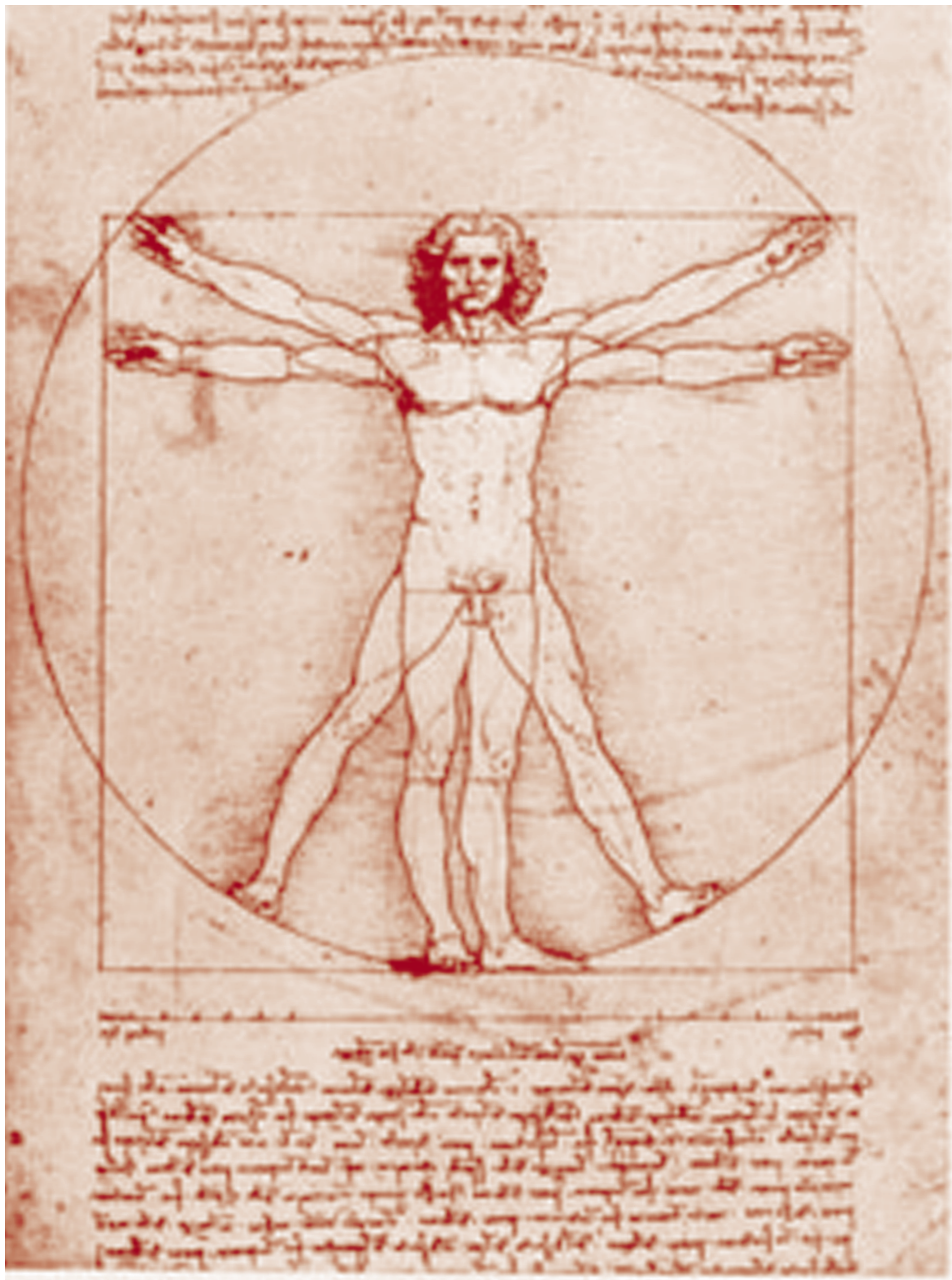
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εγγεγραμμένα Σχήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αρχικά την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας και τη σχέση της με την αντίστοιχη επίκεντρη καθώς και με τη γωνία χορδής και εφαπτομένης. Έτσι, θα μας δοθεί η δυνατότητα αναλυτικής μελέτης βασικών γεωμετρικών τόπων στον κύκλο.

Τέλος, θα μελετήσουμε τα εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα καθώς και συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές που γίνονται με τη βοήθεια γεωμετρικών τόπων.



Σχέδιο και σημειώσεις του Ιταλού ζωγράφου της Αναγέννησης Leonardo da Vinci (1452-1519), από το Architectura de Vitruve, περίπου 1492.

Εγγεγραμμένη γωνία

6.1 Εισαγωγικά - Ορισμοί

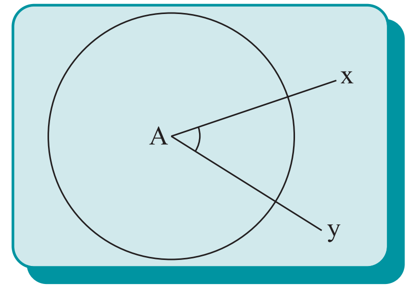
Δίνεται μία κυρτή γωνία $x\hat{A}y$ και ένας κύκλος (Ο,R). Οι σχετικές θέσεις τους καθορίζονται από τη θέση της κορυφής της και των πλευρών της:

(i) Αν η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου (σχ.1), τότε η γωνία λέγεται επίκεντρη, όπως είδαμε στη § 2.18.

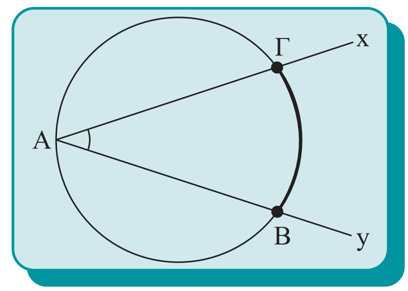
(ii) Αν η κορυφή (σχ.2) είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουσες του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται ***εγγεγραμμένη*** γωνία του κύκλου.

Το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται ***αντίστοιχο τόξο*** της ή διαφορετικά λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}$ ***βαίνει*** στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

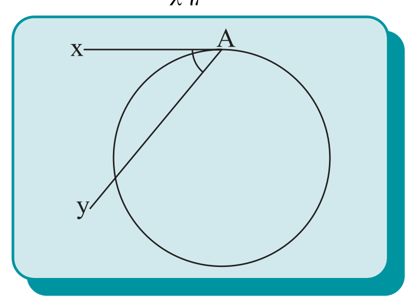
(iii) Αν η κορυφή είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου (σχ.3), τότε η γωνία λέγεται ***γωνία χορδής και εφαπτομένης.***



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

6.2 Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης

Η σχέση μίας εγγεγραμμένης και μίας επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

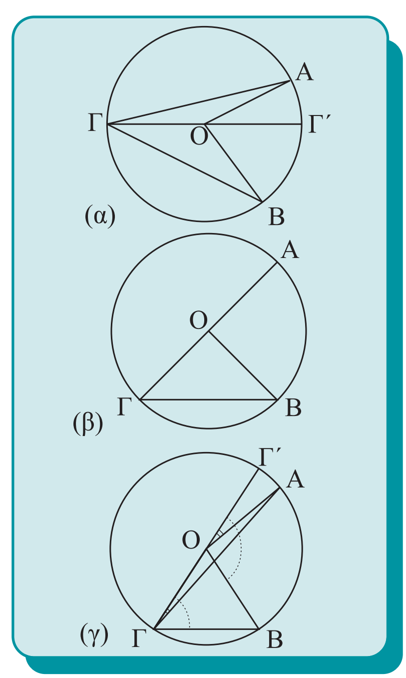
Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Απόδειξη

Έστω κύκλος (Ο,R) και ένα τόξο του $\overset{\frown}{AB}$. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.

(i) Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο Ο του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ (σχ.4α). Έστω Γ΄ το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ. Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές, επομένως $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A$. Η $\Gamma'\hat{O}A$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΟΓ, επομένως $\Gamma'\hat{O}A = 2O\hat{\Gamma}A$ και όμοια έχουμε ότι $\Gamma'\hat{O}B = 2O\hat{\Gamma}B$.



