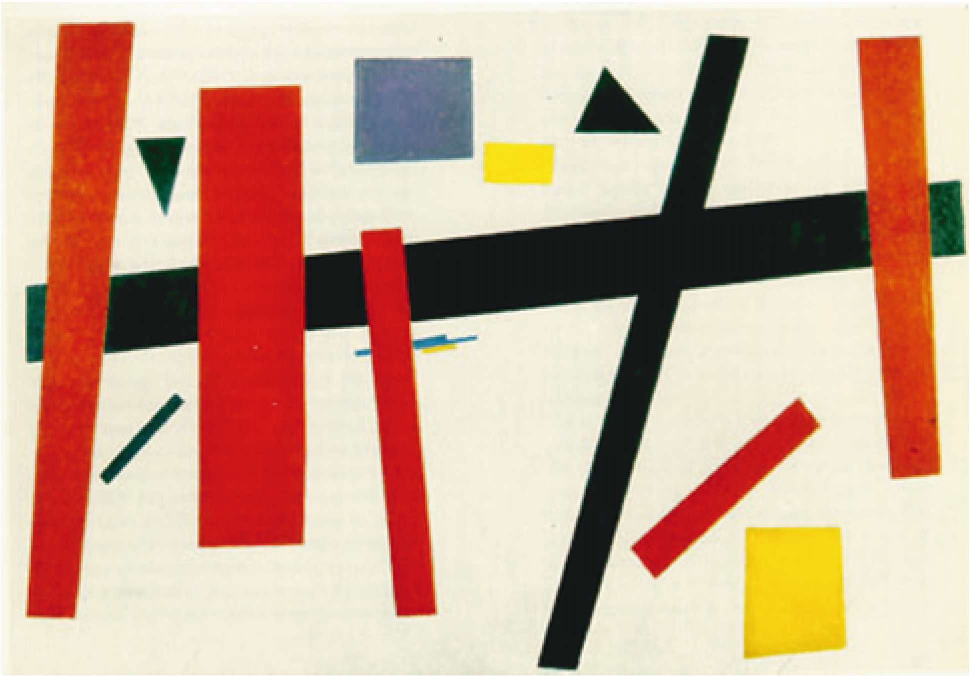
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Μετρικές Σχέσεις

Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται ουσιαστικά με τον προσδιορισμό των στοιχείων του τριγώνου αν είναι γνωστές οι πλευρές, καθώς και με μετρικές σχέσεις στον κύκλο. Στις μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο παρουσιάζεται το Πυθαγόρειο θεώρημα και η γενίκευσή του με άμεση εφαρμογή στον προσδιορισμό του είδους του τριγώνου ως προς τις γωνίες του - ακόμα και στον προσδιορισμό των γωνιών του, αν χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο νόμο των συνημιτόνων – καθώς και των υψών του τριγώνου. Κατόπιν υπολογίζονται οι διάμεσοι με τα δύο θεωρήματα των διαμέσων.
Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με το θεώρημα τεμνουσών από το οποίο προκύπτουν οι μετρικές σχέσεις σε κύκλο.

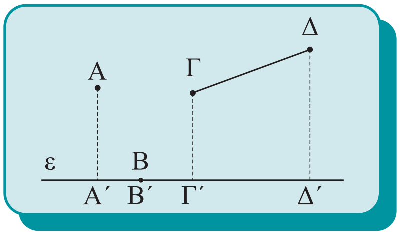


Κάζιμιρ Μαλέβιτς (Ρώσος, 1878 - 1935), «*Υπέρτατο*», πριν το 1915.

Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο

9.1 Ορθές προβολές

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία ε και ένα σημείο Α που δεν ανήκει σε αυτή. Το ίχνος Α′ της καθέτου που φέρουμε από το Α προς την ε το λέμε ***ορθή προβολή*** ή απλώς ***προβολή*** του Α στην ευθεία ε. Αν το σημείο είναι σημείο της ευθείας, π.χ. το Β, τότε ως προβολή του Β′ πάνω στην ε θεωρούμε το ίδιο το Β. Τέλος ορθή προβολή του τμήματος ΓΔ πάνω στην ευθεία ε λέμε το τμήμα Γ′Δ′ που έχει ως άκρα τις ορθές προβολές Γ′, Δ′ των άκρων Γ, Δ, αντίστοιχα, του τμήματος ΓΔ πάνω στην ε .



Σχήμα 1

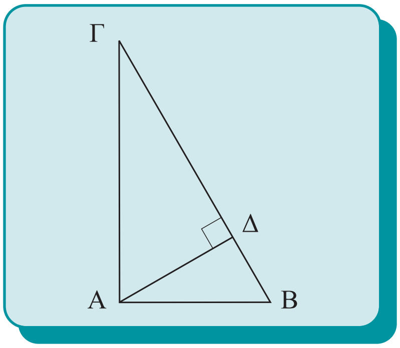
9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Θεώρημα Ι

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

΄Εστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\mathbf{AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta}$ **και** $\mathbf{A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta}$.



Σχήμα 2

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\llcorner$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή. ΄Ομοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Διαιρώντας τις $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ κατά μέλη προκύπτει το εξής πόρισμα:

Πορισμα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

Θεώρημα ΙΙ (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θέλουμε δηλαδή (σχ.2) να αποδείξουμε ότι

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \quad \text{και} \quad A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta .$$

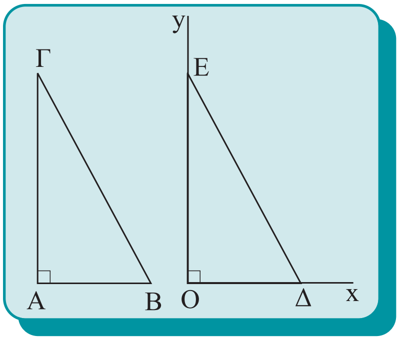
Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι :

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta =$$
$$B\Gamma(B\Delta + \Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2 .$$

Θεώρημα III (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$, τότε $\hat{A} = 1\llcorner$.

Απόδειξη



Σχήμα 3

Πάνω στις πλευρές Οx, Οy ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε αντίστοιχα τμήματα ΟΔ=ΑΒ και ΟΕ=ΑΓ. Επειδή το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ορθογώνιο σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα και την υπόθεση, έχουμε

$$\Delta E^2 = O\Delta^2 + OE^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 .$$

Άρα ΔΕ = ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΟΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες, οπότε θα είναι $\hat{A} = \hat{O} = 1\llcorner$, που είναι το ζητούμενο.

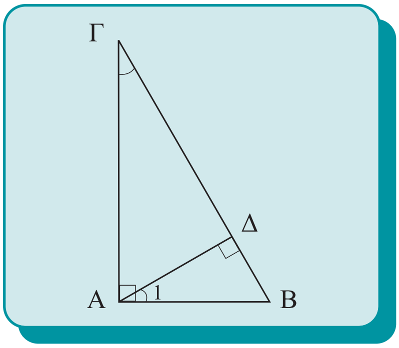
Θεώρημα IV

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

Έστω ΑΔ το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ (σχ.4), που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Θα αποδείξουμε ότι

$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$$



Σχήμα 4

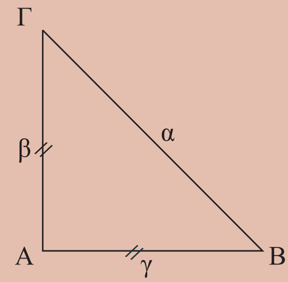
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΑΔ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$. Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$, οπότε $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τότε $\alpha = \sqrt{2}\,\beta$.

Απόδειξη

Πράγματι, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ΑΒΓ παίρνουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 2\beta^2$ ή $\alpha = \sqrt{2}\beta$.



Σχήμα 5

ΣΧΟΛΙΟ

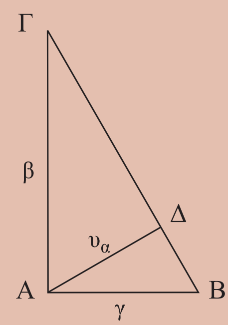
Η εφαρμογή αυτή αποδεικνύει την ύπαρξη τμημάτων με άρρητο λόγο. Είναι αξιοσημείωτο ότι ενώ είναι αδύνατη η μέτρηση με το υποδεκάμετρο τμημάτων άρρητου μήκους, ωστόσο είναι ακριβής ο προσδιορισμός τους με γεωμετρικές κατασκευές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Αν ΑΔ είναι το ύψος ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε ισχύει $\dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} = \dfrac{1}{\upsilon_\alpha^2}$.

Απόδειξη

Επειδή $\alpha\upsilon_\alpha = \beta\gamma$, έχουμε ότι $\dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} = \dfrac{\beta^2 + \gamma^2}{(\beta\gamma)^2} = \dfrac{\alpha^2}{(\alpha\upsilon_\alpha)^2} = \dfrac{1}{\upsilon_\alpha^2}$.



Σχήμα 6

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=1∟) έχει ΑΒ=6 και ΑΓ=8. Ποιο το μήκος της διαμέσου ΑΜ;

2. Αν ο λόγος των κάθετων πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 4, τότε ο λόγος των προβολών τους στην υποτείνουσα είναι :

α. 2 β. 4 γ. 16 δ. $\frac{1}{4}$

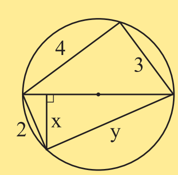
Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 9 cm και 12 cm. Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου που έχει ίση περίμετρο με το ορθογώνιο τρίγωνο είναι:

α. 10 cm β. 12 cm γ. 13 cm δ. 14 cm.

