να είναι παράλληλο στην ε, που την τέμνει σε κάποιο σημείο και από αυτό το σημείο φέρουμε επίπεδο που να περιέχει τη ζ και να είναι παράλληλο στην ξ. Τέλος, συμπληρώνουμε το παραλληλεπίπεδο με άλλα τρία επίπεδα παράλληλα σ΄ αυτά που κατασκευάσαμε.

4. Υπολογίζουμε το λόγο των όγκων των δύο τετραέδρων στα οποία χωρίζεται το αρχικό τετράεδρο από το διχοτόμο επίπεδο με δύο τρόπους και εξισώνουμε τα αποτελέσματα. Κατά τον πρώτο τρόπο θεωρούμε ότι έχουν ως βάσεις τα δύο τρίγωνα στα οποία χωρίζεται μία έδρα, οπότε έχουν κοινό ύψος. Στη δεύτερη περίπτωση εκφράζουμε τον όγκο με βάσεις τις έδρες που είναι εκατέρωθεν του διχοτόμου επιπέδου, αλλά και πάλι έχουν κοινό ύψος.

5. Ανά δύο τα τμήματα αυτά διχοτομούνται διότι είναι διαγώνιοι παραλληλογράμμων. Επομένως τα τρία τμήματα διχοτομούνται σ΄ ένα σημείο.

6. Θεωρούμε δύο από τις διαμέσους. Αυτές είναι συνεπίπεδες διότι ανήκουν στο επίπεδο που περνάει από μία ακμή και από το μέσο της απέναντι ακμής. Επειδή τα κέντρα βάρους των εδρών χωρίζουν τις διαμέσους σε λόγο 1:2, η ευθεία που συνδέει τα κέντρα βάρους είναι παράλληλη στην απέναντι ακμή. Επομένως, στο διάμεσο επίπεδο σχηματίζονται δύο όμοια τρίγωνα και από τις αναλογίες τους προκύπτει ο ζητούμενος λόγος.

7. Θεωρούμε τη διάμεσο ΝΠ που κείται στο διάμεσο επίπεδο ΑΒΝ. Η διάμεσος τέμνει τη διάμεσο ΑΛ έστω σε σημείο Μ΄. Από το Π φέρουμε ευθεία παράλληλη στη διάμεσο ΑΛ και σχηματίζονται όμοια τρίγωνα, που από τις αναλογίες των πλευρών τους προκύπτει ότι το σημείο Μ΄ χωρίζει τη διάμεσο σε λόγο 3:1, άρα είναι το σημείο τομής των διαμέσων.

8. Θεωρούμε δύο από τα τετράεδρα που χωρίζεται το αρχικό. Αυτά έχουν κοινή βάση και επειδή θα είναι ισοδύναμα θα έχουν ίσα ύψη. Άρα το σημείο Μ είναι σε τέτοια θέση ώστε να περιέχει μία ακμή και να τέμνει την απέναντι στο μέσο της. Αλλά αυτό συμβαίνει για κάθε ζεύγος τετραέδρων. Άρα, το Μ είναι το κέντρο βάρους του τετραέδρου.