Σχήμα 4

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

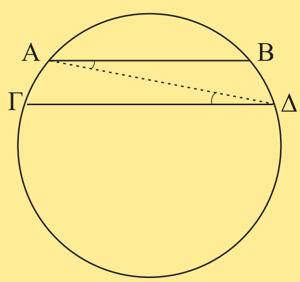
$$A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B.$$

(ii) Ας εξετάσουμε κατόπιν την περίπτωση όπου το Ο ανήκει σε μία πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ (σχ.4β). Η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΓΟΒ, οπότε $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.

(iii) Όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις (σχ.4γ).

ΣΧΟΛΙΟ

Από το πόρισμα (iii) συμπεραίνουμε εύκολα ότι τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδών είναι ίσα (σχ.5) και αντίστροφα.



Σχήμα 5

Πορισματα

(i) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

(ii) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

(iii) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.

6.3 Γωνία χορδής και εφαπτομένης

Η σχέση μίας γωνίας χορδής και εφαπτομένης με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

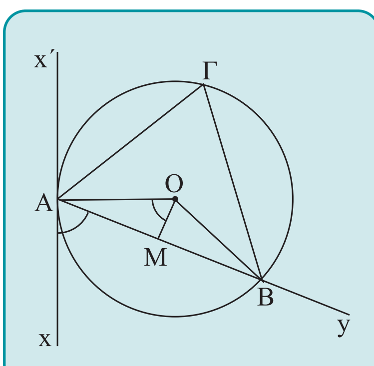
Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

Απόδειξη

Έστω ότι η γωνία χορδής και εφαπτομένης $x\hat{A}y$ είναι οξεία (σχ. 6) και $A\hat{\Gamma}B$ μια τυχαία εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής ΑΒ. Γνωρίζουμε ότι $A\hat{\Gamma}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$.

Φέρουμε το απόστημα ΟΜ, οπότε $A\hat{O}M = M\hat{O}B = \frac{A\hat{O}B}{2} = A\hat{\Gamma}B$. Αλλά $x\hat{A}y = A\hat{O}M$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές. Επομένως $x\hat{A}y = A\hat{\Gamma}B$.

Αν η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι αμβλεία, η απόδειξη είναι ανάλογη.



Σχήμα 6

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Μία γωνία που η κορυφή της ανήκει στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου λέγεται *γωνία δύο τεμνουσών* και εκφράζεται ως συνάρτηση των εγγεγραμμένων γωνιών, που σχηματίζουν οι πλευρές της με τον κύκλο.

(i) Ας θεωρήσουμε γωνία $x\hat{A}y$, όπου η κορυφή της Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.7). Οι πλευρές της Αx, Αy και οι προεκτάσεις τους τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1,Γ_1 και B_2,Γ_2 αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ότι η γωνία $x\hat{A}y$ ισούται με το άθροισμα των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που περιέχει η $x\hat{A}y$ και η κατακορυφήν της, δηλαδή:

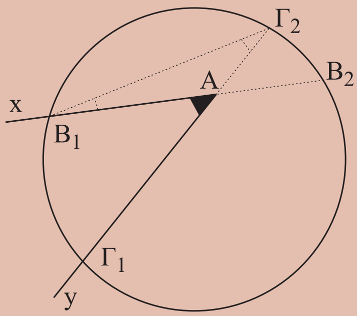
$$x\hat{A}y = A\hat{B}_1\Gamma_2 + B_1\hat{\Gamma}_2A.$$

(ii) Ας θεωρήσουμε γωνία $x\hat{A}y$ όπου η κορυφή της Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.8). Οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1,B_2 και Γ_1,Γ_2 αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι η γωνία $x\hat{A}y$ ισούται με τη διαφορά των εγγεγραμμένων γωνιών, που βαίνουν στα τόξα του κύκλου που περιέχει η $x\hat{A}y$, δηλαδή

$$x\hat{A}y = B_2\hat{B}_1\Gamma_2 - B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1, \text{ όπου } B_2\hat{B}_1\Gamma_2 > B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1.$$

Απόδειξη

(i) Η $x\hat{A}y$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, δηλαδή $x\hat{A}y = A\hat{B}_1\Gamma_2 + B_1\hat{\Gamma}_2A$.



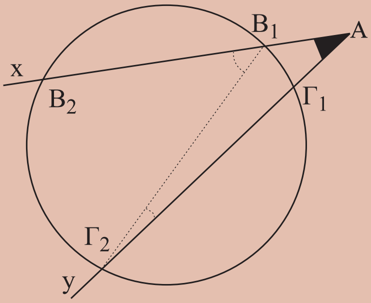
Σχήμα 7

ΣΧΟΛΙΟ

$$x\hat{A}y = \frac{\overset{\frown}{B_1\Gamma_1}}{2} + \frac{\overset{\frown}{B_2\Gamma_2}}{2}.$$

(ii) Η γωνία $B_2\hat{B}_1\Gamma_2$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως

$B_2\hat{B}_1\Gamma_2 = x\hat{A}y + A\hat{\Gamma}_2B_1$ ή $x\hat{A}y = B_2\hat{B}_1\Gamma_2 - B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1$.



Σχήμα 8

ΣΧΟΛΙΟ

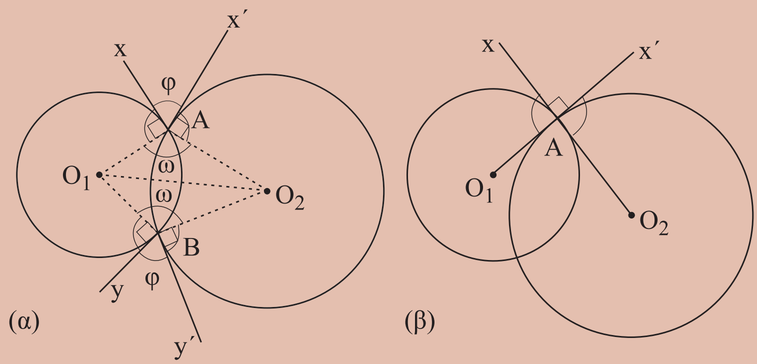
$$x\hat{A}y = \frac{\overset{\frown}{B_2\Gamma_2}}{2} - \frac{\overset{\frown}{B_1\Gamma_1}}{2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο τεμνόμενους κύκλους και φέρουμε τις εφαπτόμενές τους σε καθένα από τα κοινά σημεία τους.
(i) Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των δύο κύκλων σε καθένα από τα κοινά σημεία τους σχηματίζουν ίσες γωνίες. Καθεμία από τις γωνίες αυτές λέγεται *γωνία των δύο κύκλων*.
(ii) Αν η γωνία των δύο κύκλων είναι ορθή, λέμε ότι *οι κύκλοι τέμνονται ορθογώνια* ή ότι είναι *ορθογώνιοι*. Να αποδειχθεί ότι, αν οι δύο κύκλοι είναι ορθογώνιοι, οι εφαπτόμενες του ενός κύκλου στα κοινά σημεία τους διέρχονται από το κέντρο του άλλου κύκλου.

Απόδειξη

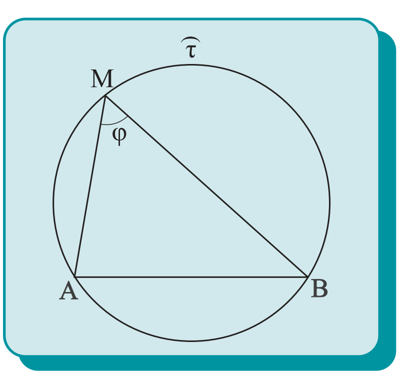
(i) Ας θεωρήσουμε δύο τεμνόμενους κύκλους με κέντρα O_1 και O_2 και Α,Β τα σημεία τομής τους. Από την ισότητα των τριγώνων O_1AO_2 και O_1BO_2 θα έχουμε ότι
$O_1\hat{A}O_2 = O_1\hat{B}O_2 = \omega$ (σχ.9α).
Ας φέρουμε τώρα τις εφαπτόμενες των δύο κύκλων στο σημείο Α και στο σημείο Β. Οι εφαπτόμενες στο Α σχηματίζουν γωνία $x'\hat{A}x = 2∟ - \omega$ (γιατί $O_1\hat{A}x = O_2\hat{A}x' = 1∟$) και όμοια οι εφαπτόμενες στο Β σχηματίζουν γωνία $y'\hat{B}y = 2∟ - \omega$. Επομένως, $x'\hat{A}x = y'\hat{B}y$.