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα x και y.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=1∟) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι ΑΒ=3 και ΑΓ=4, να υπολογιστούν τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΒΔ, ΔΓ και ΑΔ.

2. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ τότε ο λόγος $\dfrac{\beta}{\gamma}$ είναι ίσος με:

α. $\dfrac{1}{2}$ β. 1 γ. $\sqrt{3}$ δ. 2 ε. 3

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι ΑΒ=5 και $B\Delta = \dfrac{25}{13}$, να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα: ΑΓ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο, που έχει πλευρές $\alpha = \kappa^2+\lambda^2$, $\beta = 2\kappa\lambda$ και $\gamma = \kappa^2 - \lambda^2$, όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι με κ>λ, είναι ορθογώνιο.

2. Αν ΑΕ, ΑΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών ΑΓ και ΑΔ ενός κύκλου σε μία διάμετρό του ΑΒ, να αποδείξετε ότι $AZ \cdot AE^2 = A\Gamma \cdot A\Delta^2$.

3. Αν Δ είναι μέσο της κάθετης πλευράς ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) και Ε η προβολή του στη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι $E\Gamma^2 + AB^2 = EB^2$. Στη συνέχεια διατάξτε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα ΔΒ, ΕΒ, ΕΓ.

4. Δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ ($\hat{A} = \hat{A}' = 1\llcorner$) έχουν $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$ και $\mu_\gamma = \mu_{\gamma'}$.

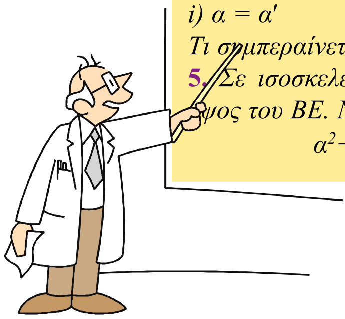
Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = \alpha'$ ii) $\beta = \beta'$.

Τι συμπεραίνετε για τα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′;

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε το ύψος του ΒΕ. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 3BE^2 + 2AE^2 + \Gamma E^2.$$



Σύνθετα θέματα

1. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές του Δ πάνω στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

i) $\dfrac{AB^3}{A\Gamma^3} = \dfrac{BE}{\Gamma Z}$ ii) $A\Delta^3 = B\Gamma \cdot \Delta E \cdot \Delta Z$.

2. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους και (Ο,σ) ο κύκλος που εφάπτεται στους (Κ,R), (Λ,ρ) και στη ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

i) $B\Gamma = 2\sqrt{R\rho}$ ii) $\dfrac{1}{\sqrt{R}} + \dfrac{1}{\sqrt{\rho}} = \dfrac{1}{\sqrt{\sigma}}$.

3. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$. Αν Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ, ΑΓ αντίστοιχα και Κ το σημείο τομής της ΑΜ με τη ΒΓ να αποδείξετε ότι :

i) το ΑΒΚΔ είναι ορθογώνιο,

ii) $\Delta\Gamma^2 - AB^2 = 4MN^2$.

4. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο να αποδείξετε ότι $2\mu_\alpha^2 \geq \beta\gamma$.

5. Θεωρούμε κύκλο (Ο,R), διάμετρό του ΑΒ και μία χορδή του ΓΔ που τέμνει την ΑΒ στο Ε και σχηματίζει με αυτή γωνία 45°. Να αποδείξετε ότι

$$E\Gamma^2 + E\Delta^2 = 2R^2.$$

6. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$) και το ύψος του ΑΔ. Αν x, y και ω είναι αντίστοιχα τα μήκη οποιωνδήποτε ομόλογων γραμμικών στοιχείων των τριγώνων (π.χ. διαμέσων, υψών, ακτίνων εγγεγραμμένων κύκλων κτλ.) ΔΑΒ, ΔΑΓ και ΑΒΓ, τότε $x^2 + y^2 = \omega^2$.

9.3 Γεωμετρικές κατασκευές

Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος και του θεωρήματος IV αντιμετωπίζουμε τα παρακάτω βασικά προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών ευθύγραμμων τμημάτων .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, να κατασκευάσετε το τμήμα k , που ορίζεται από την ισότητα : (i) $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, (ii) $k = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Λύση

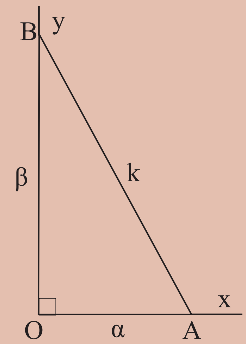
(i) Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, οπότε το ζητούμενο τμήμα k είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α, β.

Επομένως, αν πάνω στις κάθετες πλευρές (σχ.7) Οx, Οy μίας ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ πάρουμε αντίστοιχα τα σημεία Α, Β, ώστε ΟΑ=α και ΟΒ=β, τότε

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

και επομένως το τμήμα ΑΒ είναι το ζητούμενο τμήμα k .

Είναι φανερό ότι το τμήμα k κατασκευάζεται για οποιαδήποτε τμήματα α, β.



Σχήμα 7

(ii) Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $k^2 = \alpha^2 - \beta^2$ η οποία σημαίνει ότι το ζητούμενο τμήμα k είναι η μία κάθετη πλευρά ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα α και άλλη κάθετη πλευρά το β. Η κατασκευή είναι όμοια της (i).

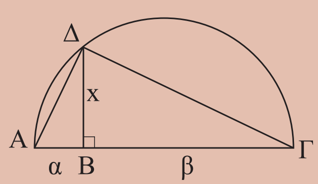
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, να κατασκευάσετε το τμήμα x , που ορίζεται από την ισότητα $x = \sqrt{\alpha\beta}$. Το τμήμα x είναι η *μέση ανάλογος* των α, β.

Λύση

Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $x^2 = \alpha\beta$ η οποία σημαίνει ότι το x είναι το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου, που χωρίζει την υποτείνουσα σε δύο τμήματα ίσα με α και β αντίστοιχα.

Παίρνουμε επομένως σε μία ευθεία διαδοχικά τα τμήματα ΑΒ=α και ΒΓ=β (σχ.8). Γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΓ και στο Β υψώνουμε κάθετο στην ΑΓ, που τέμνει το ημικύκλιο στο Δ. Σχηματίζουμε το τρίγωνο ΔΑΓ το οποίο είναι ορθογώνιο ($\hat{\Delta}=1\llcorner$). Επομένως έχουμε $\Delta B^2 = AB \cdot B\Gamma = \alpha\beta$ και κατά συνέπεια το τμήμα ΔΒ είναι το ζητούμενο. Είναι φανερό ότι το τμήμα x κατασκευάζεται για οποιαδήποτε τμήματα α, β.



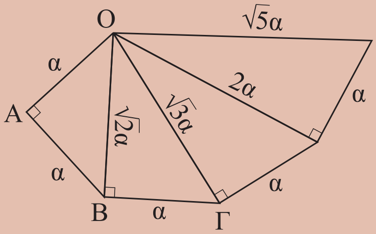
Σχήμα 8

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν α είναι γνωστό τμήμα, να κατασκευασθεί τμήμα ίσο με $\sqrt{2}$ α, $\sqrt{3}$ α, $\sqrt{5}$ α, … , $\sqrt{\nu}$ α με ν φυσικό μεγαλύτερο ή ίσο του δύο.

Λύση

Αν $x=\sqrt{2}$ α, τότε $x^2 = 2α^2 = α^2 + α^2$, η οποία σημαίνει ότι το x μπορεί να κατασκευασθεί (σχ.9) ως υποτείνουσα ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με α. Έτσι το ΟΒ είναι το ζητούμενο τμήμα.



Σχήμα 9

Αν $y=\sqrt{3}$ α, τότε $y^2 = 3α^2 = α^2 + 2α^2 = α^2 + x^2$ που σημαίνει ότι το y είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α και x. Αν λοιπόν φέρουμε κάθετο στην ΟΒ στο Β και πάνω σε αυτή πάρουμε σημείο Γ, ώστε ΒΓ=α, τότε $ΟΓ=\sqrt{3}$ α, δηλαδή y = ΟΓ. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε διαδοχικά τα τμήματα $\sqrt{2}$ α, $\sqrt{3}$ α, $\sqrt{5}$ α, … , $\sqrt{\nu}$ α.

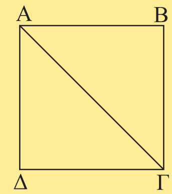
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

Αρχικά οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος οιωνδήποτε (φυσικών ή γεωμετρικών) μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος φυσικών αριθμών. Ειδικότερα, θεωρούσαν ότι όλα τα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή για οποιαδήποτε δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει τμήμα ΕΖ που περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών τόσο στο ΑΒ, όσο και το ΓΔ.

Όμως σύντομα έκαναν μια ανακάλυψη που έμελλε να κλονίσει την πεποίθησή τους αυτή. Βρήκαν ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν είναι σύμμετρα. Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιο ακριβώς πρόβλημα οδήγησε τους αρχαίους Έλληνες στην ανακάλυψη αυτή. Οι ιστορικοί έχουν προτείνει κατά καιρούς πολλές εκδοχές. Η ανακάλυψη αυτή μπορεί να είχε γίνει π.χ. στη γεωμετρία, στο πρόβλημα της εύρεσης του κοινού μέτρου της διαγωνίου προς την πλευρά του τετραγώνου, ή κατά τη μελέτη του κανονικού δωδεκαέδρου, ή στη θεωρία της μουσικής, στο πρόβλημα της διαίρεσης της οκτάβας, που ανάγεται στην εύρεση του γεωμετρικού μέσου των αριθμών 1 και 2, ή στην αριθμητική, στο πρόβλημα του ορισμού του λόγου, που το τετράγωνό του είναι ίσο με 2.