Σχήμα 9

(ii) Αν δύο κύκλοι τέμνονται ορθογώνια, δηλαδή αν $\varphi = 1∟$ (σχ.9β), έχουμε ότι $O_1\hat{A}O_2 + O_1\hat{A}x = 2∟$, οπότε οι ημιευθείες Ax και AO_2 είναι αντικείμενες.

6.4 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο
Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία



Σχήμα 10

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα σημείο Μ που δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ (σχ.10). Αν φ είναι η γωνία $A\hat{M}B$ τότε λέμε ότι το σημείο Μ ***βλέπει το τμήμα ΑΒ*** υπό γωνία φ ή ισοδύναμα το ΑΒ ***φαίνεται*** από το σημείο Μ υπό γωνία φ. Αν $\widehat{\tau}$ είναι ένα τόξο κύκλου που έχει χορδή την ΑΒ και διέρχεται από το Μ, τότε λέμε ότι το τόξο $\widehat{\tau}$ ***δέχεται γωνία φ***.
Θα δούμε τώρα πως κατασκευάζεται ένα τόξο που να δέχεται γωνία φ.

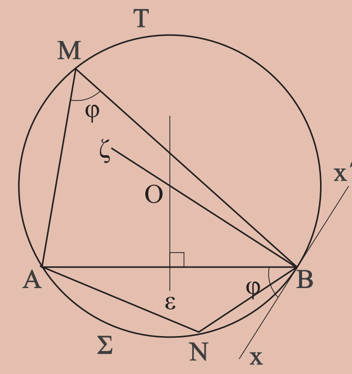
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίνεται ένα τμήμα ΑΒ και μία γωνία φ. Να κατασκευασθεί τόξο κύκλου που να έχει χορδή το ΑΒ και να δέχεται γωνία φ.

- Έστω φ< 1∟

Ανάλυση

Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται από ένα σημείο Μ υπό γωνία φ, δηλαδή $\widehat{AMB} = φ$, τότε αρκεί να προσδιορίσουμε το κέντρο και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΜΒ (βλ. Πόρισμα (iii), § 6.2).



Σχήμα 11

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ ένα τόξο κύκλου, κέντρου Ο, με χορδή την ΑΒ τέτοιο, ώστε για κάθε σημείο του Μ διαφορετικό των Α,Β να ισχύει $\widehat{AMB} = φ$ (σχ.11). Αν φέρουμε την ημιευθεία Βx εφαπτόμενη του κύκλου στο Β θα έχουμε $\widehat{ABx} = \widehat{AMB} = φ$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και επομένως η Βx είναι μία σταθερή, ανεξάρτητη του Μ, ημιευθεία. Επειδή ΟΒ⊥Βx, το κέντρο Ο θα βρίσκεται στη σταθερή ευθεία ζ που είναι κάθετη στη Βx στο Β. Αλλά το Ο βρίσκεται επίσης και στη μεσοκάθετο ε του ΑΒ, άρα είναι η τομή των ε και ζ.

Σύνθεση

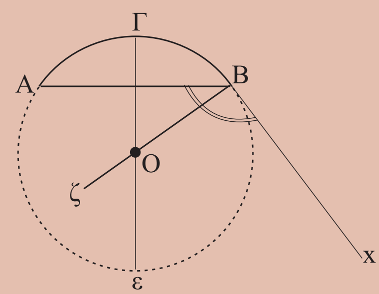
Θεωρούμε το δοσμένο τμήμα ΑΒ και φέρουμε ημιευθεία Βx έτσι, ώστε $\widehat{ABx} = φ$. Στη συνέχεια φέρουμε ευθεία ζ κάθετη της Βx στο Β, που τέμνει τη μεσοκάθετο ε του ΑΒ στο Ο. Γράφουμε τον κύκλο (Ο,ΟΑ) και το τόξο $\overset{\frown}{ATB}$ (σχ.11) (χωρίς τα άκρα του) είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Για κάθε σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{ATB}$ έχουμε $\widehat{AMB} = \widehat{ABx} = φ$, αφού η $\widehat{ABx}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\widehat{AMB}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, ενώ για κάθε σημείο Ν του τόξου $\overset{\frown}{AΣB}$ έχουμε

$$\widehat{ANB} = \widehat{ABx'} = 2∟ - \widehat{ABx} = 2∟ - φ,$$

όπου Βx΄ η αντικείμενη ημιευθεία της Βx.



Σχήμα 12

Διερεύνηση

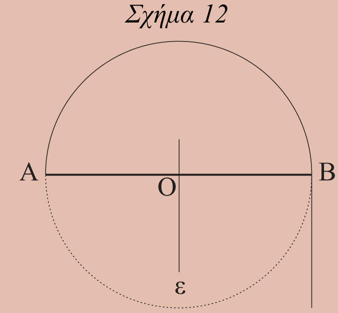
Για να υπάρχει λύση πρέπει η ευθεία ζ να τέμνει την ε, το οποίο συμβαίνει πάντοτε, αφού $\widehat{ABx} = φ \neq 0$.

- Έστω φ>1∟

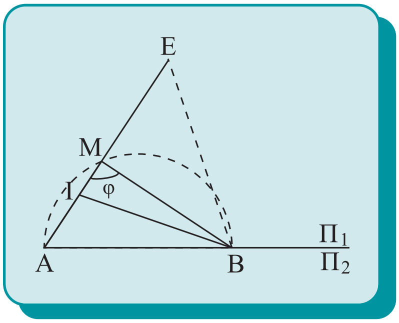
Τότε με τον ίδιο, όπως παραπάνω, τρόπο κατασκευάζουμε τον κύκλο κέντρου Ο και το τόξο $\overset{\frown}{AΓB}$ (σχ.12) που είναι το ζητούμενο (χωρίς τα άκρα του).

- Έστω φ = 1∟

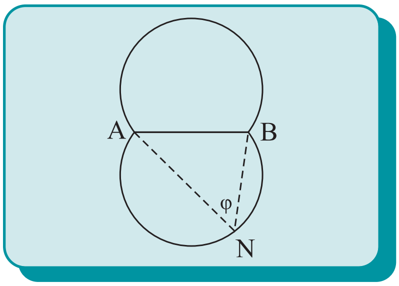
Τότε το σημείο τομής των ευθειών ε, ζ είναι το μέσο Ο του ΑΒ (σχ.13). Επομένως, το ζητούμενο τόξο είναι καθένα από τα ημικύκλια διαμέτρου ΑΒ, χωρίς τα άκρα τους Α και Β.



Σχήμα 13



Σχήμα 14



Σχήμα 15

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω τόξο $\overset{\frown}{AB}$ που δέχεται γωνία φ και $Π_1$ το ημιεπίπεδο στο οποίο περιέχεται (σχ.14). Για κάθε σημείο Μ του $\overset{\frown}{AB}$ έχουμε $A\hat{M}B = φ$, ενώ για κάθε σημείο Ι του τμήματος ΑΜ ή σημείο Ε της προέκτασης του ΑΜ έχουμε αντίστοιχα $A\hat{I}B > φ$ και $A\hat{E}B < φ$.

Άρα τα μοναδικά σημεία του $Π_1$ από τα οποία το ΑΒ φαίνεται υπό γωνία φ είναι τα σημεία του $\overset{\frown}{AB}$ εκτός από τα άκρα του. Όμοια αποδεικνύεται ότι τα μοναδικά σημεία του $Π_2$ που βλέπουν το ΑΒ υπό γωνία φ είναι τα σημεία του τόξου $\overset{\frown}{ANB}$ συμμετρικού του $\overset{\frown}{AB}$ ως προς την ευθεία ΑΒ (σχ.15).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό γωνία φ είναι δύο τόξα κύκλων, χορδής ΑΒ, χωρίς τα άκρα τους Α,Β, συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΒ, καθένα από τα οποία δέχεται γωνία φ.

Άμεση συνέπεια του προηγουμένου είναι ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό ορθή γωνία είναι κύκλος με διάμετρο ΑΒ, χωρίς τα σημεία Α και Β.

ΣΧΟΛΙΟ

*Στη λύση του παραπάνω προβλήματος, εκτός από τα γνωστά μας βήματα: κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση αναφέραμε πριν από αυτά και το βήμα της **ανάλυσης**. Το βήμα αυτό το κάνουμε όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή και περιλαμβάνει τα εξής: Υποθέτουμε ότι κατασκευάσαμε το ζητούμενο σχήμα και προσπαθούμε να εντοπίσουμε εκείνες τις ιδιότητές του που ανάγουν την κατασκευή του σε γεωμετρικές κατασκευές που μας είναι ήδη γνωστές. Στη σύνθεση ή αλλιώς κατασκευή έχοντας οδηγό την ανάλυση κάνουμε όλες εκείνες τις επιμέρους γεωμετρικές κατασκευές που τελικά θα μας οδηγήσουν στην κατασκευή του ζητούμενου σχήματος. Τα παραπάνω βήματα ακολουθούν, όπως είναι γνωστό, το βήμα της απόδειξης και το βήμα της διερεύνησης (§ 3.17).*
*Η μέθοδος αυτή των τεσσάρων βημάτων: ανάλυση, σύνθεση, απόδειξη και διερεύνηση είναι γνωστή ως **αναλυτική - συνθετική** μέθοδος και χρησιμοποιείται σε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πότε μια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη;*

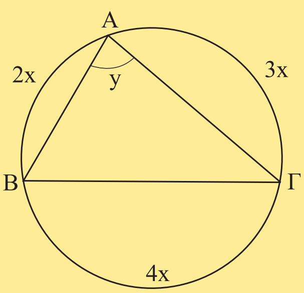
2. *Αν φ και ω είναι αντίστοιχα η εγγεγραμμένη και η επίκεντρη γωνία που βαίνουν στο ίδιο τόξο ενός κύκλου, τότε:*
α. $\varphi = \omega$, β. $\varphi = 2\omega$, γ. $\omega = 2\varphi$, δ. $\varphi = 90° + \omega$,
ε. Τίποτα από τα προηγούμενα.
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

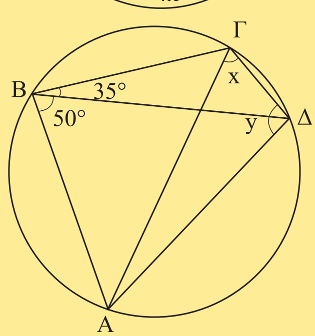
3. *Συμπληρώστε το κενό στην επόμενη πρόταση:*
"Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με ...."

4. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία βλέπουν ένα γνωστό τμήμα υπό γωνία $\varphi < 1\llcorner$ ή $\varphi = 1\llcorner$;*

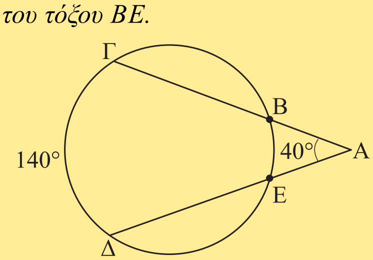
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y.*

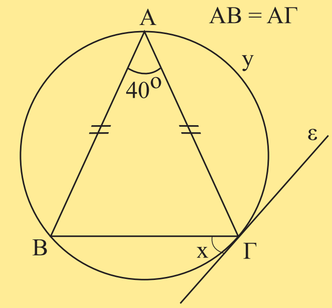


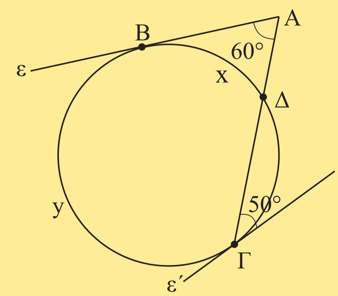


2. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 40°$, να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{BE}$.*

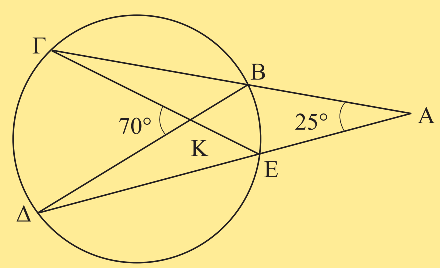


3. *Αν στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες ε και ε' είναι εφαπτόμενες να βρεθούν τα x και y.*

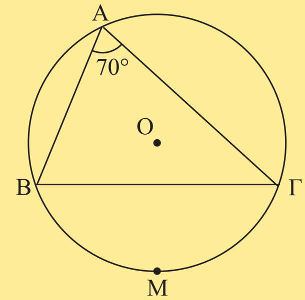




4. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 25°$, να βρείτε τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{EB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.*



5. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{M\Gamma}$ και $\hat{A} = 70°$, να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΟΒΓ και ΜΒΓ.*

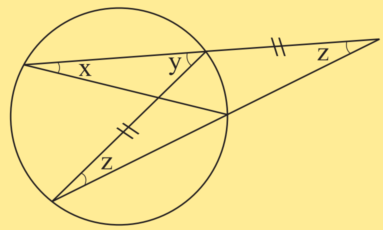


6. *Στο παρακάτω σχήμα, ποια σχέση είναι σωστή;*
i) $x - y + z = 0$,
ii) $x - 2y + z = 0$,
iii) $x - y + z = 0$,

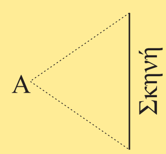
iv) $x + y = 2z$,

v) καμία από τις παραπάνω.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



7. *Το καλύτερο κάθισμα σε έναν κινηματογράφο είναι το κάθισμα "Α". Να βρείτε ποια άλλα καθίσματα έχουν την ίδια οπτική γωνία με το θεατή που κάθεται στο κάθισμα Α .*

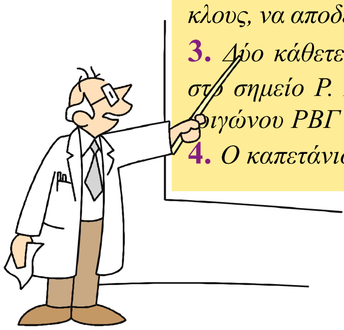


Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή ΑΒ κύκλου (Κ) είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ και αντίστροφα.*

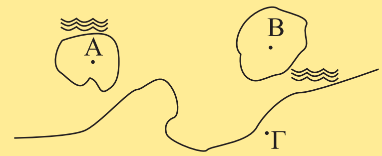
2. *Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το Β.*

3. *Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Κ) τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΡΜ του τριγώνου ΡΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.*



4. *Ο καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού πλοίου Ι είδε τρεις σημαδούρες για υφάλους στα σημεία Α, Β, Γ . Με μία πυξίδα διόπτευσης μέτρησε ότι*

$$A\hat{I}B = 100°,\ B\hat{I}\Gamma = 125°,\ \Gamma\hat{I}A = 135°.$$



Εντόπισε τα σημεία Α, Β, Γ στο χάρτη και προσδιόρισε την ακριβή θέση του ιστιοπλοϊκού. Πώς τα κατάφερε;

Σύνθετα Θέματα

1. *Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο Α και δύο ευθείες ε, ε' που διέρχονται από το Α τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β΄ και τον άλλο στα Γ και Γ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΒ'//ΓΓ'.*

2. *Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Μία χορδή ΒΓ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στο μικρότερο, στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.*

3. *Δίνεται κύκλος (Κ), η εφαπτομένη ε σε ένα σημείο του Α και ένα σημείο Ρ της ε. Από το Ρ φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι ΡΔ=ΡΑ.*

Εγγεγραμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

6.5 Το εγγεγραμένο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται *εγγεγραμμένο* σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται ***περιγεγραμμένος*** κύκλος του τετραπλεύρου.

Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

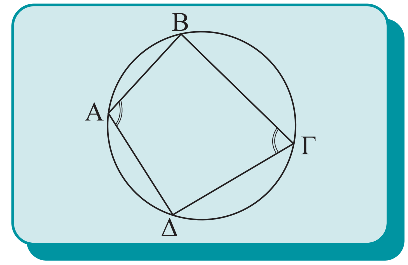
(i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

(ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

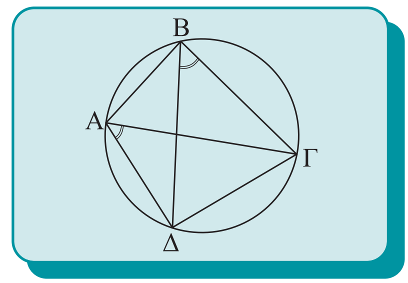
Απόδειξη

(i) Η γωνία $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$, ενώ η $\hat{\Gamma}$ στο $\overset{\frown}{BA\Delta}$, με $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{BA\Delta} = 4\llcorner$ (σχ.16). Επομένως $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$.

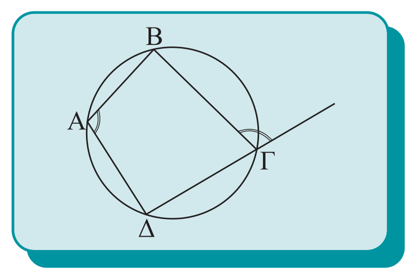
(ii) Δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (π.χ. οι Α, Β) είναι και κορυφές δύο ίσων εγγεγραμμένων γωνιών ($\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$), που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, που ορίζει η απέναντι πλευρά ΓΔ (σχ.17).



Σχήμα 16



Σχήμα 17



Σχήμα 18

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται *εγγράψιμο* όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

Η μελέτη των εγγράψιμων τετραπλεύρων προέκυψε από το ερώτημα αν τέσσερα σημεία του επιπέδου (ανά τρία μη συνευθειακά) είναι ή όχι ομοκυκλικά.
Γνωρίζουμε βέβαια ότι τρία σημεία του επιπέδου μη συνευθειακά ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αυτό όμως δε συμβαίνει απαραίτητα και για τέσσερα σημεία, π.χ. οι κορυφές ενός τυχαίου παραλληλογράμμου, το οποίο δεν είναι ορθογώνιο, δεν είναι δυνατόν να ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αφού οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες και αν δεν είναι και οι δύο ορθές δεν θα είναι παραπληρωματικές.
Απομένει λοιπόν να καθορίσουμε κάτω από ποιες συνθήκες είναι τέσσερα σημεία ομοκυκλικά ή, ισοδύναμα, κάτω από ποιες προϋποθέσεις (**κριτήρια**) ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

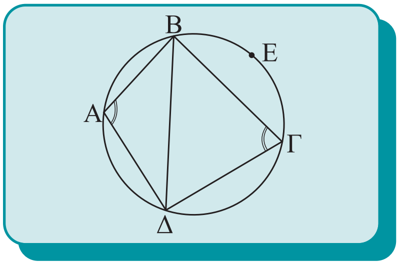
Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

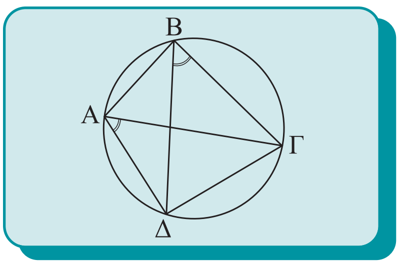
(i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

(ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

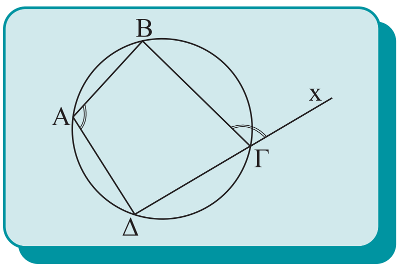
(iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.



Σχήμα 19



Σχήμα 20



Σχήμα 21

Απόδειξη

(i) Έστω $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\llcorner$. Φέρουμε τον κύκλο που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Δ και τη χορδή του ΒΔ. Τα σημεία Α, Γ βρίσκονται εκατέρωθεν της ΒΔ, οπότε κάθε εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο $\overset{\frown}{B A \Delta}$ ισούται με τη $\hat{\Gamma}$, ενώ κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο $\overset{\frown}{B E \Delta}$ (σχ.19) ισούται με την παραπληρωματική της, δηλαδή την $\hat{A}$. Επομένως το Γ είναι σημείο του $\overset{\frown}{B E \Delta}$ και ομοκυκλικό με τα Α, Β, Δ.

(ii) Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma = \varphi.$$

Τότε τα Α,Β ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία το τμήμα ΓΔ φαίνεται υπό ορισμένη γωνία φ. Ο γεωμετρικός αυτός τόπος είναι (βλ. § 6.4) δύο συμμετρικά τόξα ως προς το ΓΔ. Τα Α,Β όμως βρίσκονται στο ίδιο μέρος της ΓΔ, συνεπώς ανήκουν στο ίδιο τόξο, επομένως τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.

(iii) Έστω ότι $x\hat{\Gamma}B=\hat{A}$ (σχ. 21), τότε $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\llcorner$, επομένως το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο γιατί έχει δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές, λόγω του κριτηρίου (i).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η *Περιγεγραμμένο και περιγράψιμο τετράπλευρο σε κύκλο*

Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο, λέγεται *περιγεγραμμένο* στον κύκλο αυτό, ενώ ο κύκλος λέγεται *εγγεγραμμένος* στο τετράπλευρο αυτό.

(Α) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες ενός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ:

(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

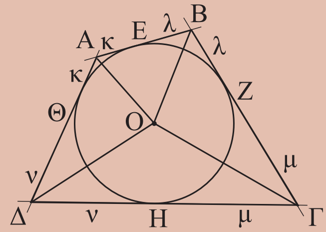
(Β) Να αποδείξετε ότι για να είναι ένα τετράπλευρο περιγράψιμο σε κύκλο αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις :

(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

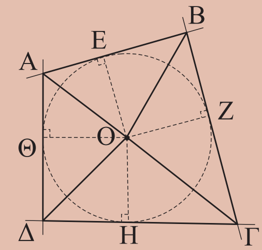
(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Απόδειξη

(Α) Απλή (βλ. σχ.22).

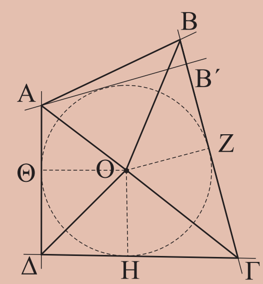


Σχήμα 22



Σχήμα 23

(Β) (i) Από το σημείο τομής Ο των διχοτόμων φέρουμε τις κάθετες ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ στις πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα (σχ. 23). Το Ο ως σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$ ισαπέχει από τις πλευρές της ΑΒ, ΑΔ, συνεπώς ΟΕ=ΟΘ. Ανάλογα έχουμε ότι ΟΕ=ΟΖ=ΟΗ, οπότε τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ ανήκουν σε κύκλο (Ο,ΟΕ) και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο.



Σχήμα 24

(ii) Έστω ότι ΑΒ+ΓΔ = ΑΔ+ΒΓ (1). Θεωρούμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο και από το Ο φέρουμε τις κάθετες στις πλευρές των γωνιών αυτών, ΟΘ⊥ΑΔ, ΟΗ⊥ΓΔ και ΟΖ⊥ΒΓ (σχ.24). Τότε ΟΘ = ΟΗ = ΟΖ και ο κύκλος (Ο,ΟΘ) εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ΑΒΓΔ. Έστω ότι δεν εφάπτεται στην ΑΒ. Φέρουμε την εφαπτομένη από το Α στον κύκλο (Ο,ΟΘ) η οποία τέμνει την ευθεία ΒΓ σε σημείο Β΄. Το τετράπλευρο ΑΒ΄ΓΔ είναι περιγεγραμμένο, οπότε

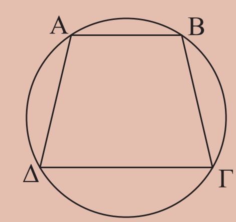
$$ΑΒ' + ΓΔ = ΑΔ + Β'Γ \quad (2).$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$ΑΒ – ΑΒ' = ΒΓ – Β'Γ \quad ή \quad ΑΒ = ΑΒ' + ΒΒ',$$

το οποίο είναι άτοπο, επομένως ο κύκλος εφάπτεται και στην πλευρά ΑΒ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η



Σχήμα 25

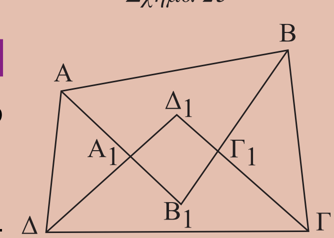
Να αποδειχθεί ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

Αν το ΑΒΓΔ (σχ.25) είναι ισοσκελές τραπέζιο θα είναι $\hat{A} = \hat{B}$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ και $\hat{A} + \hat{\Delta} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2∟$.