Η πρώτη μαρτυρία για την απόδειξη της ασυμμετρίας (αλλά όχι κατ' ανάγκη και ιστορικά πρώτη απόδειξη) απαντάται στα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη, ο οποίος αναφέρει ότι η απόδειξη της ασυμμετρίας της διαγωνίου με την πλευρά του τετραγώνου γίνεται με την εις άτοπο απαγωγή, γιατί «αν υποτεθεί ότι η διάμετρος είναι σύμμετρη με την πλευρά, τότε ο άρτιος θα ισούται με τον περιττό». Η πρόταση αυτή του Αριστοτέλη ερμηνεύεται ως εξής:



Αν υποθέσουμε ότι η πλευρά ΑΒ είναι σύμμετρη προς τη διαγώνιο ΑΓ, τότε ο λόγος τους είναι λόγος ακεραίων αριθμών, δηλαδή, $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{α}{β}$, όπου οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Τότε, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΑΓ^2 = 2ΑΒ^2$. Επομένως, $\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \frac{α^2}{β^2} = \frac{1}{2}$, ή $β^2=2α^2$.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Αυτό σημαίνει ότι ο $β^2$ είναι άρτιος και επομένως και ο β είναι άρτιος (δηλαδή της μορφής $β=2λ$). Τότε ο α πρέπει να είναι περιττός (αφού οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι). Όμως τότε $(2λ)^2 = 2α^2$, ή $4λ^2=2α^2$, ή $2λ^2 = α^2$ κι επομένως ο $α^2$ είναι άρτιος, οπότε και ο α είναι άρτιος, που είναι άτοπο.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η απόδειξη αυτή έχει καθαρά αριθμητικό χαρακτήρα και στηρίζεται στη θεωρία του άρτιου και του περιττού (δηλαδή τη θεωρία διαιρετότητας δια 2) που είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι.

Γρήγορα βρέθηκαν και άλλα ασύμμετρα τμήματα. Ειδικότερα, ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος (τέλη του 5ου αι. π.Χ.) ανακάλυψε ότι οι πλευρές των τετραγώνων με εμβαδόν 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 είναι ασύμμετρες με τη διαγώνιο του τετραγώνου με πλευρές τη μονάδα. Επίσης, ο Θεαίτητος απέδειξε ότι αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου εκφράζεται με έναν αριθμό Ν που δεν είναι τετράγωνος, τότε η πλευρά του είναι ασύμμετρη με τη μονάδα. Με σύγχρονη ορολογία, αν $Ν \neq α^2$, τότε ο $\sqrt{Ν}$ δεν είναι ρητός αριθμός. Ο Θεαίτητος προχώρησε παραπέρα τις έρευνές του και απέδειξε ότι και όλοι οι αριθμοί της μορφής $\sqrt[3]{Ν}$, όπου Ν φυσικός αριθμός δεν είναι τέλειοι κύβοι. Επίσης εξέτασε άρρητους της μορφής $\sqrt{Μ + Ν}$, $\sqrt{Μ} + \sqrt{Ν}$, $\sqrt{\sqrt{Μ} + \sqrt{Ν}}$.

9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

Το Πυθαγόρειο θεώρημα εκφράζει το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από ορθή γωνία, ως προς τις δύο άλλες πλευρές. Προκύπτει, λοιπόν, το ερώτημα: το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι σε οξεία ή αμβλεία γωνία μπορεί να εκφρασθεί ως συνάρτηση των άλλων πλευρών; Απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνουν τα ακόλουθα δύο θεωρήματα.

Θεώρημα Ι

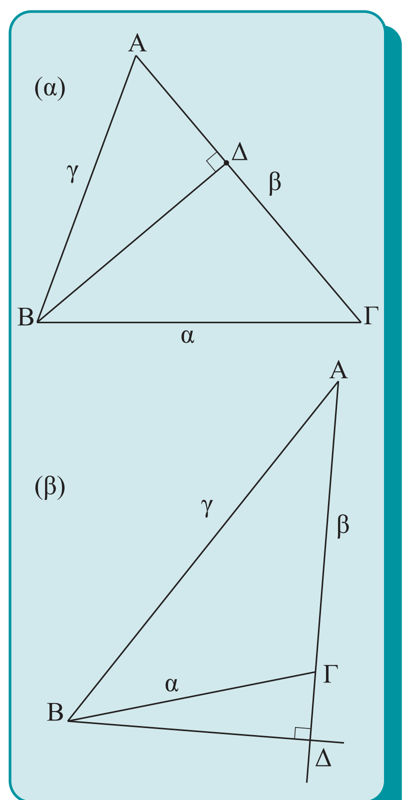
Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.10) είναι π.χ. $\hat{Α} < 1∟$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει ότι

$$α^2 = β^2 + γ^2 - 2β \cdot ΑΔ .$$

Απόδειξη

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ, ΔΒΑ έχουμε, με εφαρμογές



Σχήμα 10

του Πυθαγόρειου θεωρήματος αντίστοιχα :

$$α^2 = ΔΒ^2 + ΔΓ^2 \text{ και } ΔΒ^2 = γ^2 - ΑΔ^2 .$$

Επειδή είναι $\hat{Α} < 1 ∟$ τα Δ,Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Α και ειδικότερα:

- αν $\hat{Γ} < 1 ∟$ το Δ είναι μεταξύ των Α, Γ (σχ.10α), οπότε $ΔΓ = β - ΑΔ$.
- αν $\hat{Γ} > 1 ∟$ το Γ είναι μεταξύ των Α, Δ (σχ.10β), οπότε $ΔΓ = ΑΔ - β$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι

$$ΔΓ^2 = (β - ΑΔ)^2 = β^2 + ΑΔ^2 - 2β \cdot ΑΔ .$$

Με αντικατάσταση αυτής της σχέσης και της $ΔΒ^2 = γ^2 – ΑΔ^2$ στην $α^2 = ΔΒ^2 + ΔΓ^2$ προκύπτει ότι

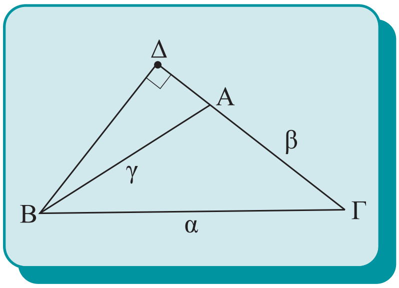
$$α^2 = γ^2 - ΑΔ^2 + β^2 + ΑΔ^2 - 2β \cdot ΑΔ = β^2 + γ^2 - 2β \cdot ΑΔ ,$$

δηλαδή η ζητούμενη ισότητα.

- αν τέλος $\hat{Γ} = 1 ∟$, το Δ συμπίπτει με το Γ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ δίνει $α^2 = γ^2 - β^2$ που γράφεται $α^2 = β^2 + γ^2 - 2β \cdot ΑΔ$, αφού $ΑΔ = β$.

Θεώρημα ΙΙ

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



Σχήμα 11

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.11) είναι π.χ. $\hat{Α} > 1∟$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει

$$α^2 = β^2 + γ^2 + 2β \cdot ΑΔ.$$

Απόδειξη

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ και ΔΒΑ, παίρνουμε αντίστοιχα:

$$α^2 = ΔΒ^2 + ΔΓ^2 \text{ και } ΔΒ^2 = γ^2 - ΑΔ^2 .$$

Επειδή $\hat{Α} > 1∟$, το Δ βρίσκεται στην προέκταση της ΓΑ προς το Α και επομένως $ΔΓ = β + ΑΔ$ οπότε

$$ΔΓ^2 = (β + ΑΔ)^2 = β^2 + ΑΔ^2 + 2β \cdot ΑΔ.$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ και

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

στη σχέση $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$, προκύπτει η ζητούμενη ισότητα

$$\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta .$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα και τα προηγούμενα θεωρήματα Ι και ΙΙ προκύπτει άμεσα ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε :

(i) Αν $\hat{A}<1\llcorner$, τότε $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$,

(ii) Αν $\hat{A}=1\llcorner$, τότε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$,

(iii) Αν $\hat{A}>1\llcorner$, τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$.

Αποδεικνύεται όμως, με απαγωγή σε άτοπο ότι ισχύει και το αντίστροφο των (i), (ii), (iii). Πράγματι, αν π.χ. ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ δεν μπορεί να ισχύει $\hat{A}=1\llcorner$ ή $\hat{A}>1\llcorner$, γιατί τότε από τις (ii) και (iii) θα είχαμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο, αφού $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$. Άρα $\hat{A}<1\llcorner$.
Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες περιπτώσεις.

Έτσι έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι φανερό ότι τα παραπάνω θεωρήματα Ι και ΙΙ αποτελούν γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, αφού στην περίπτωση που είναι $\hat{A} = 1\llcorner$, τα θεωρήματα αυτά δίνουν ως ειδική περίπτωση το Πυθαγόρειο θεώρημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

(i) $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A}>1\llcorner$,

(ii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A}=1\llcorner$,

(iii) $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A}<1\llcorner$.