Επομένως θα είναι και $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2∟$, οπότε είναι εγγράψιμο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η



Σχήμα 26

Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τετραπλεύρου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Απόδειξη

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών του (σχ. 26). Τότε έχουμε ότι

$$Β_1\hat{Α}_1Δ_1 = Α\hat{Α}_1Δ = 2∟ – \left(\frac{\hat{A}+\hat{\Delta}}{2}\right) \quad και \quad Δ_1\hat{Γ}_1Β_1 = Β\hat{Γ}_1Γ = 2∟ – \left(\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}\right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$Β_1\hat{Α}_1Δ_1 + Δ_1\hat{Γ}_1Β_1 = 4∟ – \left(\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}\right) = 2∟,$$

επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο:*

i) Τα αθροίσματα των απέναντι γωνιών είναι ίσα. Σ Λ

ii) Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες. Σ Λ

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Αν ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο τότε:*

α. $\hat{A} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\llcorner$ *β.* $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ *γ.* $\hat{A} = \hat{\Delta}_{\varepsilon\xi}$

δ. $\hat{A} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ *ε.* $\hat{B} = \hat{\Delta}$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Από τέσσερα μη συνευθειακά σημεία διέρχεται πάντοτε ένας κύκλος;*

4. *i) Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο;*

ii) Αν οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

5. *Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο;*

6. *Ποια από τα τετράπλευρα: παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο και τραπέζιο είναι εγγράψιμα;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι* $\hat{A} = 120°$ *και* $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 80°$. *Να βρείτε τις γωνίες* $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ *και* $\hat{\Delta}$ *του τετραπλεύρου.*

2. *Αν ένας ρόμβος είναι εγγεγραμμένος σε κύκλο, να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο.*

3. *Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.*

4. *Να αποδείξετε ότι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ΄και τον άλλο στα Δ και Δ΄ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΓΓ΄//ΔΔ΄.*

2. *Ένας κύκλος (Κ) διέρχεται από τις κορυφές Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη ε του περιγεγραμμένου κύκλου στο Α.*

3. *Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.*

4. *Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (Ο,R). Αν ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι ΟΑ⊥ΔΕ (Θεώρημα Nagel).*

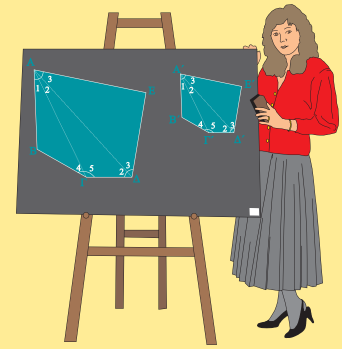
2. *Δίνεται μία χορδή ΒΓ ενός κύκλου (Ο,R) και οι εφαπτόμενες* ε_1 *και* ε_2 *στα άκρα της. Από ένα τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΟΜ, που τέμνει τις* ε_1 *και* ε_2 *στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΜ = ΜΕ.*

3. *Να αποδείξετε ότι οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου πάνω στις πλευρές του είναι σημεία συνευθειακά (ευθεία Simson).*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΓΕ = ΒΖ.*

Δραστηριότητα

Να εξετασθεί η ύπαρξη κύκλου που διέρχεται από:
i) δύο δοσμένα σημεία,
ii) τρία δοσμένα σημεία,
iii) τέσσερα δοσμένα σημεία,
και η μοναδικότητά του σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις.



6.7 Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων

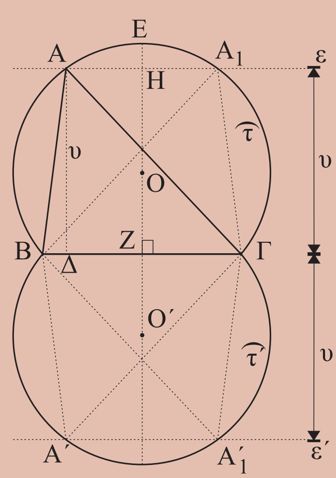
Σε προηγούμενα κεφάλαια συναντήσαμε ορισμένους βασικούς γεωμετρικούς τόπους, όπως ο κύκλος, η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος, η διχοτόμος μίας γωνίας, η μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων ευθειών και τέλος το τόξο γνωστής χορδής ΑΒ, τα σημεία του οποίου βλέπουν το τμήμα ΑΒ υπό δοσμένη γωνία φ.
Οι γεωμετρικοί αυτοί τόποι μας είναι χρήσιμοι στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ που έχει ΒΓ=α, ύψος ΑΔ=υ και γωνία $\hat{A} = \omega$, όπου α,υ γνωστά τμήματα και ω γνωστή γωνία.

Λύση

• **Ανάλυση.** Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο (σχ.27) που έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A} = \omega$. Επειδή $\hat{A} = \omega$ η κορυφή Α βλέπει γνωστό τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία, άρα είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_1 που αποτελείται από τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$, που γράφονται με χορδή τη ΒΓ εκατέρωθεν αυτής και δέχονται το καθένα γωνία ω. Επίσης, αφού το Α απέχει από τη ΒΓ γνωστή απόσταση υ, είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_2 που αποτελείται από δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής σε απόσταση υ. Άρα η κορυφή Α είναι η τομή των γεωμετρικών τόπων T_1 και T_2.



Σχήμα 27

• **Σύνθεση.** Με χορδή τμήμα ΒΓ = α γράφουμε τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$ που δέχονται γωνία ω. Στη συνέχεια σε απόσταση ΖΗ = υ από τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής φέρουμε ευθείες ε, ε΄//ΒΓ που τέμνουν τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$. Αν Α είναι ένα από τα σημεία τομής των $Τ_1$, $Τ_2$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

• **Απόδειξη.** Το τρίγωνο ΑΒΓ, από την κατασκευή έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{Α}$= ω, αφού το Α είναι σημείο π.χ. του τόξου $\overset{\frown}{\tau}$ τα σημεία του οποίου βλέπουν το ΒΓ υπό γωνία ω.

• **Διερεύνηση.** Για να υπάρχει λύση πρέπει οι γεωμετρικοί τόποι $Τ_1$ και $Τ_2$ να έχουν κοινά σημεία. Έτσι, αν ΑΔ<ΕΖ η ευθεία ε τέμνει το τόξο $\overset{\frown}{\tau}$ σε δύο σημεία Α και $Α_1$ και η ε΄ τέμνει το $\overset{\frown}{\tau}'$ στα Α΄ και $Α΄_1$, οπότε έχουμε τέσσερα τρίγωνα τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους (τρεις πλευρές ίσες), οπότε θεωρούμε ότι έχουμε μία λύση. Αν ΑΔ=ΕΖ, η ε έχει ένα κοινό σημείο με το $\overset{\frown}{\tau}$, το Ε, οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ και η ε΄ έχει ένα κοινό σημείο με το $\overset{\frown}{\tau}'$, το Ε΄, οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο Ε΄ΒΓ. Τα τρίγωνα αυτά όμως είναι ίσα, οπότε έχουμε μία μόνο λύση. Τέλος, αν ΑΔ>ΕΖ δεν υπάρχουν κοινά σημεία των $Τ_1$, $Τ_2$ και το πρόβλημα είναι αδύνατο.

ΣΧΟΛΙΟ

Στο παραπάνω πρόβλημα, για να κατασκευάσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου γνωρίζουμε την πλευρά ΒΓ = α, πρέπει να προσδιορίσουμε ακόμα την κορυφή Α. Η κορυφή αυτή έχει δύο ιδιότητες:

(i) βλέπει το τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία ω και

(ii) απέχει από την πλευρά ΒΓ, γνωστή απόσταση υ.

Επομένως το Α είναι η τομή των δύο γεωμετρικών τόπων, τόξου και ευθείας αντίστοιχα.

Γενικά, όταν ένα πρόβλημα είναι ή ανάγεται στον προσδιορισμό ενός σημείου, τότε βρίσκουμε δύο γεωμετρικούς τόπους T_1, T_2 στους οποίους οφείλει, σύμφωνα με τα δεδομένα, να βρίσκεται το σημείο αυτό και η τομή των T_1, T_2 είναι το ζητούμενο σημείο.

Η μέθοδος της χρησιμοποίησης των γεωμετρικών τόπων στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών ανάγεται στον Πλάτωνα.

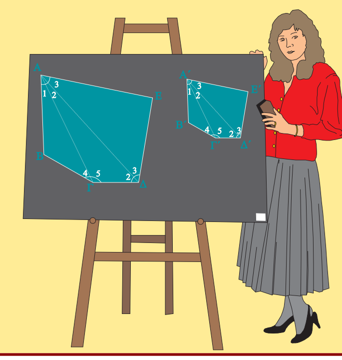
Δραστηριότητες

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών δοσμένου κύκλου που:

i) είναι παράλληλες σε δοσμένη ευθεία ή

ii) ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου ή

iii) συντρέχουν σε ένα σημείο.



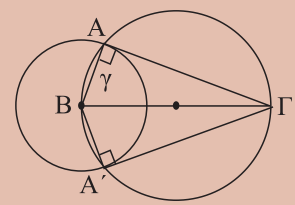
Στη συνέχεια δίνουμε ορισμένα ακόμα παραδείγματα γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται η υποτείνουσα ΒΓ=α και μία κάθετη πλευρά του ΑΒ = γ, όπου α και γ γνωστά τμήματα.

Λύση

• **Ανάλυση.** Ας υποθέσουμε ότι ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{A} = 1\llcorner$, ΒΓ = α και ΑΒ = γ (σχ.28). Ας θεωρήσουμε γνωστή την πλευρά ΒΓ. Το σημείο Α:
(i) απέχει απόσταση γ από το Β, άρα ανήκει στον κύκλο (Β,γ), και
(ii) βλέπει το ΒΓ υπό ορθή γωνία, άρα ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΒΓ.



Σχήμα 28

• **Σύνθεση.** Κατασκευάζουμε τους δύο κύκλους (σχ.28) οι οποίοι τέμνονται στα Α και Α′. Σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′ΒΓ που είναι λύσεις του προβλήματος σε διαφορετικές θέσεις.

• **Απόδειξη.** Το τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχει $\hat{A} = 1\llcorner$, επειδή βαίνει σε ημικύκλιο, και ΑΒ = γ ως ακτίνα του κύκλου (Β,γ).

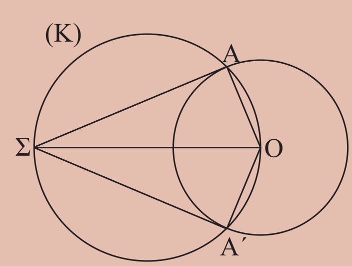
• **Διερεύνηση.** Για να υπάρχει λύση πρέπει οι δύο κύκλοι να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει όταν $α > γ$. Όταν $α \leq γ$, είναι φανερό ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και σημείο Σ εκτός αυτού. Να κατασκευασθεί εφαπτομένη του κύκλου η οποία να διέρχεται από το Σ.

Λύση

• **Ανάλυση.** Ας υποθέσουμε ότι ΣΑ είναι μία εφαπτομένη του κύκλου από το Σ, όπου Α το σημείο επαφής (σχ.29). Φέρουμε την ακτίνα ΟΑ, οπότε η γωνία $O\hat{A}Σ$ είναι ορθή και επομένως το Α είναι σημείο του γνωστού κύκλου (Κ) με διάμετρο το γνωστό τμήμα ΟΣ. Άρα το Α είναι κοινό σημείο του (Ο,R) και του (Κ). Επομένως το Α προσδιορίζεται, οπότε προσδιορίζεται και η ΣΑ.



Σχήμα 29

• **Σύνθεση.** Με διάμετρο ΟΣ γράφουμε κύκλο (Κ), ο οποίος τέμνει τον (Ο,R) στα σημεία Α και Α′. Φέρουμε τις ευθείες ΣΑ και ΣΑ′ οι οποίες είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες.

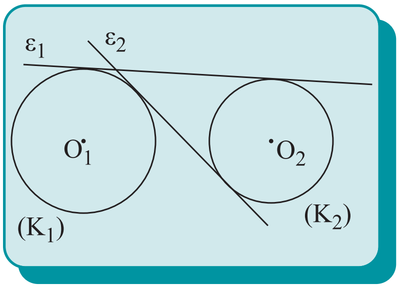
• **Απόδειξη.** Είναι $O\hat{A}Σ = O\hat{A}'Σ = 1\llcorner$, ως εγγεγραμμένες στον κύκλο (Κ) οι οποίες βαίνουν σε ημικύκλια. Άρα οι ακτίνες ΟΑ και ΟΑ′ είναι κάθετες αντίστοιχα στις ΣΑ και ΣΑ′ και επομένως οι ΣΑ και ΣΑ′ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (Ο,R).

• **Διερεύνηση.** Το πρόβλημα έχει πάντοτε δύο λύσεις, γιατί οι κύκλοι (Κ) και (Ο,R) τέμνονται αφού ο (Κ) διέρχεται από το εσωτερικό σημείο Ο και από το εξωτερικό σημείο Σ του (Ο,R).

Συμπέρασμα:
Από οποιοδήποτε εξωτερικό σημείο ενός κύκλου φέρονται ακριβώς δύο ευθείες εφαπτόμενες στον κύκλο.

• *Κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων*

Ας θεωρήσουμε δύο κύκλους (K_1) και (K_2). Μία ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους λέγεται ***κοινή εφαπτομένη*** τους. Μία κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων (σχ.30) χαρακτηρίζεται ως ***εξωτερική***, όπως η ε_1, όταν οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της και ως ***εσωτερική***, όπως η ε_2, όταν οι κύκλοι βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.



Σχήμα 30

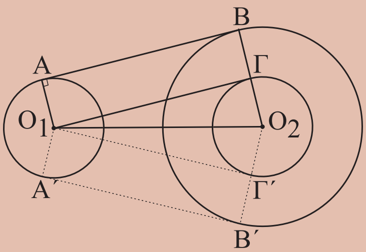
Στο επόμενο πρόβλημα δίνουμε την κατασκευή των κοινών εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι (O_1,ρ), (O_2,R) με $R>\rho$ και $O_1O_2>R-\rho$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενές τους.

Λύση

• **Ανάλυση.** Έστω ΑΒ μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων (O_1,ρ), (O_2,R), όπου Α, Β τα σημεία επαφής της με τους κύκλους αυτούς αντίστοιχα (σχ.31). Τότε οι ακτίνες O_1A, O_2B είναι κάθετες στην ΑΒ και επομένως παράλληλες. Από το O_1 φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ, που τέμνει την O_2B στο Γ, οπότε το τετράπλευρο $ΑΒΓO_1$ είναι ορθογώνιο. Έτσι $O_1Γ \perp O_2Γ$ οπότε ο κύκλος κέντρου O_2 και ακτίνας $O_2Γ = O_2B - BΓ = O_2B - O_1A = R - \rho$ εφάπτεται στην $O_1Γ$ στο Γ.



Σχήμα 31

• **Σύνθεση.** Με κέντρο O_2 και ακτίνα $R-\rho$ γράφουμε κύκλο και από το O_1 φέρουμε τις εφαπτόμενες του $O_1Γ$ και $O_1Γ'$ αντίστοιχα. Φέρουμε τις $O_2Γ$, $O_2Γ'$ που τέμνουν τον κύκλο (O_2,R) στα Β, Β′ και στη συνέχεια φέρουμε τις ακτίνες O_1A, O_1A' του κύκλου (O_1,ρ) παράλληλες προς τις O_2B, O_2B' αντίστοιχα. Τότε οι ευθείες ΑΒ και Α′Β′ είναι οι ζητούμενες κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων.