Σύμφωνα με το πόρισμα αυτό και επειδή σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι στη μεγαλύτερη γωνία, συγκρίνοντας το τετράγωνο της **μεγαλύτερης** πλευράς ενός τριγώνου με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων πλευρών του, διαπιστώνουμε αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=8, β=10 και γ=7, θα έχουμε $\beta^2=100$, $\alpha^2 + \gamma^2 = 64 + 49 = 113$ δηλαδή $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$, οπότε $\hat{B}<1\llcorner$ και επειδή η $\hat{B}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, το τρίγωνο θα είναι οξυγώνιο.

Τέλος από τα θεωρήματα Ι και ΙΙ εκφράζοντας την προβολή ΑΔ ως προς το συνΑ προκύπτει το επόμενο πόρισμα:

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

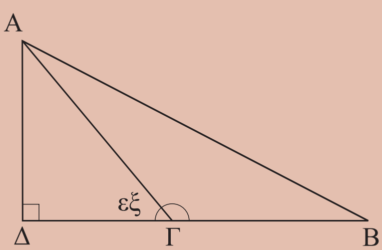
$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \text{συν}A.}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta}$, τότε :

(i) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο,

(ii) να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.



Σχήμα 12

Λύση

(i) Από τη δοσμένη ισότητα προκύπτει ότι η γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά και επιπλέον ότι $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$, οπότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία.

(ii) Επειδή η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \Gamma\Delta \quad (1).$$

Από την υπόθεση όμως έχουμε

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $A\Delta^2 = \beta^2 - \Gamma\Delta^2 = \frac{\beta^2}{4}$, οπότε $A\Delta = \frac{\beta}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ που σημαίνει ότι $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 30°$ και επομένως $\hat{\Gamma} = 150°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Το ύψος υ_α ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο

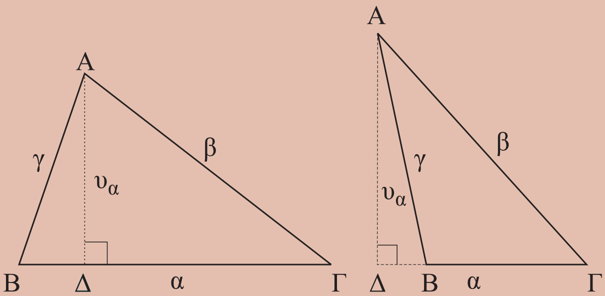
$$\boldsymbol{\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)},}$$

όπου $\tau = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου. Ανάλογες εκφράσεις ισχύουν και για τα άλλα ύψη υ_β και υ_γ.

Απόδειξη

Εστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του $υ_α$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε $υ_α^2 = γ^2 - ΒΔ^2$ (1).

Πρέπει επομένως να υπολογίσουμε την προβολή ΒΔ της γ πάνω στην α.



Σχήμα 13

• Αν $\hat{B} \leq 1∟$, από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$β^2 = α^2 + γ^2 - 2α \cdot ΒΔ$ ή

$$ΒΔ = \frac{1}{2α}\left(α^2 + γ^2 - β^2\right) \qquad (2)$$

• Αν $\hat{B} \geq 1∟$, από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$β^2 = α^2 + γ^2 + 2α \cdot ΒΔ \quad ή \quad ΒΔ = -\frac{1}{2α}\left(α^2 + γ^2 - β^2\right) \qquad (3).$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $ΒΔ^2 = \frac{1}{4α^2}\left(α^2 + γ^2 - β^2\right)^2$

με αντικατάσταση της οποίας στην (1) παίρνουμε:

$$υ_α^2 = γ^2 - \frac{1}{4α^2}\left(α^2 + γ^2 - β^2\right)^2 = \frac{1}{4α^2}\left[4α^2γ^2 - \left(α^2 + γ^2 - β^2\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4α^2}(2αγ + α^2 + γ^2 - β^2)(2αγ - α^2 - γ^2 + β^2) =$$

$$= \frac{1}{4α^2}\left[(α + γ)^2 - β^2\right]\left[β^2 - (α - γ)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4α^2}(α + β + γ)(α + γ - β)(β + α - γ)(β - α + γ) \qquad (4).$$

Επειδή $α + β + γ = 2τ$, θα είναι

$$α + γ - β = 2τ - β - β = 2(τ - β), \quad α + β - γ = 2(τ - γ) \quad και \quad β + γ - α = 2(τ - α),$$

οπότε η (4) γίνεται:

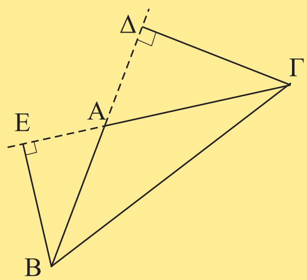
$$υ_α^2 = \frac{1}{4α^2} 2τ \cdot 2(τ - β) \cdot 2(τ - γ) \cdot 2(τ - α) = \frac{4}{α^2} τ(τ - α)(τ - β)(τ - γ)$$

από την οποία προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώστε τα κενά:



i) $B\Gamma^2 = \ldots + \ldots + 2AB \ldots$

ii) $B\Gamma^2 = \ldots + \ldots + 2A\Gamma \ldots$

2. Να βρεθεί το είδος των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ όταν:

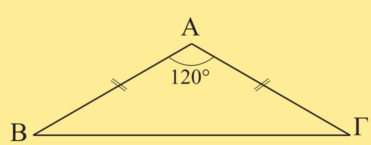
i) $\beta^2 = 3\alpha^2 + \gamma^2$,

ii) $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$,

iii) $\alpha^2 - \beta^2 = 2\gamma^2$.

3. Αν β η .... πλευρά αμβλυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ τότε .... > α^2 *+ .... (Να συμπληρώσετε τα κενά).*

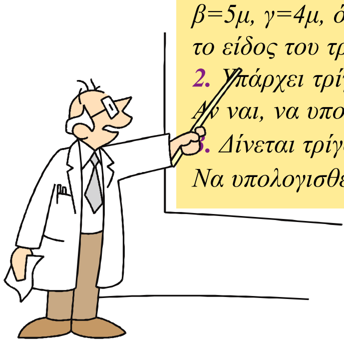
4. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 120°$*, να δικαιολογήσετε γιατί* $\alpha^2 = 3\beta^2$.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ, με α=6μ, β=5μ, γ=4μ, όπου μ θετική παράμετρος. Να εξετασθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

2. Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών α=6, β=5, γ=4; Αν ναι, να υπολογισθούν τα ύψη του τριγώνου.



3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = 1+\sqrt{3}$, $\gamma = 2$. *Να υπολογισθεί η γωνία* $\hat{A}$.

4. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 4cm, ΑΓ = 5cm και $A\hat{B}\Delta = 30°$*, όπου ΒΔ το ύψος του. Να υπολογισθεί η πλευρά του ΒΓ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη ΑΒ=9cm, ΒΓ=7cm και ΑΓ=12cm. Να υπολογισθεί το μήκος της προβολής της ΒΓ πάνω στην ΑΒ.

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ ισχύει ότι

$$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2AB\cdot\Gamma\Delta.$$

3. Αν ΒΒ΄, ΓΓ΄είναι ύψη ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta\cdot\Gamma B' + \gamma\cdot B\Gamma'$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$*). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά ΓΔ=ΒΓ. Να αποδείξετε ότι* $B\Delta^2 = 2B\Gamma\cdot A\Delta$.

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε παράλληλο της ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BE^2 = E\Gamma^2 + B\Gamma\cdot\Delta E$.

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1\llcorner$*) με πλευρές α, β, γ. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 5α, 4β, 3γ;*

Σύνθετα Θέματα

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 30°$*. Να αποδείξετε ότι* $\alpha = \beta\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

2. Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και μία χορδή του ΓΔ//ΑΒ. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = MA^2 + MB^2$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha^3 = \beta^3 + \gamma^3$*. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.*

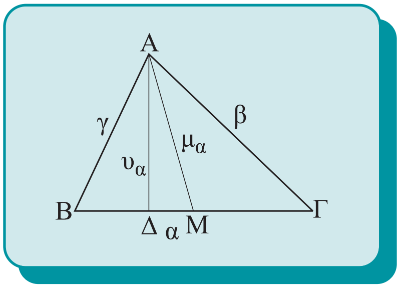
9.5 Θεωρήματα διαμέσων

Οι επόμενες μετρικές σχέσεις που θα μελετήσουμε αφορούν τον υπολογισμό των διαμέσων ενός τριγώνου και των προβολών τους στις πλευρές, ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου.

Θεώρημα I (1ο Θεώρημα Διαμέσων)

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη



Σχήμα 14

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος $ΑΜ=μ_α$ και το ύψος ΑΔ. Αν ΑΓ>ΑΒ, τότε το ίχνος Δ του $υ_α$ βρίσκεται μεταξύ των Β, Μ (σχ.14) και $Α\hat{Μ}Γ>1∟$, ενώ $Α\hat{Μ}Β<1∟$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΓ και το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΒ. Τότε θα έχουμε ότι:

(i) $ΑΓ^2=ΑΜ^2+ΜΓ^2+2ΜΓ\cdot ΜΔ$

(ii) $ΑΒ^2=ΑΜ^2+ΜΒ^2-2ΜΒ\cdot ΜΔ$

Προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τις σχέσεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι ΜΒ = ΜΓ έχουμε:

$$ΑΓ^2+ΑΒ^2=2ΑΜ^2+2ΜΒ^2=2ΑΜ^2+2\left(\frac{ΒΓ}{2}\right)^2=$$

$$=2ΑΜ^2+\frac{ΒΓ^2}{2} \quad ή \quad \boxed{β^2+γ^2=2μ_α^2+\frac{α^2}{2}}.$$

Ανάλογα έχουμε και τους ακόλουθους τύπους :

$$\boxed{α^2+β^2=2μ_γ^2+\frac{γ^2}{2}},\quad \boxed{α^2+γ^2=2μ_β^2+\frac{β^2}{2}}.$$

Από τους τύπους αυτούς μπορούμε να υπολογίσουμε τα τετράγωνα των διαμέσων ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου:

$$\boxed{μ_α^2=\frac{2β^2+2γ^2-α^2}{4}},\quad \boxed{μ_β^2=\frac{2α^2+2γ^2-β^2}{4}},$$

$$\boxed{μ_γ^2=\frac{2α^2+2β^2-γ^2}{4}}.$$

Για τον υπολογισμό των προβολών των διαμέσων στις πλευρές του τριγώνου έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα ΙΙ (2ο Θεώρημα διαμέσων)

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΓ = ΑΒ) ή ισόπλευρο τότε, το Μ ταυτίζεται με το Δ και το 2ο θεώρημα διαμέσων ισχύει ταυτοτικά.

Απόδειξη

Έστω ότι ΑΓ>ΑΒ. Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (βλ. Απόδειξη θεωρήματος Ι):

(i) $A\Gamma^2 = AM^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot M\Delta$

(ii) $AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2MB \cdot M\Delta$

βρίσκουμε ότι

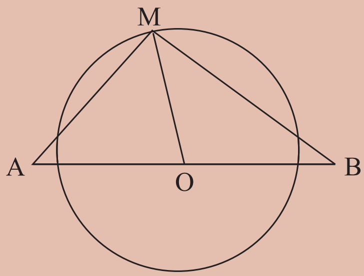
$$A\Gamma^2 - AB^2 = 4MB \cdot M\Delta = 4\frac{B\Gamma}{2} \cdot M\Delta \quad \text{ή} \quad \boxed{\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta}.$$

9.6 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες μετρικές σχέσεις θα μελετήσουμε τα παρακάτω προβλήματα γεωμετρικών τόπων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω Α, Β δύο σταθερά σημεία και k ένα δοσμένο τμήμα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων, των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα Α, Β ισούται με k^2.



Σχήμα 15

Λύση

Έστω Μ ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου. Σύμφωνα με το πρόβλημα θα είναι :

$$AM^2 + BM^2 = k^2 \quad (1).$$

Αν Ο είναι το μέσο του ΑΒ, τότε από το 1ο θεώρημα των διαμέσων θα έχουμε

$$AM^2 + BM^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow k^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow MO = \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2} \quad (2).$$

Από την ισότητα αυτή βλέπουμε ότι το τμήμα ΜΟ έχει σταθερό μήκος.

Έτσι το Μ απέχει από το σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}$, άρα βρίσκεται στον κύκλο $\left(O, \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}\right)$.

Αντίστροφα. Θα αποδείξουμε ότι κάθε σημείο Μ του κύκλου $\left(O, \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}\right)$ είναι και σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή ότι ισχύει $AM^2 + MB^2 = k^2$. Πράγματι, από το 1ο θεώρημα διαμέσων έχουμε

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}\right)^2 + \frac{AB^2}{2} = k^2 .$$

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος που έχει κέντρο Ο το μέσο του τμήματος ΑΒ και ακτίνα ίση με $\frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}$.

Διερεύνηση. Απαραίτητη προϋπόθεση για να υπάρχει γεωμετρικός τόπος είναι

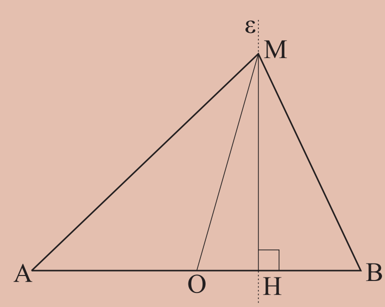
$$2k^2 - AB^2 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

Όταν έχουμε ισότητα ο γεωμετρικός τόπος αποτελείται μόνο από το σημείο Ο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω Α, Β δύο σταθερά σημεία και k ένα σταθερό τμήμα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων, για τα οποία η διαφορά των τετραγώνων των αποστάσεών τους από τα Α, Β ισούται με k^2.

Λύση



Σχήμα 16

Έστω Μ ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου. Σύμφωνα με το πρόβλημα (για ΑΜ > ΒΜ) είναι

$$AM^2 - BM^2 = k^2 \quad (1).$$

Έστω Ο το μέσο του ΑΒ και ε η ευθεία $MH \perp AB$ όπου Η η προβολή του Μ πάνω στην ΑΒ. Από το 2ο θεώρημα των διαμέσων έχουμε ότι

$$AM^2 - BM^2 = 2AB \cdot OH \Leftrightarrow k^2 = 2AB \cdot OH \Leftrightarrow$$

$$OH = \frac{k^2}{2AB} \quad (2).$$

Η ισότητα αυτή δείχνει ότι το τμήμα ΟΗ είναι σταθερό. Παρατηρούμε ότι η προβολή του Μ πάνω στο ΑΒ είναι σταθερή, άρα το Μ βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon \perp AB$ στο σημείο Η, όπου $OH = \frac{k^2}{2AB}$ και βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ο, Β.

Αντίστροφα. Έστω σημείο Η μεταξύ των Ο, Β τέτοιο, ώστε $OH = \frac{k^2}{2AB}$.

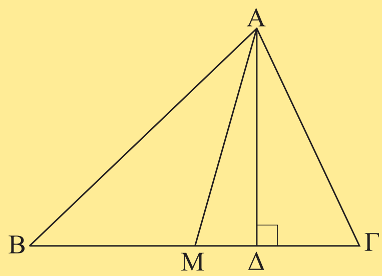
Από το Η φέρουμε την κάθετη ευθεία ε στην ΑΒ και έστω Μ τυχαίο σημείο της ε. Θα αποδείξουμε ότι το Μ είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Πράγματι από το 2ο θεώρημα διαμέσων έχουμε $AM^2 - BM^2 = 2AB \cdot OH = 2AB \cdot \frac{k^2}{2AB} = k^2$. Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ε.

Διερεύνηση. Αν $k = 0$ είναι $MA^2 - MB^2 = 0$ ή $MA = MB$, οπότε το Μ ισαπέχει από τα σημεία Α,Β. Τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στο παρακάτω σχήμα η ΑΜ είναι διάμεσος και ΑΔ ύψος. Ποια σχέση είναι σωστή;*



i) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

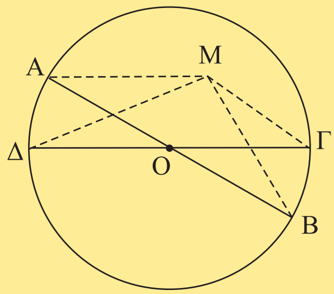
ii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2A\Delta^2$

iii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2B\Gamma \cdot M\Delta$

iv) $AB^2 - A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώσετε τα κενά*



i) $MA^2 + MB^2 =$ .... + ...

ii) $M\Gamma^2 + M\Delta^2 =$ .... + ...

Να εξηγήσετε γιατί $MA^2 + MB^2 = M\Gamma^2 + M\Delta^2$.

3. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι* $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$ *τότε:*

α. $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ β. $\mu_\alpha = \frac{3\alpha}{4}$ γ. $\mu_\alpha = \frac{3\alpha}{2}$ δ. $\mu_\alpha = \frac{2\alpha}{3}$

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε β=7, γ=6 και* $\mu_\alpha=7/2$. *Να υπολογισθούν: i) η πλευρά α, ii) η προβολή της διαμέσου* μ_α *στη ΒΓ.*

2. *Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει*

$$\mu_\alpha^2 + \beta\gamma > \frac{\alpha^2}{4}.$$

3. *Δίνεται κύκλος (Ο,R), μια διάμετρός του ΑΒ και έστω Γ, Δ τα μέσα των ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα. Αν* $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 5$, *όπου Μ τυχαίο σημείο του κύκλου, να υπολογισθεί η ακτίνα R.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και έστω Θ το βαρύκεντρό του. Να αποδείξετε ότι:*

i) $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$,

ii) $\Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta\Gamma^2 = \frac{1}{3}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{A} = 60°$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$. *Να υπολογισθεί η διάμεσός του* μ_α.

2. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της ΑΒ. Να αποδείξετε ότι*

$$\Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = \frac{B\Gamma^2 \cdot A\Delta}{AB}.$$

3. *i) Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο και Μ τυχαίο σημείο να αποδείξετε ότι* $MA^2+M\Gamma^2=MB^2+M\Delta^2$.
ii) Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο και σημείο Μ στο εσωτερικό του, ώστε $MA = 1$, $MB=\sqrt{2}$ *και* $M\Gamma=\sqrt{3}$, *να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου.*

4. *Αν Μ,Ν είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ,ΒΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι*

$$AB^2+B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2+\Delta A^2=A\Gamma^2+B\Delta^2+4MN^2$$

(Θεώρημα Euler).

5. *Στην υποτείνουσα ΒΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια, ώστε ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ. Να αποδείξετε ότι* $Α\Delta^2 + ΑΕ^2 = \frac{5}{9}Β\Gamma^2$.

6. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει* $\beta^2+\gamma^2=2\alpha\mu_\alpha$ *να υπολογισθεί η γωνία* $\hat{A}$.

Σύνθετα Θέματα

1. *Δύο αδέλφια κληρονόμησαν αγροτεμάχιο σχήματος τραπεζίου και αποφάσισαν να το μοιράσουν ανοίγοντας δρόμο που θα ενώνει τα μέσα των παράλληλων πλευρών του. Αν οι βάσεις είναι 8km και 6km, ενώ οι μη παράλληλες πλευρές 5km και 7km, πόσο θα στοιχίσει η διάνοιξη του δρόμου, αν 1 χιλιόμετρο δρόμου κοστίζει 50.000 δρχ;*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΓ>ΑΒ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Ο το μέσο του ΜΝ, να αποδείξετε ότι:*

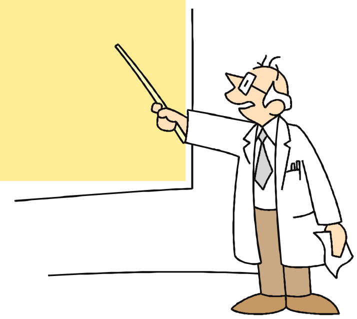
$$Ο\Gamma^2 - ΟΒ^2 = \frac{Α\Gamma^2 - ΑΒ^2}{2}$$

3. *Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2α θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ. Χωρίζουμε τη διάμετρο ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα* $ΜΑ^2+ΜΒ^2+Μ\Gamma^2+Μ\Delta^2$ *είναι σταθερό.*

4. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α, Ο το κέντρο του και κύκλος (Ο,λα), λ>0. Αν για τυχαίο σημείο Μ του κύκλου ισχύει* $ΜΑ^2+ΜΒ^2+Μ\Gamma^2+Μ\Delta^2=18\alpha^2$, *να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ.*

5. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α, με διαγώνιο ΒΔ = α. Έστω τυχαίο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι*

$$\alpha^2 = (ΡΑ^2 - ΡΒ^2) + (Ρ\Gamma^2 - Ρ\Delta^2).$$



Μετρικές σχέσεις σε κύκλο

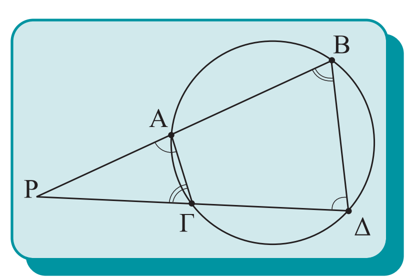
9.7 Τέμνουσες κύκλου

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο,R) και ένα εξωτερικό ή εσωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρουμε δύο τυχαίες ευθείες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα. Το ακόλουθο θεώρημα εκφράζει ότι ΡΑ · ΡΒ = ΡΓ · ΡΔ.

Θεώρημα Ι

Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ , τότε ισχύει

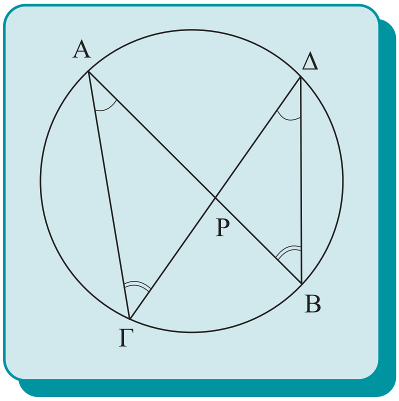
ΡΑ · ΡΒ = ΡΓ · ΡΔ.



Σχήμα 17α

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΡΑΓ και ΡΒΔ είναι όμοια, αφού $Ρ\hat{Α}\Gamma = Ρ\hat{\Delta}Β$ και $Ρ\hat{\Gamma}Α = Ρ\hat{Β}\Delta$ (Στο σχ.17α έχουμε ότι $Ρ\hat{Α}\Gamma = Ρ\hat{\Delta}Β$ γιατί το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο και η $Ρ\hat{Α}\Gamma$ είναι εξωτερική του γωνία. Στο σχ.17β $Ρ\hat{Α}\Gamma = Ρ\hat{\Delta}Β$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο).

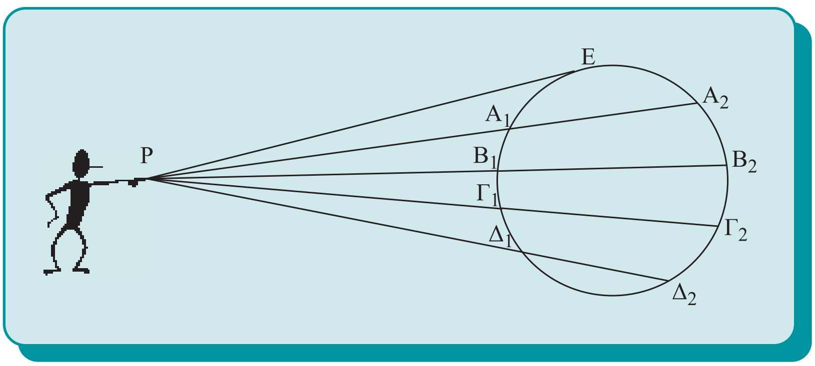


Σχήμα 17β

Επομένως, ισχύει ότι

$$\frac{\text{ΡΑ}}{\text{ΡΔ}} = \frac{\text{ΡΓ}}{\text{ΡΒ}} \quad \text{ή} \quad \text{ΡΑ} \cdot \text{ΡΒ} = \text{ΡΓ} \cdot \text{ΡΔ}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα γινόμενα των τμημάτων που ορίζουν οι τέμνουσες ενός κύκλου $ΡΑ_1 \cdot ΡΑ_2$, $ΡΒ_1 \cdot ΡΒ_2$, $ΡΓ_1 \cdot ΡΓ_2$, ... παραμένουν σταθερά. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα γινόμενα αυτά εξαρτώνται μόνο από τις θέσεις του σημείου Ρ και του κύκλου (Ο,R).
Στην ειδική περίπτωση της εφαπτομένης, όπου τα δύο σημεία τομής ταυτίζονται, το θεώρημα ισχύει.



Σχήμα 18

Θεώρημα ΙΙ

Αν από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α, Β, τότε ισχύει ότι

$$ΡΕ^2 = ΡΑ \cdot ΡΒ.$$

Απόδειξη

Φέρουμε την ευθεία ΡΟ η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ. Θέτουμε ΟΡ = δ, οπότε από το θεώρημα Ι έχουμε ότι:

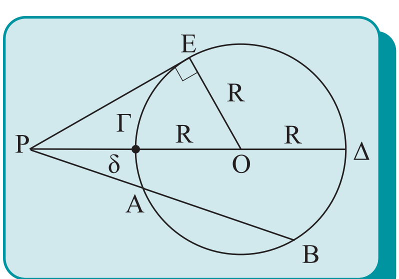
$$ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ =$$

$$= (\delta - R)(\delta + R) = \delta^2 - R^2.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΡΟΕ προκύπτει ότι

$$ΡΕ^2 = ΡΟ^2 - ΟΕ^2 = \delta^2 - R^2$$

Άρα $ΡΕ^2 = ΡΑ \cdot ΡΒ$.



Σχήμα 19

Στην προηγούμενη απόδειξη είδαμε ότι αν μια ευθεία διέρχεται από ένα εξωτερικό σημείο P κύκλου (O,R) και τέμνει τον κύκλο σε σημεία A, B τότε $\mathbf{PA \cdot PB = \delta^2 - R^2}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $\mathbf{PA \cdot PB = R^2 - \delta^2}$, αν το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ λέγεται ***δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R)*** και συμβολίζεται

$$\Delta^{P}_{(O,R)} = \delta^2 - R^2 = OP^2 - R^2.$$

Ας εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου ή όταν ανήκει σε αυτόν. Τότε η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) είναι αρνητική ή ίση με το μηδέν αντίστοιχα.

Επεκτείνοντας, λοιπόν, τον ορισμό της δύναμης σημείου ως προς κύκλο καταλαβαίνουμε ότι ουσιαστικά εκφράζει τη σχετική θέση του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R), καθώς εξαρτάται μόνο από το δ, δηλαδή την απόσταση του P από το κέντρο του κύκλου. Επομένως, έχουμε ότι:

- **το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν**

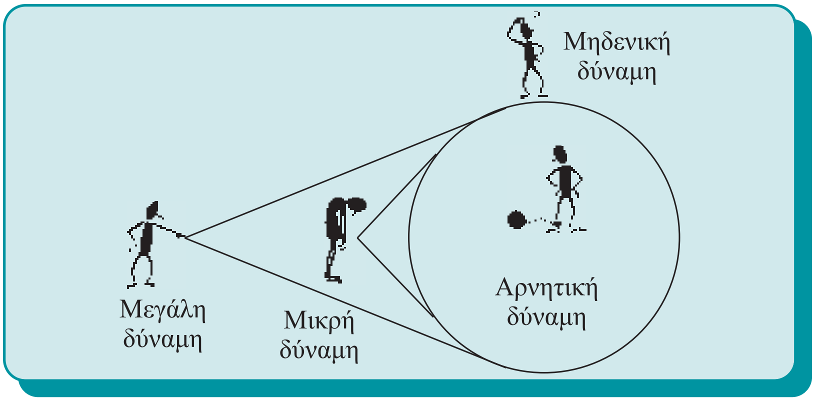
$$\mathbf{\Delta^{P}_{(O,R)} > 0}$$

- **το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν**

$$\mathbf{\Delta^{P}_{(O,R)} < 0}$$

- **το P είναι σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν**

$$\mathbf{\Delta^{P}_{(O,R)} = 0}$$



Σχήμα 20

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ έτσι ώστε $ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ$, τότε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε το σημείο τομής Ρ των τμημάτων ΑΒ, ΓΔ ή των προεκτάσεών τους (σχ.17).

Η δοσμένη σχέση $ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ$ γράφεται $\frac{ΡΑ}{ΡΓ} = \frac{ΡΔ}{ΡΒ}$ και αφού $Α\hat{Ρ}Γ = Β\hat{Ρ}Δ$, τα τρίγωνα ΑΡΓκαι ΒΡΔ θα είναι όμοια.

Επομένως $Ρ\hat{Β}Δ = Ρ\hat{Γ}Α$, οπότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η εφαρμογή εκφράζει το αντίστροφο του θεωρήματος Ι.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Ας θεωρήσουμε ευθεία ε και τρία σημεία της Ρ, Α, Β, με το Α μεταξύ των Ρ και Β. Έστω σημείο Ε εκτός της ευθείας ε τέτοιο, ώστε $ΡΕ^2 = ΡΑ \cdot ΡΒ$. Τότε το τμήμα ΡΕ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο, που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Ε.

Απόδειξη

Έστω (Ο,R) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Ε (σχ.19). Τότε $ΡΕ^2 = ΡΑ \cdot ΡΒ = ΟΡ^2 - R^2 = ΟΡ^2 - ΟΕ^2$ ή $ΡΕ^2 + ΟΕ^2 = ΟΡ^2$, οπότε το τρίγωνο ΟΕΡ είναι ορθογώνιο και η ΡΕ εφάπτεται στον κύκλο (Ο,R).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η εφαρμογή αυτή εκφράζει το αντίστροφο του θεωρήματος ΙΙ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η *Διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (Χρυσή Τομή)*

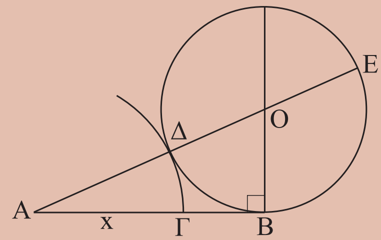
Να διαιρεθεί ένα τμήμα ΑΒ, σε δύο άνισα τμήματα ΑΓ, ΓΒ ώστε το μεγαλύτερο από αυτά να είναι μέσο ανάλογο του μικρότερου και του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ = α και ΑΓ = x το μεγαλύτερο από τα τμήματα στα οποία χωρίζεται το ΑΒ από το Γ (σχ.21). Τότε ΓΒ = α – x και θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $\mathbf{ΑΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΒ}$ ή $x^2 = α(α - x)$ (1).

Η σχέση (1) γράφεται $x^2 + αx - α^2 = 0$ ή $x(x + α) = α^2$ (2).

Έτσι, για να κατασκευάσουμε το x γράφουμε κύκλο $\left(Ο, \frac{α}{2}\right)$ που εφάπτεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Β και φέρουμε την ΑΟ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ, Ε. Τότε ισχύει ότι $AB^2 = A\Delta \cdot AE = A\Delta(A\Delta + \Delta E) = A\Delta(A\Delta + AB)$ ή $\alpha^2 = A\Delta(A\Delta + \alpha)$ οπότε το ΑΔ έχει το ζητούμενο μήκος και το Γ είναι η τομή του κύκλου (Α, ΑΔ) και του τμήματος ΑΒ.



Σχήμα 21

ΣΧΟΛΙΟ

*Το πρόβλημα της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο είναι γνωστό σήμερα και ως πρόβλημα της **Χρυσής Τομής**. Με το πρόβλημα αυτό επιλύεται γεωμετρικά η εξίσωση $x^2 = a(a - x)$ ή $x^2 + ax - a^2 = 0$.*

Η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x - a^2 = 0$ είναι $x = \dfrac{\alpha(\sqrt{5}-1)}{2}$, από όπου προκύπτει ότι $\dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \dfrac{x}{\alpha - x}$, που είναι η αναλογία της «χρυσής τομής».

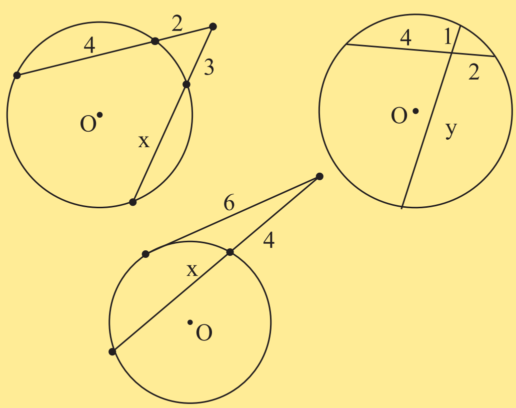
Ο παραπάνω λόγος συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ, δηλαδή $\boldsymbol{\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

*Ο συμβολισμός προέρχεται από το όνομα του γλύπτη της κλασικής αρχαιότητας Φειδία ο οποίος κατασκεύασε τον Παρθενώνα. Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι διαπίστωσαν ότι όπου εμφανίζεται ο λόγος φ (αρχιτεκτονική, γλυπτική κτλ.), δημιουργεί την **αίσθηση της αρμονίας**.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

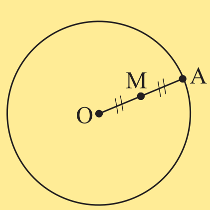
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να προσδιορισθούν οι τιμές των x, y, στα παρακάτω σχήματα:*



2. *Ποια η δύναμη σημείου Ρ ως προς κύκλο (Ο,R) όταν Ρ≡Ο;*

3. *Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta^{M}_{(O,R)} = -3$, να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται κύκλος (Κ,6) και σημείο Α, ώστε ΑΚ=14cm. Αν από το σημείο Α φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ που τέμνει τον κύκλο κατά χορδή ΒΓ=6cm, να υπολογίσετε το ΑΒ.*

2. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ο κύκλος, που διέρχεται από το Α και τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, εφάπτεται της ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι*

$$A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma .$$

3. *Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και τις χορδές του ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται στο Ρ. Αν ισχύει ότι $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{P\Delta}{P\Gamma}$ να αποδείξετε ότι οι χορδές ΑΒ, ΓΔ είναι ίσες.*

4. *Να αποδείξετε ότι η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και η ΒΕ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Ζ, να αποδείξετε ότι:*

i) $BE = \dfrac{\alpha\sqrt{5}}{2}$, *ii)* BE=5EZ.

2. *Από σημείο Α εκτός κύκλου (Ο,R) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ και εφαπτόμενο τμήμα ΑΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τις ΒΔ,ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΕΒ·ΖΓ = ΕΔ·ΖΔ.*

3. *Αν η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε ,να αποδείξετε ότι:*

i) $AM \cdot ME = \dfrac{B\Gamma^2}{4}$, *ii)* $AB^2+A\Gamma^2=2AM\cdot AE$.

4. *Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ευθεία ε που δεν τέμνει τον κύκλο. Από σημείο Μ της ε φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ, ΜΒ και $O\Gamma \perp \varepsilon$. Αν η ΑΒ τέμνει την ΟΓ στο Ν, να αποδείξετε ότι $ON \cdot O\Gamma = R^2$.*

5. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ =1∟), εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και το ύψος του ΑΔ. Αν μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το Γ τέμνει το ύψος στο Μ και τον κύκλο στο Η, να αποδείξετε ότι*

$$\Gamma M \cdot \Gamma H = \Gamma A^2.$$

Σύνθετα Θέματα

1. *Αν η διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε και είναι $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AE^2=2E\Gamma^2$.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι $M\Delta = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}$.*

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta$. Αν Μ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΜ εφάπτεται της ΒΓ στο Β.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ, η διάμεσός του ΑΜ και ο περιγεγραμμένος κύκλος (Κ) του τριγώνου ΑΔΜ. Αν Ε, Ζ είναι τα σημεία τομής των ΑΒ και ΑΓ με τον κύκλο (Κ) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΓΖ.*

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο ευθύγραμμα τμήματα. Ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε $AB \perp \Gamma\Delta$ είναι να ισχύει ότι $A\Gamma^2 - A\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, να αποδείξετε ότι*

$$AB \cdot A\Gamma = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma.$$

3. *Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ και ΒΔ το ύψος του, να αποδείξετε ότι $AM^2=BM^2+A\Delta\cdot A\Gamma$.*

4. ***Θεώρημα Stewart***

i) Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ, τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι

$$B\Delta \cdot A\Gamma^2 + \Delta\Gamma \cdot AB^2 = B\Gamma\left(A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma\right).$$

ii) Να διατυπώσετε το θεώρημα Stewart όταν το ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ).

5. *Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$. Να αποδείξετε ότι:*

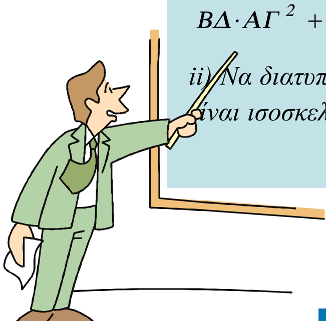
i) $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$,

ii) αν ΑΔ ύψος και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $AH \cdot A\Delta = 2\alpha^2$.

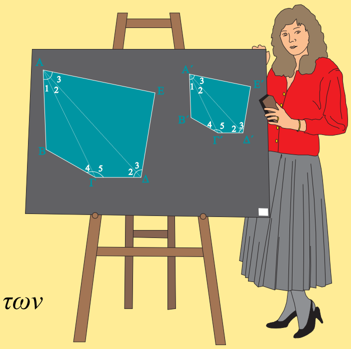
6. *Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Αν Δ η προβολή του Μ πάνω στην ΑΒ να αποδείξετε ότι $B\Gamma^2=3AB^2+A\Gamma^2 - 4AB\cdot A\Delta$.*

7. *Δίνεται κύκλος (Ο,R) μια ακτίνα ΟΑ και χορδή ΒΓ παράλληλη προς την ΟΑ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $AB^2+A\Gamma^2$ είναι σταθερό.*

8. *Δίνεται κύκλος (Ο,R), μία διάμετρος ΑΒ και Γ, Δ τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ αντίστοιχα. Αν μία χορδή ΕΗ που διέρχεται από το Γ είναι $EH = \dfrac{\sqrt{13}}{2}R$, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}H$ =1∟.*



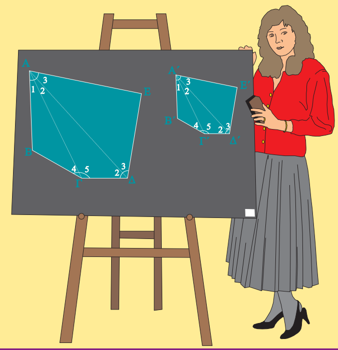
Δραστηριότητες



1. *Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1\llcorner$) με ίσες πλευρές α . Στο ημιεπίπεδο ακμής ΒΓ που δεν περιέχει το Α θεωρούμε το ορθογώνιο ΒΓΔΕ με ΒΕ=α. Έστω Ζ, Η οι προβολές των Β, Δ αντίστοιχα στην ΕΓ. Προσπαθήστε να ανακαλύψετε εποπτικά τη σχέση των τμημάτων ΓΗ, ΗΖ και ΖΕ και στη συνέχεια να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.*

2. *Με κατάλληλη γεωμετρική κατασκευή προσδιορίστε την "ακριβή" θέση των αριθμών $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ και $\sqrt{5}$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.*

Εργασία *(Ριζικός άξονας δύο κύκλων)*



Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν την ίδια δύναμη ως προς δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ,ρ) όταν:

*i) Οι κύκλοι τέμνονται (**Υπόδειξη:** φέρτε την κοινή χορδή τους),*

*ii) Οι κύκλοι εφάπτονται (**Υπόδειξη:** φέρτε την κοινή εφαπτομένη),*

*iii) Οι κύκλοι είναι ο ένας εξωτερικός του άλλου (**Υπόδειξη:** χρησιμοποιήστε το πρόβλημα 2 της §9.6).*

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο

Η προέλευση του προβλήματος της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε δύο μέρη, έτσι, ώστε το μεγαλύτερο τμήμα του να είναι μέση ανάλογος ανάμεσα σε ολόκληρο το τμήμα και το μικρότερο τμήμα του, δηλαδή $α:x = x:(α - x)$, δεν είναι ιστορικά εξακριβωμένη. Ορισμένοι ιστορικοί ανάγουν την προέλευσή του στην Πυθαγόρεια σχολή, συνδέοντάς το με την μελέτη της τετραγωνικής εξίσωσης $x^2+αx=α^2$, όπως εμφανίζεται σε γεωμετρική γλώσσα στο Βιβλίο ΙΙ των «Στοιχείων» του Ευκλείδη ή με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας στην αρχαία Ελλάδα, και άλλοι με την κατασκευή του πενταγώνου από το Θεαίτητο περί το 386 π.Χ.

Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται στα εξής Βιβλία:

1. στο Βιβλίο ΙΙ (Προτάσεις 5, 6 και 11), που συνδέεται με την «παραβολή χωρίων» και κατά συνέπεια με την εξίσωση $x^2 + αx = α^2$,
2. στο Βιβλίο IV (Προτάσεις 10-11), κατά την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου,
3. στο Βιβλίο VI (Ορισμός 3 και Προτάσεις 29-30), όπου ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί έννοιες από τη γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου που εκτίθεται στο Βιβλίο V (βλ. *Μέτρηση*).
4. στο Βιβλίο XIII (Προτάσεις 16 και 17), κατά την κατασκευή του κανονικού εικοσαέδρου και δωδεκαέδρου, στην οποία ενέχεται το πεντάγωνο.

Μετά τον Ευκλείδη το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο εμφανίζεται στο αποκαλούμενο «Συμπλήρωμα» ή Βιβλίο XIV των «Στοιχείων», που αποδίδεται στον Υψικλή (2ος αι. π.Χ.). Στο έργο του Ήρωνα εμφανίζεται σε σχέση με τον προσδιορισμό της επιφάνειας του πενταγώνου και του δεκαγώνου, και στη «Συναγωγή» του Πάππου στην κατασκευή του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου, καθώς και στα θεωρήματα σύγκρισης των όγκων τους.

Στην Αραβική παράδοση δεν υπάρχουν ενδείξεις εισαγωγής της έννοιας της διαίρεσης ενός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο, αν και στο έργο του αλ-Χουαρίζμι (περίπου 780-850), του Αμπού Καμίλ (περίπου 850-930), του Αμπούλ-Ουάφα (940-997/8) κ.ά. εξετάζονται συναφή προβλήματα.

Στην Ευρωπαϊκή παράδοση οι απαρχές της μελέτης των ιδιοτήτων της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο ανάγονται στον Λεονάρδο της Πίζας ή Φιμπονάτσι (περίπου 1180-1250), που εξετάζει μετρικά προβλήματα του πενταγώνου και του δεκαγώνου, καθώς και προβλήματα προσδιορισμού του όγκου του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου. Ο Φιμπονάτσι είναι περισσότερο γνωστός από το «πρόβλημα των κουνελιών», που εκτίθεται στο «Βιβλίο του άβακα» (*Liber abaci*):

«Πόσα ζεύγη κουνελιών μπορούν να γεννηθούν μέσα σε ένα χρόνο από ένα ζευγάρι κουνέλια; ... όταν η φύση των κουνελιών είναι τέτοια που κάθε μήνα γεννούν ένα άλλο ζευγάρι και αρχίζουν την αναπαραγωγή το δεύτερο μήνα μετά τη γέννησή τους.»

Ο Φιμπονάτσι δείχνει ότι το πρόβλημα αυτό οδηγεί στη γένεση της ακολουθίας

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

που ονομάστηκε ακολουθία (αριθμοί) του Φιμπονάτσι από τον Φ.Ε.Α. Λούκας (François Edouard Anatole Lucas, 1848-1891) και σχηματίζεται σύμφωνα με τον κανόνα: $\begin{array}{l} u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \\ u_ν = u_{ν-1} + u_{ν-2} \end{array}$.

Η σχέση της ακολουθίας αυτής με το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο είναι ότι το όριο του λόγου του επόμενου προς τον προηγούμενο όρο της ακολουθίας ισούται με την τιμή του μέσου και άκρου λόγου, δηλαδή με τη ρίζα της εξίσωσης $x^2 + αx = α^2$, και είναι άρρητος αριθμός. Δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Φιμπονάτσι γνώριζε τη σχέση αυτή, η οποία απαντάται αργότερα σε μαθηματικούς του 16ου-17ου αι. (Κέπλερ, Ζιράρ, Σίμπσον). Η γενική μορφή του ν-οστού όρου της ακολουθίας Φιμπονάτσι $u_ν = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{ν+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{ν+1}\right]$ δημοσιεύτηκε το 1843 από τον Ζ. Μπινέ.

Το 13ο αι. ο μεταφραστής και σχολιαστής του Ευκλείδη Καμπανός της Νοβάρα προσθέτει στο Βιβλίο XIII των «Στοιχείων» (1482) μία πρόταση που περιέχει μια αριθμητική απόδειξη της ασυμμετρίας ενός ευθύγραμμου τμήματος και των δύο μερών του που λαμβάνονται από τη διαίρεσή του σε μέσο και άκρο λόγο.

Το 15ο-16ο αι. αναζωογονείται το ενδιαφέρον προς τη διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο σε σχέση με τις εφαρμογές της στην Γεωμετρία και την αρχιτεκτονική. Στο πλαίσιο αυτό εισάγεται ο όρος «χρυσή τομή» από τον Λεονάρντο ντα Βίντσι. Το 1509 εκδίδεται «Η θεϊκή αναλογία» (*Divina proportione*) του Λουκά Πατσόλι (L. Pacioli, 1445-περ. 1514), που αν και είναι ειδικά αφιερωμένη στο πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο, η μαθηματική διαπραγμάτευση του θέματος είναι μάλλον αδύνατη.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο

Πυθαγόρειο θεώρημα

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 1\llcorner$

Γενίκευση Πυθαγορείου

$\hat{A} < 1\llcorner: \ \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta . A\Delta$

$\hat{A} > 1\llcorner: \ \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta . A\Delta$

Προσδιορισμός του είδους τριγώνου ως προς τις γωνίες

Νόμος συνημιτόνων

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$

Υπολογισμός των υψών

$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

Θεώρημα διαμέσων

1ο Θ.Δ.: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$

2ο Θ.Δ.: $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha M\Delta$

Υπολογισμός των διαμέσων τριγώνων

Μετρικές σχέσεις σε κύκλο

- **Θεώρημα τεμνουσών: $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$**
- **Ειδική περίπτωση εφαπτομένης: $PE^2 = PA \cdot PB$**
- **Δύναμη σημείου ως προς κύκλο: $\Delta^P_{(O,R)} = OP^2 - R^2$**

• **Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν $\Delta^P_{(O,R)} > 0$.**

• **Το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν $\Delta^P_{(O,R)} < 0$.**

• **Το P είναι σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν $\Delta^P_{(O,R)} = 0$.**