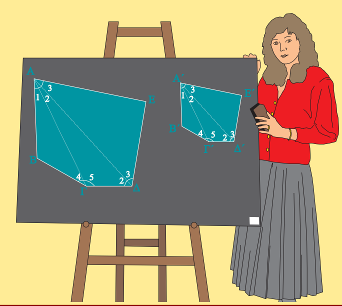
• **Απόδειξη.** Το τετράπλευρο $ΑΒΓΟ_1$ έχει, από την κατασκευή, $Ο_1Α//ΓΒ$ και $ΓΒ = Ο_2Β - Ο_2Γ = R - (R - ρ) = Ο_1Α$, δηλαδή $Ο_1Α = // ΓΒ$, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή η γωνία του $\hat{Γ}$ είναι ορθή, αφού η $Ο_1Γ$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $(Ο_2, R - ρ)$ το $ΑΒΓΟ_1$ είναι ορθογώνιο. Άρα οι ακτίνες $Ο_1Α$ και $Ο_2Β$ είναι κάθετες στην ΑΒ και επομένως η ΑΒ είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων. Η ΑΒ είναι εξωτερική εφαπτομένη αφού οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της. Όμοια αποδεικνύεται ότι και η Α΄Β΄ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη.

• **Διερεύνηση.** Από την προηγούμενη κατασκευή προκύπτει ότι το πρόβλημα έχει λύση όταν είναι δυνατή η χάραξη των εφαπτομένων $Ο_1Γ$ και $Ο_1Γ΄$ από το $Ο_1$ προς τον κύκλο $(Ο_2, R - ρ)$. Αυτό όμως είναι δυνατό όταν το $Ο_1$ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου $(Ο_2, R - ρ)$, το οποίο ισχύει αφού από την υπόθεση έχουμε ότι $Ο_1Ο_2 > R - ρ$.

Επομένως, όταν $Ο_1Ο_2 > R - ρ$ υπάρχουν δύο εξωτερικές κοινές εφαπτόμενες των κύκλων $(Ο_1,ρ)$ και $(Ο_2,R)$.

Δραστηριότητα

Δίνονται δύο κύκλοι $(Ο_1,ρ)$ και $(Ο_2,R)$ με $Ο_1Ο_2 > R + ρ$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εσωτερικές εφαπτόμενές τους. Στη συνέχεια να εξετάσετε το πλήθος των κοινών εσωτερικών και εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων ανάλογα με τις σχετικές θέσεις τους.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που*

i) έχουν απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο Ο,

ii) ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία Α και Β,

iii) έχουν απόσταση λ από μία ορισμένη ευθεία ε,

iv) ισαπέχουν από τις πλευρές μίας γωνίας,

v) ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες,

vi) ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες,

vii) βλέπουν ένα δοσμένο τμήμα ΑΒ υπό ορισμένη γωνία ω.

2. *Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζεται όταν δίνονται:*

i) δύο κάθετες πλευρές του.	**Σ**	**Λ**
ii) μία κάθετη πλευρά του και η υποτείνουσα.	**Σ**	**Λ**
iii) μία οξεία γωνία του.	**Σ**	**Λ**
iv) η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του.	**Σ**	**Λ**
v) η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και η υποτείνουσα.	**Σ**	**Λ**

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων:*

i) του δρομέα που κινείται σε ένα ευθύγραμμο διάδρομο ισαπέχοντας από τις πλευρές του, *ii) ενός τεχνητού δορυφόρου της Γης που κινείται σε απόσταση 10km πάνω από αυτή.*

2. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων γνωστής ακτίνας:*
i) που κυλίονται στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου γνωστού κύκλου,
ii) που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.

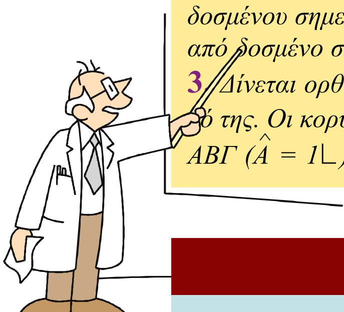
3. *Το σημείο στο οποίο είναι κρυμμένος ένας θησαυρός απέχει 4m από ένα δέντρο Δ και ισαπέχει από δύο άλλα δέντρα Α και Β. Να βρεθεί η θέση του θησαυρού.*

4. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των ακτίνων δοσμένου κύκλου.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Α της ορθής γωνίας ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που έχει δοσμένη υποτείνουσα.*

2. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των προβολών του δοσμένου σημείου Α πάνω στις ευθείες που διέρχονται από δοσμένο σημείο Β.*



3. *Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Οι κορυφές Β και Γ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) κινούνται πάνω στις Oy και Ox αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της υποτείνουσας ΒΓ.*

4. *Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) του οποίου δίνονται:*
i) η διάμεσος ΑΜ=μ και μία κάθετη πλευρά.
ii) η διάμεσος ΑΜ=μ και το ύψος ΑΔ = λ.

Σύνθετα Θέματα

1. *Από ένα μεταβλητό σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΖΕ.*

2. *Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται:*
i) η πλευρά ΒΓ=λ, η γωνία $\hat{A}$ = ω και η διάμεσος ΑΜ = μ.
ii) η πλευρά ΒΓ=λ, η γωνία $\hat{A}$ = ω και η διάμεσος ΒΝ = μ.

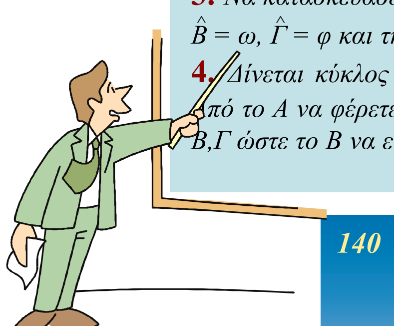
3. *Να κατασκευάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ ίσες με τα γνωστά τμήματα κ, λ, μ, ν αντίστοιχα, και η γωνία του $\hat{A}$ είναι ίση με δοσμένη γωνία ω.*

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α. Από τα άκρα Β,Γ της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετες Βx και Βy στη ΒΓ και προς το ίδιο μέρος της ΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΑΓ, που τέμνει την Γy στο Ε και κάθετη στην ΑΒ που τέμνει την Βx στο Δ. Να αποδειχθεί ότι:*
i) τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά,
ii) τα τετράπλευρα ΑΔΒΜ και ΑΜΓΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλο,
iii) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΔΜΕ εφάπτεται στη ΒΓ.

2. *Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει σταθερή την πλευρά ΒΓ και η κορυφή Α μεταβάλλεται έτσι, ώστε η διαφορά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ να είναι σταθερή. Αν Μ είναι η προβολή της κορυφής Β πάνω στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.*

3. *Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ από τις γωνίες $\hat{B}$ = ω, $\hat{\Gamma}$ = φ και την περίμετρό του δ.*



4. *Δίνεται κύκλος (Ο,R) και σημείο Α εκτός αυτού. Από το Α να φέρετε ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στα Β,Γ ώστε το Β να είναι μέσο του ΑΓ.*

5. *Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Με χορδές τις πλευρές του γράφουμε μέσα σε αυτό τόξα, που τέμνονται ανά δύο στα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο. (Οι έξι κύκλοι του Miquel).*

6. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΖΔ και ΓΕΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

7. *Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος και Ε, Ζ σημεία των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΒΕ, ΔΕ, ΓΖ και ΑΖ σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.*

8. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρο του Η. Αν M_1, M_2, M_3 είναι τα μέσα των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, AH_1, BH_2, ΓH_3 τα ύψη του και Z_1, Z_2, Z_3 τα μέσα των ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*
i) το τετράπλευρο $H_1M_1M_2M_3$ είναι εγγράψιμο,
ii) το τετράπλευρο $Z_1H_1M_1M_2$ είναι εγγράψιμο,
iii) τα σημεία M_i, H_i, Z_i, i = 1, 2, 3 είναι ομοκυκλικά (Κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του Euler).

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

• Εγγεγραμμένη γωνία

i) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.
ii) Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

• Εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
iii) Κάθε εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

• Εγγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:
i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

• Περιγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.
ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

• Περιγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:
i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

• Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές