5 Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

Εισαγωγή

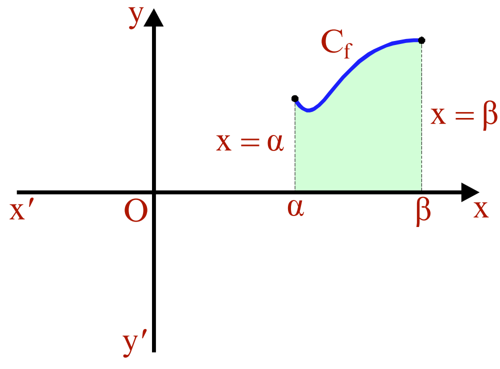
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα, ως έννοια άμεσα συνδεδεμένη με πρακτικά προβλήματα - όπως ο υπολογισμός εμβαδών επιπέδων χωρίων - αλλά και τη μαθηματική του σχέση με την παράγουσα, δηλαδή την αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης.

Μελετούνται οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και οι δύο τρόποι υπολογισμού του: με την ανακάλυψη της παράγουσας και με την παραγοντική ολοκλήρωση.

Τέλος, παρουσιάζεται αναλυτικά ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού επιπέδων χωρίων.

5.1. Η έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος είναι στενά συνδεδεμένη ιστορικά και μαθηματικά με το πρόβλημα του υπολογισμού εμβαδών επιπέδων χωρίων. Το γενικότερο πρόβλημα που τέθηκε ήταν ο υπολογισμός του εμβαδού ενός χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.



Κατά τη σύνδεση των δύο αυτών εννοιών παρουσιάστηκαν αρκετά προβλήματα και δύο κύριες επιλογές:

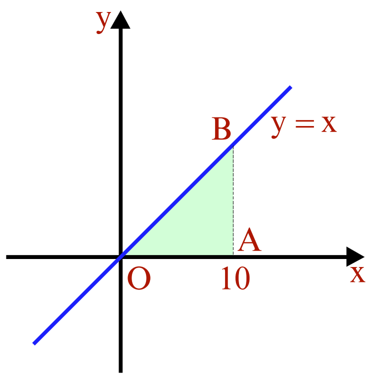
- Η πρώτη επιλογή ήταν να επαναπροσδιορίσουμε την έννοια του εμβαδού, με ακριβέστερο τρόπο, χρησιμοποιώντας την έννοια του ολοκληρώματος.
- Η δεύτερη επιλογή ήταν να δώσουμε έναν ακριβή ορισμό για το ολοκλήρωμα, εκμεταλλευόμενοι την εποπτική ερμηνεία του, με την προοπτική να καταλήξουμε τελικά σε μια έννοια που κατά περίσταση θα ερμηνεύεται με εμβαδόν.

Ακολουθήσαμε τη δεύτερη επιλογή, για δύο λόγους. Η έννοια του ολοκληρώματος είναι καλά ορισμένη, ακόμα και σε περιπτώσεις που το εμβαδόν δε θα σημαίνει τίποτα. Επίσης, όπως θα δούμε, η έννοια του ολοκληρώματος τελικά είναι απλούστερη από αυτή του εμβαδού.

Για να εξακριβώσουμε τι συμβαίνει, ας εξετάσουμε τα ακόλουθα προβλήματα:

Πρόβλημα 1

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.



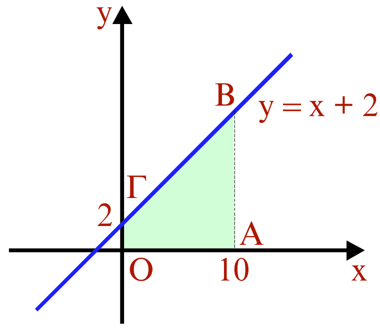
Λύση

'Εχουμε ότι (ΑΒ) = f(10) = 10, οπότε $E = \frac{(OA)(AB)}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$ τ.μ.

Παρατήρηση: Μια παράγουσα της συνάρτησης f(x) = x είναι η $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Αν θεωρήσουμε τη διαφορά των αριθμητικών τιμών της F στα σημεία x = 10 και x = 0 έχουμε ότι: $F(10) - F(0) = \frac{10^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 50$ τ.μ.

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = x + 2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τραπεζίου (ΟΑΒΓ).



Λύση

'Εχουμε ότι (ΟΓ) = 2, (ΑΒ) = f(10) = 10 + 2 = 12, (ΟΑ) = 10, οπότε:

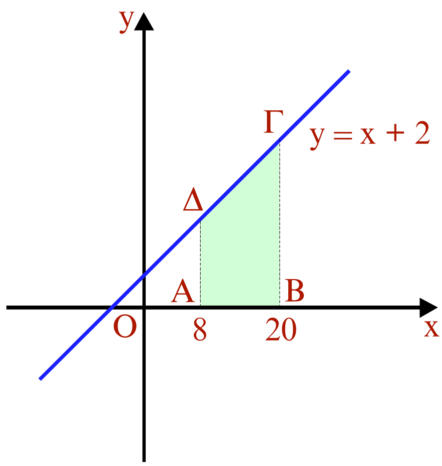
$$E = \frac{(О\Gamma) + (AB)}{2}(OA) = \frac{(2+12)\cdot 10}{2} = 70 \text{ τ.μ.}$$

Παρατήρηση: Μια παράγουσα της συνάρτησης f(x) = x + 2 είναι η $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$. Αν θεωρήσουμε τη διαφορά των αριθμητικών τιμών της F στα σημεία x = 10 και x = 0 έχουμε ότι:

$$F(10) - F(0) = \frac{10^2}{2} + 2{,}10 - \left(\frac{0^2}{2} + 2\cdot 0\right) = 50 + 20 = 70 \text{ τ.μ.}$$

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται πάλι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = x + 2. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τραπεζίου (ΑΒΓΔ).



Λύση

'Εχουμε ότι (ΑΔ) = f(8) = 8 + 2 = 10, (ΒΓ) = f(20) = 20 + 2 = 22, (ΑΒ) = 20 − 8 = 12. Επομένως:

$$E = \frac{(ΑΔ) + (ΒΓ)}{2}(ΑΒ) = \frac{(10 + 22)\cdot 12}{2} = 192 \text{ τ.μ.}$$

Παρατήρηση: Θεωρώντας ξανά τη διαφορά των αριθμητικών τιμών της παράγουσας $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$ της $f(x) = x + 2$ στα σημεία $x = 20$ και $x = 8$, βρίσκουμε: $F(20) - F(8) = \frac{20^2}{2} + 2\cdot 20 - \left(\frac{8^2}{2} + 2\cdot 8\right) = 240 - 48 =$ 192 τ.μ.

Στα προηγούμενα προβλήματα είχαμε τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f και θέλαμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x′x και τις ευθείες $x = α$ και $x = β$, όταν $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [α, β]$. Παρατηρήσαμε ότι αν η F είναι η παράγουσα της f, τότε το ζητούμενο εμβαδόν ήταν: $E = F(β) - F(α)$.

Γενικότερα, αν έχουμε μια συνεχή και θετική συνάρτηση $f: [α, β] \to \mathbb{R}$ με παράγουσα F, ισχύει ότι η διαφορά $F(β) - F(α)$ παραμένει σταθερή και εκφράζει το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f, τον άξονα x′x και τις ευθείες $x = α$ και $x = β$.

Αν γενικεύσουμε την προηγούμενη παρατήρηση για συνεχή συνάρτηση $f: [α, β] \to \mathbb{R}$, όχι απαραίτητα θετική τότε προκύπτει το ορισμένο ολοκλήρωμα:

Ορισμός: 'Εστω συνεχής συνάρτηση $f: [α, β] \to \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F. Τη σταθερή διαφορά $F(β) - F(α)$ ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α έως το β και το συμβολίζουμε με:

$$\int_α^β f(x)\, dx$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\int_α^β f(x)\, dx = [F(x)]_α^β = F(β) - F(α).$$

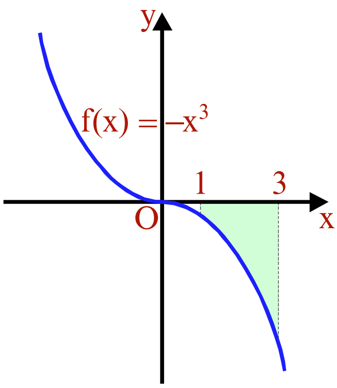
Επίσης, ισχύει ότι μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β] αν είναι συνεχής στο [α, β].

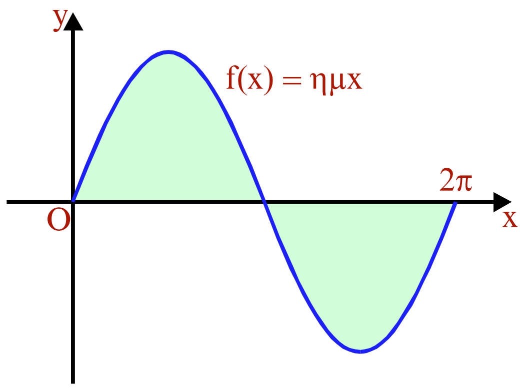
Παρατήρηση: Με βάση τον προηγούμενο ορισμό, παρατηρούμε ότι η έννοια του ολοκληρώματος είναι γενικότερη από αυτή του εμβαδού. Το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης μπορεί να είναι αρνητικό, π.χ.

$$\int_1^3 (-x^3)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = -\frac{81}{4} + \frac{1}{4} = -20$$

ακόμα και ίσο με το μηδέν, π.χ.

$$\int_0^{2\pi} \eta\mu x\, dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{2\pi} = -\sigma\upsilon\nu 2\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = -1 + 1 = 0$$





ενώ το εμβαδόν στην πρώτη περίπτωση είναι ίσο με 20 και στη δεύτερη με 4, όπως θα δούμε παρακάτω.

5.2. Ιδιότητες του Ορισμένου Ολοκληρώματος

'Εστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β]. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

(i) $\int_\alpha^\beta c\, dx = c(\beta - \alpha)$, όπου c σταθερά

(ii) $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\, dx + \int_\gamma^\beta f(x)\, dx$, όπου $\alpha < \gamma < \beta$

(iii) $\int_\alpha^\alpha f(x)\, dx = 0$

(iv) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$

(v) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

'Αμεσα πορίσματα της (v) είναι ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \text{ και}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

(vi) Αν $f(x) \geqslant 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geqslant 0$

(vii) Αν $f(x) \geqslant g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geqslant \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_{0}^{4} 2x\,dx$ (β) $\displaystyle\int_{0}^{1} 3x^2\,dx$ (γ) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι $(x^2)' = 2x$ άρα $\displaystyle\int_{0}^{4} 2x\,dx = [x^2]_0^4 = 16 - 0 = 16.$

(β) Γνωρίζουμε ότι $(x^3)' = 3x^2$ άρα $\displaystyle\int_{0}^{1} 3x^2\,dx = [x^3]_0^2 = 8 - 0 = 8.$

(γ) Γνωρίζουμε ότι $(\sqrt{t})' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ άρα $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = [\sqrt{t}]_1^4 = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1.$

Εφαρμογή 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \eta\mu u \, du$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $(\sigma\upsilon\nu u)' = -\eta\mu u$, άρα $(-\sigma\upsilon\nu u)' = \eta\mu u$, οπότε:

$$\int_0^{\pi} \eta\mu u \, du = [-\sigma\upsilon\nu u]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 2$$

Εφαρμογή 3

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = (x-1)e^x$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_0^1 xe^x \, dx$.

Λύση

Είναι: $f'(x) = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$.

'Αρα η παράγουσα της xe^x είναι η $f(x)$, επομένως:

$$\int_0^1 xe^x \, dx = [(x-1)e^x]_0^1 = (1-1)e^1 - (0-1)e^0 = 1$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (2x + e^x) \, dx$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\int_0^1 (2x + e^x) \, dx = \int_0^1 2x \, dx + \int_0^1 e^x \, dx = [x^2]_0^1 + [e^x]_0^1 = (1-0) + (e-1) = e$$

Εφαρμογή 5

Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 (x-2) \, dx \leqslant 0$.

Λύση

Αν το x ανήκει στο [1, 2], τότε $1 \leqslant x \leqslant 2$, άρα $x - 2 \leqslant 0$, οπότε:

$$\int_1^2 (x-2)\,dx \leqslant 0$$

Εφαρμογή 6

Να υπολογισθεί το $\int_{-1}^{1} |x|\,dx$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0 καθώς και στα διαστήματα [–1, 0), (0, 1] ως πολυωνυμική. Επομένως η f είναι συνεχής στο [–1, 1], οπότε είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό. Τότε ισχύει:

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Εφαρμογή 7

Ο αριθμός των εντόμων (δάκος) μιας ελαιοπαραγωγικής περιοχής μεταβάλλεται μετά τη ρίψη εντομοκτόνου με ρυθμό $r'(t) = -e^t$ χιλιάδες έντομα ανά ημέρα. Αν ο αρχικός αριθμός των εντόμων είναι 1.000.000, σε τι ποσοστό (%) θα έχει μειωθεί σε 5 ημέρες;

Λύση

'Εχουμε ότι: $r(x) - r(0) = -\int_0^x e^t\,dt$

Αλλά $(e^t)' = e^t$ οπότε παράγουσα της e^t είναι η e^t. 'Αρα:

$$r(x) - r(0) = -\int_0^x e^t\,dt = [-e^t]_0^x = -e^x + e^0 = 1 - e^x$$

και εφόσον $r(0) = 1000$ θα έχουμε $r(x) = 1001 - e^x$, άρα τα έντομα που υπάρχουν την $5^η$ μέρα είναι $r(5) = 1000 - e^5 \simeq 1001 - 148 = 853$ χιλιάδες έντομα. Το ποσοστό μείωσης θα είναι 148 επί τις χιλίοις ή 14,8%.

Εφαρμογή 8

Η παραγωγή του εργοστασίου τα "Ωραία νερά" μεταβάλλεται με ρυθμό $g'(t) = \frac{-1}{t^2}$ εκατοντάδες φιάλες ανά ημέρα και η παραγωγή της πρώτης μέρας είναι 2000 φιάλες. Πόσες φιάλες θα έχει παράγει το εργοστάσιο στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας;

Λύση

'Εχουμε ότι: $g(x) - g(1) = \int_1^x \frac{-1}{t^2}\,dt$

Αλλά $\left(\frac{1}{t}\right)' = \frac{-1}{t^2}$ οπότε παράγουσα της $\frac{-1}{t^2}$ είναι η $\frac{1}{t}$. Αρα:

$$g(x) - g(1) = \int_1^x \frac{-1}{t^2}\,dt = \left[\frac{1}{t}\right]_1^x = \frac{1}{x} - \frac{1}{1} = \frac{1}{x} - 1$$

Οπότε $g(x) - 20 = \frac{1}{x} - 1$ ή $g(x) = 19 + \frac{1}{x}$ εκατοντάδες φιάλες την ημέρα.

Το σύνολο της παραγωγής της από την $1^η$ ως την $5^η$ ημέρα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^5 \left(19 + \frac{1}{x}\right)dx = [19x + \ln x]_1^5 = 19\cdot 5 + \ln 5 - 19 - \ln 1 = 76 + 1{,}61 \text{ εκ. φιάλες}$$

ή 7600 + 161 = 7761 φιάλες.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 4x^3\,dx$.

'Ασκηση 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^2 (2x + 1)\,dx$.

'Ασκηση 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$.

'Ασκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{2\pi} συν3x\,dx$.

'Ασκηση 5

Να αποδειχθεί ότι $\int_{0}^{1} (x-1)\,dx \leqslant 0$.

'Ασκηση 6

Να αποδειχθεί ότι $\int_{0}^{1} x^2\,dx \geqslant \int_{0}^{1} x^3\,dx$.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_{0}^{1} \dfrac{x}{e^x}\,dx$.

'Ασκηση 2

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_{0}^{1} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

'Ασκηση 3

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = -x + x\ln x,\ x > 0$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_{1}^{e} \ln x\,dx$.

'Ασκηση 4

Αν $f(x) = xe^{-x}$ και $g(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$, να βρεθούν τα α, β, έτσι ώστε η g να είναι παράγουσα της f και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

'Ασκηση 5

Αν $f'(x) = 2x$ και $f(1) = 0$, να υπολογισθεί το $f(0)$.

'Ασκηση 6

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = 0$.

5.3. Υπολογισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος

- **Ανακάλυψη της Παράγουσας**

Από την § 5.1 έγινε φανερό ότι για να υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα αρκεί να υπολογίσουμε την παράγουσα της ολοκληρώσιμης συνάρτησης. 'Αμεσα, από την § 4.6, χρησιμοποιώντας τον πίνακα παραγουσών βασικών συναρτήσεων, προκύπτει ότι:

- $\int_\alpha^\beta 1\,dx = [x]_\alpha^\beta = \beta - \alpha$
- $\int_\alpha^\beta x^\kappa\,dx = \left[\dfrac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right]_\alpha^\beta = \dfrac{\beta^{\kappa+1} - \alpha^{\kappa+1}}{\kappa+1}$, με $\kappa \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $\beta > \alpha > 0$
- $\int_\alpha^\beta \dfrac{1}{x}\,dx = [\ln x]_\alpha^\beta = \ln\beta - \ln\alpha$, $\beta > \alpha > 0$
- $\int_\alpha^\beta e^x\,dx = [e^x]_\alpha^\beta = e^\beta - e^\alpha$
- $\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu x\,dx = [\eta\mu x]_\alpha^\beta = \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$
- $\int_\alpha^\beta \eta\mu x\,dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_\alpha^\beta = -\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τον πίνακα παραγουσών σύνθετων συναρτήσεων, έχουμε ότι:

- $$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{g'(x)}{g^2(x)}\,dx = \left[-\frac{1}{g(x)}\right]_{\alpha}^{\beta} = -\frac{1}{g(\beta)} + \frac{1}{g(\alpha)},$$

  όπου $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

- $$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\,dx = [2\sqrt{g(x)}]_{\alpha}^{\beta} = 2\,(\sqrt{g(\beta)} - \sqrt{g(\alpha)}),$$

  όπου $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

- $$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = [\ln(g(x))]_{\alpha}^{\beta} = \ln(g(\beta)) - \ln(g(\alpha)),$$

  όπου $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

- $$\int_{\alpha}^{\beta} g^{\kappa}(x)g'(x)\,dx = \left[\frac{(g(x))^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{(g(\beta))^{\kappa+1} - (g(\alpha))^{\kappa+1}}{\kappa+1},$$

  όπου $\kappa \in \mathbb{R} - \{-1\}$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

- $$\int_{\alpha}^{\beta} e^{g(x)}g'(x)\,dx = [e^{g(x)}]_{\alpha}^{\beta} = e^{g(\beta)} - e^{g(\alpha)}$$

- **Παραγοντική Ολοκλήρωση**

'Ενας ιδιαίτερα χρήσιμος κανόνας ολοκλήρωσης είναι η παραγοντική ολοκλήρωση ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Η παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει εύκολα αν ολοκληρώσουμε τον τύπο της παραγώγου του γινομένου δύο συναρτήσεων.

'Εστω δύο συνεχείς συναρτήσεις f, g: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f', g'. Τότε ισχύει ότι:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

και ολοκληρώνοντας κατά μέλη:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x)g(x))'\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)\,dx \quad \text{ή}$$

$$[f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)\,dx \quad \text{ή}$$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)\,dx}$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^2 x^5\,dx$ (β) $\int_1^8 4x^{\frac{1}{3}}\,dx$ (γ) $\int_1^{27} 2x^{-\frac{1}{3}}\,dx$ (δ) $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

Λύση

(α) 'Εχουμε ότι:

$$\int_1^2 x^5\,dx = \left[\frac{x^{5+1}}{5+1}\right]_1^2 = \left[\frac{x^6}{6}\right]_1^2 = \frac{64}{6} - \frac{1}{6} = \frac{21}{2}$$

(β) 'Εχουμε ότι:

$$\int_1^8 4x^{\frac{1}{3}}\,dx = \left[4\,\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_1^8 = \left[3x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 = [3(\sqrt[3]{x})^4]_1^8 = 45$$

(γ) 'Εχουμε ότι:

$$\int_1^{27} 2x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \left[2\,\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_1^{27} = \left[3x^{\frac{2}{3}}\right]_1^{27} = [3(\sqrt[3]{x})^2]_1^{27} = 24$$

(δ) 'Εχουμε ότι:

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \int_0^8 x^{\frac{1}{3}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_0^8 = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^8 = \left[\frac{3}{4}(\sqrt[3]{x})^4\right]_0^8 = 12$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^8 (x + x^{\frac{1}{3}})\,dx$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\int_1^8 (x + x^{\frac{1}{3}})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_1^8 = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}(\sqrt[3]{x})^4\right]_1^8 =$$

$$\frac{64}{2} + \frac{3}{4}(\sqrt[3]{8})^4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(\sqrt[3]{1})^4\right) = \frac{171}{4}$$

Εφαρμογή 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}[\ln(x^3+1)]_0^1 = \frac{\ln 2}{3}$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συνx}\, e^{\text{ημx}}\,dx$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συνx}\, e^{\text{ημx}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{ημx})'\, e^{\text{ημx}}\,dx = [e^{\text{ημx}}]_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1$$

Εφαρμογή 5

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{εφx}\,dx$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\eta\mu x) \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\, dx =$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sigma\upsilon\nu x)' \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\, dx = -[\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}) + \ln(\sigma\upsilon\nu 0) =$$

$$-\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = -\ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{2}$$

Εφαρμογή 6

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x\, dx$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\sigma\upsilon\nu x)'\, dx = [-x\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'(-\sigma\upsilon\nu x)\, dx =$$

$$-\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + 0\cdot\sigma\upsilon\nu 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x\, dx = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Εφαρμογή 7

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^{e} x^3 \ln x\, dx$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\int_1^e x^3 \ln x\, dx = \int_1^e \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}(\ln x)'\, dx =$$

$$\frac{e^4}{4}\ln e - \frac{1}{4}\ln 1 - \int_1^e \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\int_1^e x^3\, dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^e =$$

$$\frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4e^4 - e^4 + 1}{16} = \frac{3e^4 + 1}{16}$$

Εφαρμογή 8

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^e \ln x\, dx$.

Λύση

Ισχύει ότι:

$$\int_1^e \ln x\, dx = \int_1^e (x)' \ln x\, dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'\, dx =$$

$$e\cdot\ln e - 1\cdot\ln 1 - \int_1^e x\frac{1}{x}\, dx = e - \int_1^e 1\, dx = e - [x]_1^e = e - (e-1) = 1$$

Εφαρμογή 9

Στην περιοχή τα "Γαλάζια νερά" έχει ξαφνικά διαρροή πετρελαίου ένα δεξαμενόπλοιο και σχηματίζει πετρελαιοκηλίδα που έχει κυκλικό σχήμα. Αν η ακτίνα r της κηλίδας αυξάνει με ρυθμό $r'(t) = \frac{30}{\sqrt{2t+4}}$ μέτρα ανά t λεπτά από τη στιγμή που συνέβη το ατύχημα, να βρεθεί μια συνάρτηση για την ακτίνα της πετρελαιοκηλίδας για κάθε χρονική στιγμή t. Πόσο μεγάλη είναι η κηλίδα μετά από 16 λεπτά; (Υποτίθεται ότι δεν υπάρχει ρύπανση πριν την διαρροή).

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$r(x) - r(0) = \int_0^x 30(2t+4)^{-\frac{1}{2}}\, dt = 15\int_0^x (2t+4)'(2t+4)^{-\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$15\left[\frac{(2t+4)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^x = 15\left[\frac{(2t+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^x = 30[\sqrt{2t+4}]_0^x = 30\sqrt{2x+4} - 60$$

Αφού $r(0) = 0$, προκύπτει ότι:

$$r(x) = 30\sqrt{2x+4} - 60 \quad ή \quad r(t) = 30\sqrt{2t+4} - 60$$

Σε 16 λεπτά η απόσταση θα είναι:

$$s = r(16) = 30\sqrt{2\cdot 16+4} - 60 = 30\cdot 6 - 60 = 120 \text{ μέτρα}$$

Εφαρμογή 10

Κατά τον πρώτο χρόνο εμφάνισης στην αγορά της μουσικής συλλογής "Αθάνατα Τραγούδια" πουλήθηκαν 2000 CD. Έκτοτε, οι πωλήσεις μεταβάλλονται με ρυθμό $f'(t) = 2000(3 - 2e^{-t})$ CD το χρόνο. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των CD αυτής της μουσικής συλλογής που πωλήθηκαν τα 5 πρώτα χρόνια.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x 2000(3 - 2e^{-t})\,dt = 2000\int_0^x (3 - 2e^{-t})\,dt =$$

$$2000\,[3t + 2e^{-t}]_0^x = 2000(3x + 2e^{-x}) - 2000(0 + 2\cdot 1) =$$

$$6000x + 4000e^{-x} - 4000$$

Όμως $f(0) = 2000$, οπότε:

$$f(x) - 2000 = 6000x + 4000e^{-x} - 4000 \quad \text{ή}$$

$$f(x) = 6000x + 4000e^{-x} - 2000 \quad \text{ή} \quad f(x) = 6000x + 4000e^{-x} - 2000$$

Τα πέντε πρώτα χρόνια οι πωλήσεις δίνονται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^5 (6000t + 4000e^{-t} - 2000)\,dt = [3000t^2 - 4000e^{-t} - 2000t]_0^5 =$$

$$3000\cdot 25 - 4000e^{-5} - 10000 + 4000 = 69000 - 4000e^{-5} \simeq 68973 \text{ CD}$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 (u + 1)\,du$ (β) $\int_{-1}^1 (t^2 - 1)\,dt$

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^2 \left(t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt$ (β) $\int_1^9 \frac{x + 1}{x}\,dx$

'Ασκηση 3

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x}\,dx$ (β) $\int_1^2 \frac{2u^2+u+1}{u}\,du$

'Ασκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt$.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

'Ασκηση 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x(x^2+1)^{1999}\,dx$.

'Ασκηση 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

'Ασκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$.

'Ασκηση 5

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_e^{e^4} \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

'Ασκηση 6

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{e}^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x}\, dx$.

'Ασκηση 7

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x\, dx$.

'Ασκηση 8

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{\pi} e^x\, \eta\mu x\, dx$.

Πρακτικές εφαρμογές

'Ασκηση 1

Η γραμματεία σπουδαστών του Βαλκανικού Πανεπιστήμιου υπολογίζει ότι ο αριθμός των εγγραφών των σπουδαστών στις μεταπτυχιακές σπουδές αυξάνεται με ρυθμό $N'(t) = 2000(1 + 0{,}2t)^{-\frac{3}{2}}$ σε t χρόνια από σήμερα. Αν ο αριθμός των εγγεγραμμένων φοιτητών είναι 1000, βρείτε ένα τύπο που προσδιορίζει τον αριθμό των εγγραφών σε t χρόνια από σήμερα. Ποιός θα είναι ο συνολικός αριθμός των φοιτητών που θα εγγραφούν στη σχολή σε 5 χρόνια;

'Ασκηση 2

Σε μια χώρα, ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής των γυναικών, κατά τη γέννησή τους, αλλάζει με ρυθμό $g'(t) = \frac{5{,}45218}{(1 + 1{,}09t)^{0{,}9}}$ χρόνια ανά έτος, όπου t είναι τα έτη και το t = 0 αντιστοιχεί στο έτος 1900. Βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει τον αναμενόμενο μέσο όρο ζωής των γυναικών σε χρόνια κατά τη γέννησή τους, αν ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής κατά το έτος 1900 ήταν 50,02 χρόνια. Ποιός θα είναι ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής μιας γυναίκας που θα γεννηθεί το 2000;

'Ασκηση 3

Ο μέσος σπουδαστής που είναι εγγεγραμμένος σε σεμινάριο στενογραφίας διάρκειας 20 εβδομάδων, μαθαίνει με ρυθμό $N'(t) = 6e^{-0,05t}$ $(0 \leqslant t \leqslant 20)$, όπου $N'(t)$ ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των λέξεων που γράφει ανά λεπτό ο σπουδαστής μετά από t εβδομάδες στο σεμινάριο. Αν υποθέσουμε ότι ο μέσος σπουδαστής ξεκινάει το σεμινάριο με 60 λέξεις το λεπτό, βρείτε τη συνάρτηση $N(t)$ που εκφράζει την ταχύτητα των σπουδαστών μετά από t εβδομάδες.

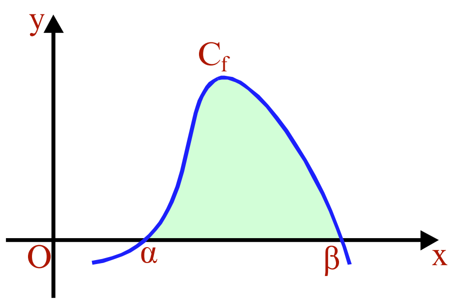
'Ασκηση 4

Χρησιμοποιώντας στοιχεία από μία κτηνιατρική κλινική, οι κτηνίατροι υπολογίζουν ότι το μέσο ύψος μιας ράτσας σκυλιών μεταβάλλεται με ρυθμό $h'(t) = \dfrac{52,8706e^{-0,32277t}}{(1+2,449e^{-0,3277t})^2}$ εκατοστά το μήνα, όπου το ύψος του σκυλιού μετριέται σε εκατοστά και η ηλικία t σε μήνες από τη γεννησή του. Βρείτε συνάρτηση $h(t)$ που εκφράζει το μέσο όρο ύψους ενός σκύλου t μηνών, αν το μέσο ύψος της ράτσας αυτής κατά τη γέννηση είναι 19,4 εκατοστά. Πόσο είναι το μέσο ύψος ενός σκύλου 8 μηνών;

5.4. Υπολογισμός Εμβαδού Επιπέδων Χωρίων

- **Υπολογισμός του εμβαδού χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και τον άξονα x′x**

(Α) 'Εστω μια ολοκληρώσιμη θετική συνάρτηση f. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική της παράσταση C_f, τον άξονα x′x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, με $\alpha < \beta$, ταυτίζεται όπως είδαμε με το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f, δηλαδή:

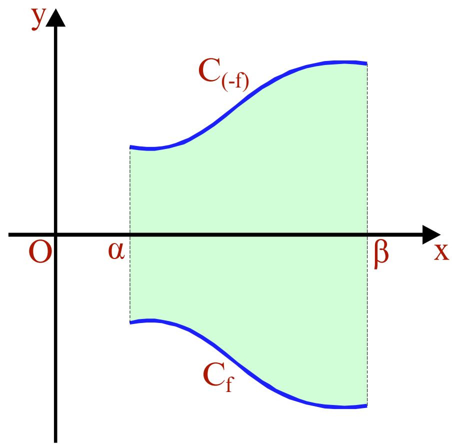


$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

Στην περίπτωση που δε δίνονται οι ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, θα εννοείται ότι η C_f τέμνει τον x′x σε διάφορα σημεία ανάμεσα στα οποία περικλείεται το δεδομένο χωρίο (βλ. Σχήμα).

(Β) Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση f είναι αρνητική, τότε θεωρούμε τη συμμετρική της συνάρτηση ως προς τον άξονα x′x: (–f) η οποία είναι θετική. Το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου παραμένει αμετάβλητο ως προς τις συμμετρίες, οπότε:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} [-f(x)]\, dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$



(Γ) Αν τέλος η ολοκληρώσιμη συνάρτηση f αλλάζει πρόσημο, τότε στα υποδιαστήματα του [α, β] που είναι θετική παραμένει ως έχει, ενώ στα υποδιαστήματα που είναι αρνητική θεωρούμε την (–f). Επομένως, το εμβαδόν ισούται με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης:

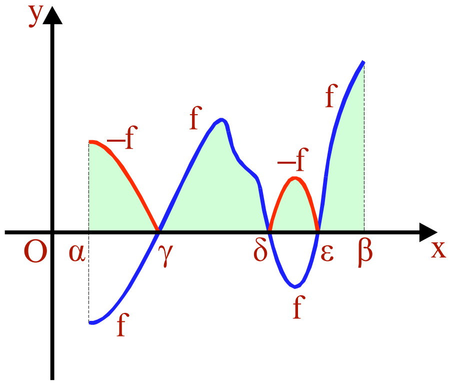
$$g = \begin{cases} f & \text{αν} \quad f \geqslant 0 \\ -f & \text{αν} \quad f < 0 \end{cases} = |f|.$$

Δηλαδή, ο γενικός τύπος εύρεσης του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας τυχαίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης, τον άξονα x′x και τις ευθείες x = α και x = β είναι ο ακόλουθος:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\, dx$$

Π.χ. το εμβαδόν για τη συνάρτηση f με γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα δίνεται από τον τύπο:

$$E = \int_{\alpha}^{\gamma} [-f(x)]\, dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\, dx + \int_{\delta}^{\varepsilon} [-f(x)]\, dx + \int_{\varepsilon}^{\beta} f(x)\, dx$$

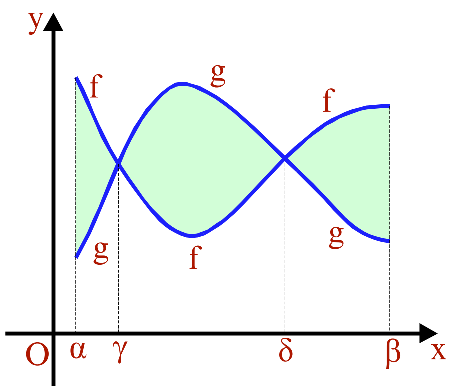


- **Υπολογισμός του εμβαδού χωρίου που περικλείεται από δύο γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων**

Η περίπτωση αυτή είναι η γενική περίπτωση σχηματισμού ενός επιπέδου χωρίου. Αυτό που μας ενδιαφέρει δεν είναι το πρόσημο της καθεμιάς συνάρτησης, αλλά η σχετική τους διάταξη, δηλαδή το πρόσημο της διαφοράς τους. Αν δίνονται λοιπόν δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f, g: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ και θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ καταλήγουμε όμοια με την προηγούμενη παράγραφο στον τύπο:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\, dx$$

Πιο αναλυτικά, έχουμε ότι στα διαστήματα που η f είναι μεγαλύτερη από τη g θεωρούμε το ολοκλήρωμα της $f - g$, ενώ στα διαστήματα όπου η g είναι μεγαλύτερη της f θεωρούμε το ολοκλήρωμα της $g - f$. Για παράδειγμα, στο παρακάτω Σχήμα έχουμε ότι:



$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\, dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\gamma} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{\gamma}^{\delta} [g(x) - f(x)]\, dx + \int_{\delta}^{\beta} [f(x) - g(x)]\, dx$$

Στην περίπτωση που δε δίνονται τα άκρα ολοκλήρωσης, δηλαδή οι ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, θα εννοείται ότι οι C_f και C_g έχουν κοινά σημεία, τα οποία θα αποτελούν τα άκρα ολοκλήρωσης.

Εφαρμογές

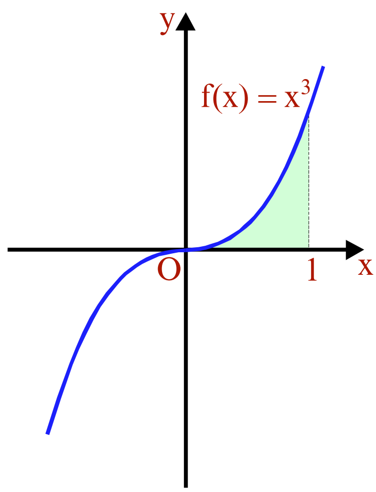
Εφαρμογή 1

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$.

Λύση

Αφού είναι $x^3 \geqslant 0$ για κάθε x στο διάστημα [0, 1], τότε:

$$E = \int_0^1 x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}$$

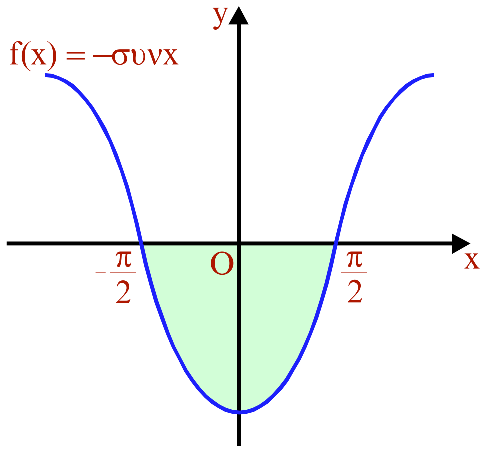


Εφαρμογή 2

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -\sigma\upsilon\nu x$, τις ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ και τον άξονα $x'x$.

Λύση

Εφόσον $-\sigma\upsilon\nu x \leqslant 0$ για κάθε x στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, θα έχουμε ότι:



$$E = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sigma\upsilon\nu x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x\, dx =$$

$$\Big[\eta\mu x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \eta\mu\frac{\pi}{2} - \eta\mu(-\frac{\pi}{2}) =$$

$$1 - (-1) = 2$$

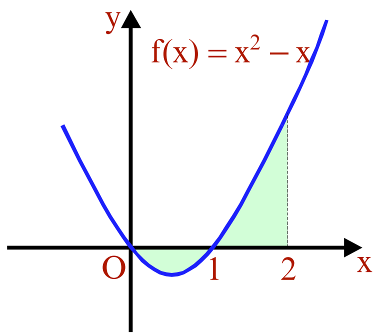
Εφαρμογή 3

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x$, τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$ και τον άξονα $x'x$.

Λύση

Είναι $f(x) = x^2 - x = x(x-1)$ και:

- Αν $0 \leqslant x \leqslant 1$ τότε $f(x) \leqslant 0$.
- Αν $1 \leqslant x \leqslant 2$ τότε $f(x) \geqslant 0$.



Οπότε:

$$E = -\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx =$$

$$-\int_0^1 (x^2 - x)\,dx + \int_1^2 (x^2 - x)\,dx =$$

$$-\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2x^2 - 1$.

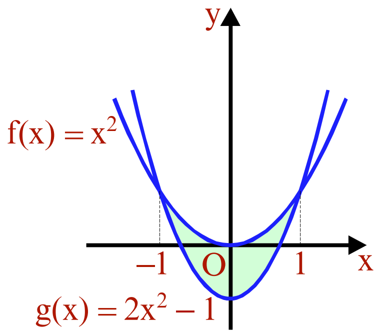
Λύση

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο συναρτήσεων:

$$h(x) = g(x) - f(x) = 2x^2 - 1 - x^2 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Ισχύει ότι $h(x) \leqslant 0$ για κάθε x στο διάστημα $[-1, 1]$, οπότε το εμβαδόν υπολογίζεται ως εξής:

$$E = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$



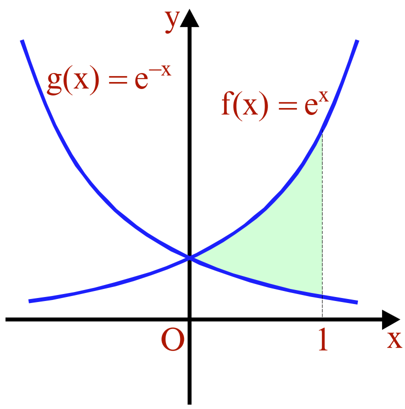
Εφαρμογή 5

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Λύση

Θεωρούμε την $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - e^{-x}$ και προκύπτει ότι $h(x) > 0$ αν και μόνο αν $e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. 'Ομοια, $h(x) < 0$ αν και μόνο αν $x < 0$, ενώ $h(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x = 0$ και το εμβαδόν περιορίζεται και από την ευθεία $x = 1$, οπότε έχουμε ότι:



$$E = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 |e^x - e^{-x}|\,dx$$

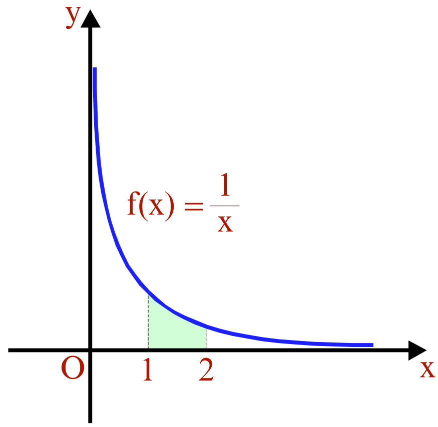
και εφόσον $e^x - e^{-x} \geqslant 0$ για $x \in [0, 1]$ έχουμε ότι:

$$E = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx = [e^x + e^{-x}]_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

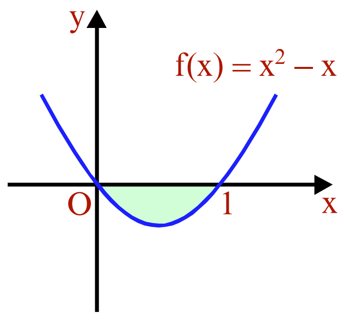
'Ασκηση 1

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ και τον άξονα $x'x$.



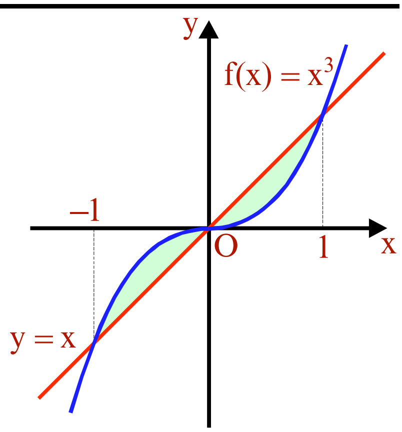
'Ασκηση 2

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - x$ και τον άξονα $x'x$.



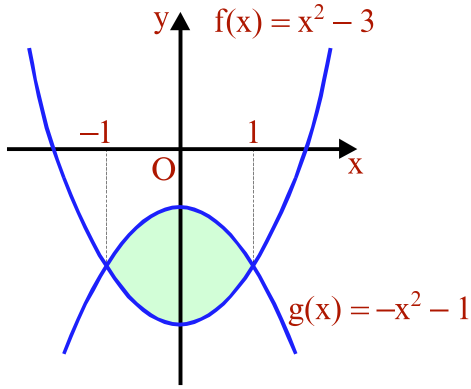
'Ασκηση 3

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ και την ευθεία με εξίσωση $y = x$.



'Ασκηση 4

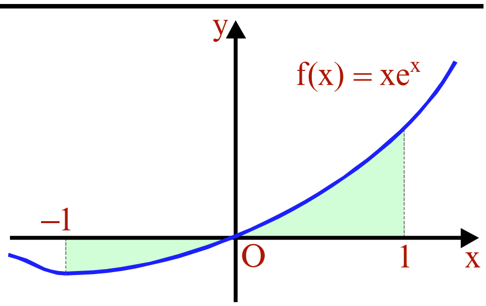
Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3$ και $g(x) = -x^2 - 1$.



Σύνθετες Ασκήσεις

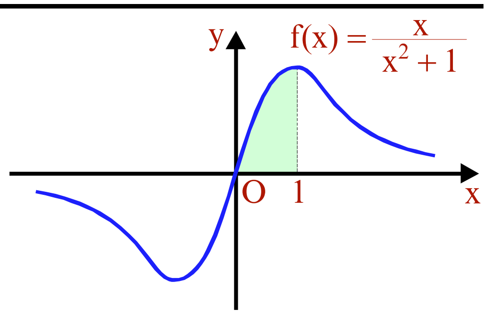
'Ασκηση 1

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = xe^x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$, $x = 1$.



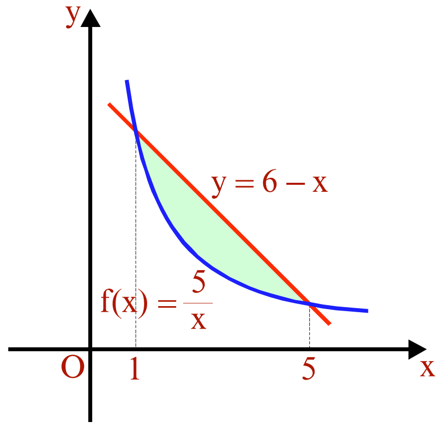
'Ασκηση 2

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$.



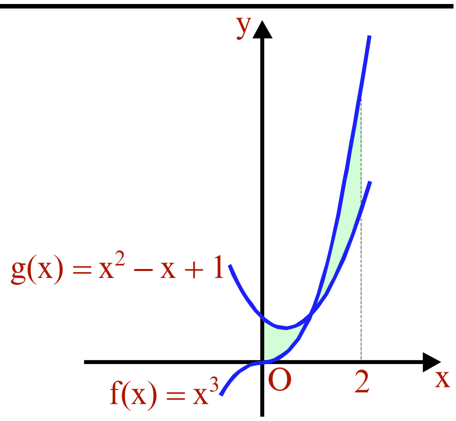
'Ασκηση 3

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{5}{x}$ και την ευθεία με εξίσωση $y = 6 - x$.



'Ασκηση 4

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις συναρτήσεις $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 - x + 1$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$.



Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

'Ασκηση 1

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$, $x > 1$ και κατόπιν να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$.

'Ασκηση 2

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_0^1 (x - 1)^{24}\,dx$ (β) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(3x - 4)^3}\,dx$

'Ασκηση 3

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$ (β) $\int_0^1 \frac{x}{2x+1}\,dx$

'Ασκηση 4

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^2 (2x-1)^{11}\,dx$ (β) $\int_0^1 e^{3x+2}\,dx$

'Ασκηση 5

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}}\,dx$.

'Ασκηση 6

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}\,dx$.

'Ασκηση 7

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{1+\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$.

'Ασκηση 8

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^e x^2 \ln(5x)\,dx$ (β) $\int_0^\pi x\,\eta\mu(2x)\,dx$

'Ασκηση 9

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

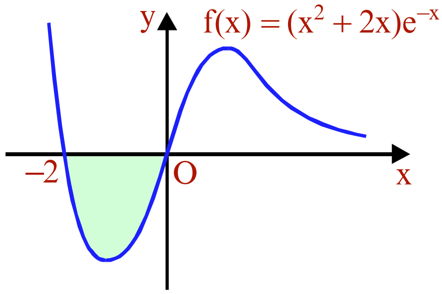
(α) $\int_0^2 |1-e^x|\,dx$ (β) $\int_0^{2\pi} |\sigma\upsilon\nu x|\,dx$

'Ασκηση 10

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} συν^3x\, dx$ χρησιμοποιώντας τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2x + συν^2x = 1$ ή άλλο τρόπο.

'Ασκηση 11

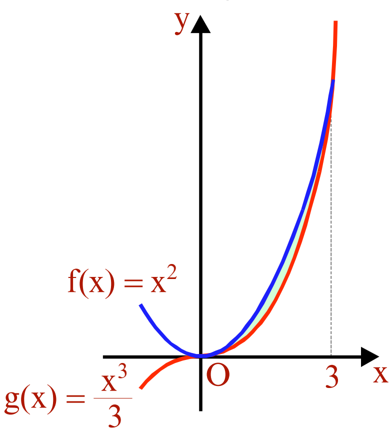
Να υπολογισθεί το εμβαδόν που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ και τον άξονα $x'x$.

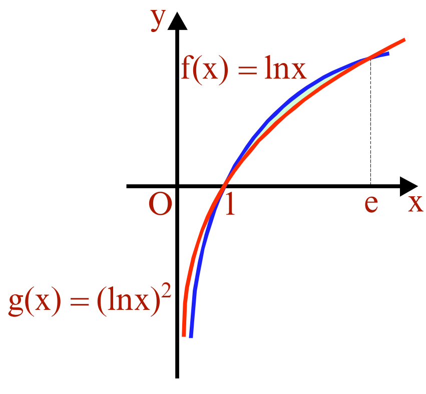


'Ασκηση 12

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g:

(α) $f(x) = x^2,\ g(x) = \dfrac{x^3}{3}$ (β) $f(x) = \ln x,\ g(x) = (\ln x)^2$





'Ασκηση 13

Για ένα δοχείο με νερό ύψους h = 3m που αδειάζει μέσω ενός ανοίγματος στον πυθμένα, γνωρίζουμε ότι ισχύει η ακόλουθη εξίσωση για τη μεταβολή του ύψους h σε σχέση με το χρόνο t:

$$h'(t) = -\frac{\sqrt{h(t)}}{727}$$

Σε πόσο χρόνο το ύψος του νερού θα φτάσει το 1 m;

'Ασκηση 14

Το εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής ηλεκτρικών λαμπτήρων χαμηλής κατανάλωσης σε ένα εργοστάσιο δίνεται από τη συνάρτηση $K(x)$ και ο ρυθμός μεταβολής του κόστους είναι $K'(x) = 0{,}000006x^2 - 0{,}0006x + 2$ σε χιλιάδες δραχμές όπου x είναι ο αριθμός των λαμπτήρων που παράγονται. Αν το σταθερό εβδομαδιαίο κόστος είναι 100000 δραχμές, να υπολογισθεί το συνολικό κόστος για τη παραγωγή 500 λαμπτήρων.

'Ασκηση 15

Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής της μονάδας συγκεκριμένου είδους γυναικείου καλλυντικού δίνεται από τη σχέση $P'(x) = \dfrac{-250x}{(16 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$ όπου x είναι η ποσότητα της ημερήσιας ζήτησης του προϊόντος σε εκατοντάδες. Να βρεθεί η συνάρτηση της ζήτησης, αν η η τιμή κάθε μονάδος είναι 50 δρχ. όταν η ζήτηση είναι 300 μονάδες προϊόντος.

Ανακεφαλαίωση

- Ορισμένο Ολοκλήρωμα και Παράγουσα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

- Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος:

(i) $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta - \alpha)$, όπου c σταθερά

(ii) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$, όπου $\alpha < \gamma < \beta$

(iii) $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

(iv) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$

(v) $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \mu\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(vi) Αν $f(x) \geqslant 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geqslant 0$.

(vii) Αν $f(x) \geqslant g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geqslant \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

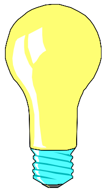
- Υπολογισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος:
  - **Ανακάλυψη της Παράγουσας:**
    - Πίνακας παραγουσών βασικών συναρτήσεων
    - Πίνακας παραγουσών σύνθετων συναρτήσεων
  - **Παραγοντική Ολοκλήρωση:**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)\,dx$$

- Υπολογισμός εμβαδού επιπέδων χωρίων:
  - C_f, $x'x$, $x = \alpha$, $x = \beta$: $E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\, dx$
  - C_f, C_g, $x = \alpha$, $x = \beta$: $E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\, dx$

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Πώς συνδέεται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με τον υπολογισμό εμβαδού και πώς με την παράγουσα;
2. Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι επέκταση του εμβαδού ή το εμβαδον επέκταση του ολοκληρώματος;
3. Μια συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη;
4. Ποιές οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;
5. Σε ποιές περιπτώσεις χρησιμοποιείται η παραγοντική ολοκλήρωση και σε ποιές η ανακάλυψη της παράγουσας;
6. Γιατί ένα χωρίο που περικλείεται από δύο γραφικές παραστάσεις αποτελεί τη γενική περίπτωση σχηματισμού ενός επιπέδου χωρίου;
7. Αν δε δίνονται τα άκρα ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός επιπέδου χωρίου, πώς είναι δυνατόν να τα προσδιορίσουμε;
8. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης που έχει ορισμένο ολοκλήρωμα ίσο με μηδέν και δεν είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν.
9. Τι συμπεραίνετε για μια συνάρτηση η οποία έχει ορισμένο ολοκλήρωμα ίσο με το μηδέν και είναι θετική;
10. Πώς αποδεικνύεται η παραγοντική ολοκλήρωση;



Υποδείξεις για τη λύση των Ασκήσεων

Κεφάλαιο 1: *Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα*

§ 1.1 – 1.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. π.χ. $\beta_{23} = \frac{1}{2}(\alpha_{23} + \alpha_{32})$.
2. 'Ολα τα στοιχεία πάνω απ' την κύρια διαγώνιο είναι 0.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. π.χ. $\alpha_{23} = \min\{2, 3\} = 2$.
   Θυμίζουμε ότι το άθροισμα των ν-πρώτων όρων Αριθμητικής προόδου είναι $S_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\nu}{2}$.
2. (α) Απλό.
   (β) Αν εξαιρέσουμε τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου τότε είναι τα μισά.
   (γ) 'Οχι (γιατί;)

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Η συμπλήρωση να γίνει με χρήση υπολογιστή. Παρατηρούμε ότι το νερό βράζει σε μικρότερες των 100°C θερμοκρασίες σε μεγάλα υψόμετρα (χαμηλότερης ατμοσφαιρικής πίεσης).
2. (α), (β) Η συμπλήρωση να γίνει με χρήση υπολογιστή. Παρατηρήστε ότι οι διαφορές ανάμεσα στα μοντέλα μέτρησης Α και Β δεν είναι μεγάλες αν και το Α είναι ακριβέστερο. Το Γ μοντέλο οδηγεί σε ανεπαρκούς ακρίβειας αποτελέσματα και είναι το χειρότερο.
3. (α) π.χ. στην τρίτη γραμμή του πίνακα θα απεικονίζεται ο δρόμος γ που ξεκινάει από το Α και φθάνει στο Δ:

	Α	Β	Γ	Δ
γ	–1	0	0	1

(β), (γ) Οι διανυσματικές σχέσεις που ισχύουν στο σχήμα είναι και οι σχέσεις που ισχύουν μεταξύ των γραμμών του πίνακα.

4. (α) Φτιάξτε ένα πίνακα όπου οι γραμμές να αντιστοιχούν σε γυναίκες και οι στήλες σε άνδρες.
   (β) Υπάρχουν δύο περιπτώσεις.
   (γ) Βρείτε εκείνα τα ζευγάρια όπου δε θα υπάρχουν δύο ίδιες γυναίκες ή άνδρες σε δύο διαφορετικούς γάμους.

§ 1.4 – 1.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

3. $x = 2$, $y = 1$.
4. Επίλυση εξίσωσης και πράξεις πινάκων.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. (α) (Σ) προσθέστε δύο διαγώνιους πίνακες.
   (β) (Σ) όμοια.
   (γ) (Σ) δεν αναιρείται ο ορισμός επειδή είναι 0 όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου.
3. Λύστε το σύστημα με Χ, Ψ άγνωστους πίνακες (π.χ. με αντικατάσταση).

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Είναι οι πωλήσεις και των δύο ημερών.
2. Αν Α, Β, Γ οι πίνακες των τρίποντων, δίποντων και ελεύθερων βολών τότε $X = 3A + 2B + \Gamma$.
3. (α) Θεωρήστε Α τον πίνακα κατανάλωσης σε κιλοβατώρες κ.λπ.
   (β) Η μείωση 10% θα γίνει μόνο στον πίνακα τιμών κατανάλωσης ρεύματος. 'Οχι στο πάγιο.

§ 1.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

2. Αν Α, Β τετραγωνικοί πίνακες $\nu\times\nu$ και ισχύει $AB = I$ τότε θα ισχύει $BA = I$.

3. Καταλήγουμε στην Πυθαγόρεια σχέση.
4. (α) Πράξεις. Εδώ ισχύει πάντα $AB = BA$.
   (β) (i) Ναι (ii) 'Οχι
6. (α) Πράξεις.
   (β) Προφανώς όχι. Δεν ισχύει πάντοτε η ιδιότητα διαγραφής στον πολλαπλασιασμό πινάκων.
7. (α) Σ (β) Λ (γ) Σ

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Θυμηθείτε τι πρέπει να ισχύει για να μπορούν να πολλαπλασιασθούν δύο πίνακες. Επίσης τι σημαίνει ισότητα πινάκων.
2. (α) π.χ. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
3. (α) Πράξεις πινάκων.
   (β) Πολλαπλασιάστε την (α) σχέση δεξιά και αριστερά με B.
4. (α) Μετά από πράξεις καταλήγουμε σε σύστημα απ' όπου $\begin{cases} x = 5 \\ y = -7 \end{cases}$.
   (β) $A^3 = A^2A$ κ.λπ.
5. (α) Από την ισότητα των πινάκων καταλήγουμε στην εξίσωση $\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$ απ' όπου $\lambda = -1$ ή $\lambda = -6$.
6. (α) $A^2 = -I$, $A^3 = A^2A$, $A^4 = A^3A$ κ.λπ.
   (β) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα της διαίρεσης για να αναλύσουμε μεγάλους εκθέτες με διαιρέτη 4, π.χ. $99 = 4\cdot 24 + 3$ κ.λπ.

§ 1.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Πρέπει $x = 2$, $y = 2$ να επαληθεύουν το σύστημα.
2. Μέθοδος Gauss διαδοχικών απαλοιφών.
   (α) Μοναδική λύση.
   (β) 'Απειρες λύσεις.
   (γ) Αδύνατο σύστημα.
3. (α) $A\cdot B = \mathbb{O}$.

(β) Εκτός της λύσης $B \neq \mathbb{O}$ το ομογενές σύστημα έχει άπειρες λύσεις μορφής $(x, y, z) = (2t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Θυμηθείτε πως ορίζεται το άθροισμα $A + B$ και το γινόμενο $A \cdot B$. Καταλήγετε σε σύστημα απ' όπου προσδιορίζετε τα κ, λ.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. (α) Μέθοδος Gauss.

   (β) Μέθοδος Gauss με μικρή διερεύνηση για τις τιμές $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Αν $\lambda = 1$ υπάρχουν άπειρες λύσεις $(x, y) = (t, 1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.
   Αν $\lambda \neq 1$ το σύστημα είναι αδύνατο.

2. Από την ισότητα των πινάκων καταλήγουμε σε ομογενές σύστημα με άπειρες λύσεις. Για να είναι συμβιβαστό το σύστημα πρέπει να επαληθεύεται και η εξίσωση.

3. Καταλήγουμε σε ισοδύναμο σύστημα, το οποίο επιλύουμε με τη μέθοδο Gauss. Μας ενδιαφέρουν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα είναι συμβιβαστό.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Αν x, y, ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου (σε μοίρες) τότε
$$\left\{\begin{array}{c} x + y + \omega = 180 \\ x = y + 10 \\ y = 2\omega \end{array}\right\} \text{κ.λπ.}$$

2. Αν x, y, z η επί τοις % κατά βάρος σύσταση του χάλυβα σε Fe, C, Ni τότε $\frac{x}{100} + \frac{y}{100} + \frac{z}{100} + \frac{5}{100} = 1$ κ.λπ.

3. $$\left\{\begin{array}{c} x + y + \omega = 18 \\ x + 2y + 3\omega = 33 \\ y = x + \omega \end{array}\right\} \text{κ.λπ.}$$

4. Αν x, y η επί τοις % κατά βάρος σύσταση του μπρούτζου σε Cu και Sn τότε $\frac{x}{100} + \frac{y}{100} = 1$. Επίσης $V_{\text{μπρούτζου}} = V_{\text{χαλκού}} + V_{\text{κασσίτερου}}$ κ.λπ. Να γίνει αντικατάσταση όγκων με τη βοήθεια πυκνοτήτων.

Γενικές Ασκήσεις

1. Μετά την εξίσωση των αθροισμάτων των στοιχείων της i γραμμής και i στήλης να παρατηρήσετε ότι έχουμε αθροίσματα αριθ-

μητικής προόδου ($S_ν = \frac{(α_1 + α_2)ν}{2}$).

2. Το άθροισμα των έξι στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης είναι περιττός αριθμός, όταν το πλήθος των περιττών προσθετέων είναι περιττό.
3. Τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0. Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις αυτές και καταλήγουμε:
$$\frac{1}{2}[(α-β)^2 + (β-γ)^2 + (γ-α)^2] = 0 \ldots$$
4. Για να βρούμε το πρώτο στοιχείο του γινομένου ΑΒ κάνουμε 3 πολλαπλασιασμούς. Να γενικεύσετε το συλλογισμό αυτό. Επίσης για να βρούμε το πρώτο στοιχείο του ΑΒ κάνουμε 2 προσθέσεις. Γενικεύστε.
5. (α) Τι πρέπει να ισχύει για να πολλαπλασιάσουμε πίνακες; Εδώ ο Χ είναι 2×2.

   (β) Από την εξίσωση πινάκων αν θέσουμε $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & ω \end{bmatrix}$ καταλήγουμε σε αδύνατο σύστημα.
6. Το γινόμενο (ΑΒ)Χ εκφράζει τα στοιχεία της πρώτης στήλης του ΑΒ (γιατί;)
7. (α) 'Εχουμε Α = Β + 2Ι και πολλαπλασιάζουμε δεξιά και αριστερά με τον πίνακα Β, άρα ΑΒ = ΒΑ. Επίσης, αν υψώσουμε στο τετράγωνο τη σχέση Α − Β = 2Ι καταλήγουμε στην ισότητα ΑΒ = Ι.

   (β) Αφού ΑΒ = ΒΑ ισχύει η γνωστή ταυτότητα "διαφορά κύβων" κ.λπ.
8. Το πρώτο σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (-\frac{4λ^2}{λ^2+4}, \frac{8}{λ^2+4})$ και αφού τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα, οφείλει και το δεύτερο να έχει μοναδική λύση.
9. 'Ομοια με την εφαρμογή στην εισαγωγή της § 1.7 των γραμμικών συστημάτων.

Κεφάλαιο 2: *Περιγραφική Στατιστική*

§ 2.1 – 2.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της σχετικής συχνότητας.
2. Προκύπτει αμέσως από τον ορισμό της μέσης τιμής.
3. 'Ομοια με την 3.
4. Προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της διαμέσου.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Προκύπτει από τον ορισμό της τυπικής απόκλισης.
2. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.
3. Κατασκευάστε τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων και από τον πίνακα αυτό, απαντήστε στα ερωτήματα.
4. Σχηματίστε τους αντίστοιχους πίνακες.
5. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής.
6. 'Ομοια με την 5.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Σχηματίστε τους αντίστοιχους πίνακες.
2. Απλή.
3. (α), (β) Απλή.
   (γ), (δ) Χρησιμοποιήστε τη σχετική αθροιστική συχνότητα.
4. Απλή.

Γενικές Ασκήσεις

1. Κατασκευάστε τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων και από τον πίνακα αυτό, απαντήστε στα ερωτήματα.
2. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.
3. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής.
4. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.
5. Προκύπτει από τον ορισμό της μέσης τιμής.

Κεφάλαιο 3: *'Οριο – Συνέχεια Συνάρτησης*

§ 3.1 – 3.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. -2, 2, 0, δεν υπάρχει, 1, 1, 2.
2. (α) -2, 1, δεν υπάρχει.
   (β) 1, 1, 1.
   (γ) 1, 1, 1.
3. Σ, Σ, Σ, Λ, Σ, Σ, Λ.
4. -1, -1, 0, 1, δεν υπάρχει, $f(0)=-1$, $f(1)=1$.
5. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$, δεν υπάρχει, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$, δεν υπάρχει.
6. $20, 8, \frac{3}{2}, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$.
7. $\frac{315}{8}, 1-2\sqrt{2}, 3, 0$.
8. (α) $+\infty$, $-\infty$, δεν υπάρχει.
   (β) $-\infty$, $-\infty$, $-\infty$.
9. (α) $x=-2$.
   (β) $x=2$.
11. $-\infty$, δεν υπάρχει.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. (α) 12 (β) $\frac{1}{3}$.
2. (α) -4 (β) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (γ) $\frac{3}{8}$ (δ) $\frac{1}{3}$.
3. Να απαλλαγείτε από τα απόλυτα διαλέγοντας κατάλληλες περιοχές του x και στις δύο περιπτώσεις.
4. $\alpha=3$ ή $\alpha=-3$, πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα.
5. $\alpha=-1$, όμοια πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα.
6. $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$, δεν υπάρχει, $+\infty$, $-\infty$.
7. (α) $x=4$ (β) $x=-1$ (γ) $x=1$ (δ) $x=0$ (ε) $x=1$ (στ) $x=-1$.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. (β) $f(1) = 450$, $f(3) = 550$, $f(5) = 700$, είναι αντίστοιχα ίδια.
   (γ) Δεν υπάρχουν.
2. (α) $P(0) = 80$.
   (γ) $\lim\limits_{x \to 9^-} P(t) = +\infty$.
3. $x_1 + x_2 = 1$.

§ 3.6 – 3.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. 0, 3.
2. (α) Συνεχής στο $x_0 = 1$.
   (β) Ασυνεχής στο $x_0 = 1$.
   (γ) Ασυνεχής στο $x_0 = -1$.
   (δ) Ασυνεχής στο $x_0 = 2$.
3. Στα σημεία 1, 2, 5 η f είναι συνεχής. Στο 0 δεν ορίζεται η f επομένως δεν έχει έννοια να ζητάμε συνέχεια.
4. 'Ολες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. (α) $\alpha = -1$ ή $\alpha = 2$ (β) $\alpha = -4$.
2. Να εκφράσετε την f ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
3. Πρέπει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Απ' αυτή τη σχέση καθορίστε την τιμή $f(0)$.
4. (α) $f(x) - f(1) = (x - 1)(2x - 3)$.
   (β) -1.
   (γ) Ανάλυση του γινομένου $|f(x) - f(1)| = |x - 1| \cdot |2x - 3| < \frac{1}{10} \cdot \frac{12}{10}$.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. (β) Το πετρέλαιο μειώνεται και ο διαχειριστής γεμίζει τη δεξαμενή.
   (γ) Από 3 έως 18 Φεβρουαρίου.
2. (α) $x_0 = 10$ και $x_0 = 60$.

(β) Υπάρχει αλλαγή κόστους που εξαρτάται από την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

§ 3.10 – 3.11

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. (i) $0, +\infty$ (ii) $-1, -\infty$.
2. (α) 1 (β) 0.
3. (α) $+\infty$ (β) 0 (γ) 1.
4. (α) 101 (β) -7 (γ) 1.
5. π.χ. στην 'Ασκηση 3: (β) $y=0$ (γ) $y=1$.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. (α) $\lambda = 1, \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = -2$.

   (β) Δεν είναι πραγματικός αριθμός.

   (γ) $\lambda = 0, \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = 2$.

   (δ) $\lambda = 1, \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \frac{1}{2}$.
2. (α) 1 (β) $\frac{1}{2}$ (γ) $+\infty$.
3. (α) $+\infty$ (β) $-\infty$.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. (β) $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x) = 0{,}5$ που σημαίνει ότι το κόστος για έναν δίσκο μειώνεται στις 500 δρχ. όταν η παραγωγή είναι πολύ μεγάλη.
2. (β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = 0$ που σημαίνει ότι η συγκέντρωση του φάρμακου στο αίμα είναι μηδενική ύστερα από μεγάλο χρονικό διάστημα.

Γενικές Ασκήσεις

1. (1) Λ (2) Σ (3) Σ (4) Λ (5) Σ (6) Λ.
2. 'Εχουμε μορφή $0(\pm\infty)$ απροσδιοριστίας και διερευνούμε το $\lim\limits_{x\to1}[f(x)g(x)]$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. (α) Ιδιότητες λογάριθμων και κατόπιν υπολογισμός του ορίου.

   (β) Υπολογισμός του $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ και κατόπιν του ζητούμενου ορίου.

4. (α) $\lim\limits_{\upsilon\to u^+} E(\upsilon)=+\infty$ άρα καταναλώνει τεράστια ενέργεια (πρακτικά κολυμπά με την ίδια ταχύτητα κόντρα στο ρυθμό του ποταμού άρα παραμένει στο ίδιο σημείο).

   (β) $\lim\limits_{\upsilon\to u^+} E(\upsilon)=+\infty$ άρα πολύ μεγάλη ταχύτητα σημαίνει τεράστια κατανάλωση ενέργειας.

5. (α) Υπολογισμός ορίου με συζυγή παράσταση.

   (β) Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ τότε $\sqrt{1+x}-1\simeq\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow\sqrt{1+x}\simeq 1+\dfrac{x}{2}$.

   'Αρα $\sqrt{10}=\sqrt{1+9}=\sqrt{9\left(1+\dfrac{1}{9}\right)}=3\sqrt{1+\dfrac{1}{9}}\simeq 3\left(1+\dfrac{1}{18}\right)\simeq 3{,}167.$

   'Ομοια τα υπόλοιπα.

6. (α) $E(x)=\begin{cases} 3x & , \ 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3 & , \ 1<x<2\\ 2x-1 & , \ 2\leqslant x\leqslant 3\\ 5 & , \ 3<x<4\\ x+1 & , \ 4\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$

7. (α), (β) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90°$) γνωρίζουμε ότι $\eta\mu B=\dfrac{A\Gamma}{AB}$ και $\sigma\upsilon\nu B=\dfrac{AB}{A\Gamma}$.

   (γ) $\lim\limits_{x\to 0} AB=\lim\limits_{x\to 0} 2R\,\eta\mu\dfrac{x}{2}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0} \Delta\Gamma=\lim\limits_{x\to 0} R\left(1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{2}\right)=0.$

   (δ) Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα ημ2α = 2ημα·συνα αφού πολλαπλασιάσετε αριθμητή και παρονομαστή με τις συζυγείς τους παραστάσεις.

Κεφάλαιο 4: *Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού*

§ 4.1

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Απλή.
2. Εργασθείτε όπως στις Εφαρμογές.
3. 'Ομοια με τη 2.
4. 'Ομοια με τη 2.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Εργασθείτε με πλευρικά όρια.
2. Εργασθείτε με τον ορισμό της παραγώγου.
3. Εργασθείτε με πλευρικά όρια.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Εργασθείτε με το μέσο ρυθμό μεταβολής και το όριό του.
2. 'Ομοια με την 1.
3. Εκφράστε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ως προς το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας.
4. Εκφράστε τη διαγώνιο ως συνάρτηση της ακμής.
5. Χρησιμοποιήστε το σταθερό ρυθμό μεταβολής του όγκου, για να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας ως προς το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας.
6. Χρησιμοποιήστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

§ 4.2 – 4.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Χρησιμοποιήστε τους κανόνες παραγώγισης.
2. 'Ομοια με την 1.
3. 'Ομοια με την 1.
4. 'Ομοια με την 1.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε τους κανόνες παραγώγισης.

2. 'Ομοια με την 1.
3. 'Ομοια με την 1.
4. Συγκρίνετε τις τάξεις των πολυωνύμων $(P'(x))^2$ και $P(x)$.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. (α) Χρησιμοποιήστε τον τύπο $\gamma(t) = S''(t)$.
   (β) Εξετάστε πότε $\gamma(t) \leqslant 0$.
2. Υπολογίστε τα $V'(r)$ και $V''(r)$ και αντικαταστήστε στην εξίσωση.
3. Υπολογίστε την παράγωγο για $t = 2, 6$.
4. Υπολογίστε την παράγωγο για $t = 1, 2, 3$.
5. Υπολογίστε την παράγωγο για $t = 0$.
6. Υπολογίστε την παράγωγο για $t = 1$ και $t = 3, 5$.

§ 4.6 – 4.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα παραγουσών βασικών συναρτήσεων.
2. Παραγωγίστε τις συναρτήσεις της δεύτερης στήλης.
3. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα παραγουσών βασικών συναρτήσεων.
4. Πολλαπλασιάστε αριθμητή και παρονομαστή με (1 – ημx).

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε την Εφαρμογή 2.
2. Παρατηρήστε ότι $e^{-x}(f'(x) - f(x)) = (e^{-x}f(x))'$.
3. Υπολογίστε την παράγουσα και χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές.
4. Υπολογίστε την παράγουσα και χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές.
5. Παραγωγίστε μία και δύο φορές αντίστοιχα τη συνάρτηση.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Υπολογίστε την παράγουσα της υ.
2. Υπολογίστε την παράγουσα.
3. 'Ομοια με την 3.
4. Βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της x και αντικαταστήστε στην εξίσωση.

§ 4.8 – 4.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Μελετήστε το πρόσημο της f'.
2. 'Ομοια με την 1.
3. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο της $2^{ης}$ παραγώγου.
4. Μελετήστε το πρόσημο της f'.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Μελετήστε το πρόσημο της f'.
2. 'Ομοια με την 1.
3. (α) Μελετήστε το πρόσημο της f'.
   (β) Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα του (α).
   (γ) Τροποποιήστε τα $f(\pi)$ και $f(e)$.
4. Μελετήστε το πρόσημο των f', g' και $(f+g)'$.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Μελετήστε το πρόσημο της f'.
2. 'Ομοια με την 1.
3. 'Ομοια με την 1.
4. Για να σχηματισθεί το κουτί, κόβουμε τέσσερα τετράγωνα κομμάτια από τις γωνίες του χαρτονιού πλευράς x.
5. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση εσόδων δίνεται από τον τύπο:
   $$E(x) = (30 + x)(5000 - 100x)$$
   όπου x οι επιπλέον επιβάτες μετά τους 30.
6. Χρησιμοποιήστε την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΛ και ΑΔΓ.

Γενικές Ασκήσεις

1. Μετά από κατάλληλες αλγεβρικές πράξεις χρησιμοποιήστε τον ορισμό της παραγώγου.
2. Εκφράστε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του χωρίου ως συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής της εξωτερικής και εσωτερικής ακτίνας.
3. Υπολογίστε την παράγωγο.
4. Υπολογίστε την παράγουσα.

5. Ακολουθήστε τις υποδείξεις και υπολογίστε την παράγουσα.
6. Κατασκευάστε την παράγωγο πηλίκου $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'$.
7. Μελετήστε το πρόσημο της f' και τα στάσιμα σημεία.
8. Υπολογίστε το μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = x^3(c - x)^2$.
9. (α) Χρησιμοποιήστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
   (β) Χρησιμοποιήστε την ομοιότητα των τριγώνων ΑΚΓ και ΑΓΔ και το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΚΓ.
10. Αντικαταστήστε το ύψος στον όγκο ως συνάρτηση του τόξου ΑΒ.
11. Εκμεταλλευθείτε τη σχέση $(\ln[\alpha_1(\varphi_2)])' = (\ln[\alpha_1(\varphi_2)])'' = 0$.

Κεφάλαιο 5: *Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού*

§ 5.1 – 5.2

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Απλή εφαρμογή.
2. Απλή εφαρμογή.
3. Βρείτε την παράγωγο της $f(x) = e^{2x}$.
4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x) = συν3x$.
5. Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα (vi) της § 5.2.
6. Βρείτε την ιδιότητα (vii) της § 5.2.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Απλός υπολογισμός παραγώγου.
2. 'Ομοια με την 1.
3. 'Ομοια με την 1.
4. Βρείτε την παράγωγο της g και εξισώστε την με την f.
5. Απλή εφαρμογή.
6. Απλή εφαρμογή.

§ 5.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Απλή εφαρμογή.
2. Απλή εφαρμογή.
3. Αναλύστε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
4. 'Ομοια με την 3.

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα παραγουσών σύνθετων συναρτήσεων.
2. 'Ομοια με την 1.
3. 'Ομοια με την 1.
4. 'Ομοια με την 1.
5. 'Ομοια με την 1.

6. 'Ομοια με την 1.
7. Απλή παραγοντική ολοκλήρωση.
8. Παραγοντική ολοκλήρωση όπου επανεμφανίζεται το ζητούμενο ολοκλήρωμα.

Πρακτικές Εφαρμογές

1. Απλή εφαρμογή.
2. Απλή εφαρμογή.
3. Απλή εφαρμογή.
4. Απλή εφαρμογή.

§ 5.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση είναι θετική στο [1, 2].
2. Βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης.
3. Βρείτε το πρόσημο της διαφοράς των συναρτήσεων.
4. 'Ομοια με την 3.
5. Βρείτε το πρόσημο της διαφοράς των συναρτήσεων στο [–1, 1].

Σύνθετες Ασκήσεις

1. Βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης στο [–1, 1].
2. Παρατηρήστε ότι η f είναι μη αρνητική στο [0, 1].
3. Βρείτε το πρόσημο της διαφοράς των συναρτήσεων.
4. Βρείτε το πρόσημο της διαφοράς των συναρτήσεων στο [0, 2].

Γενικές Ασκήσεις

1. Απλή εφαρμογή.
2. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα παραγουσών σύνθετων συναρτήσεων.
3. 'Ομοια με τη 2.
4. 'Ομοια με τη 2.
5. 'Ομοια με τη 2.
6. 'Ομοια με τη 2.
7. 'Ομοια με τη 2.

8. Απλές παραγοντικές ολοκληρώσεις.
9. Βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων στο αντίστοιχο διάστημα και χρησιμοποιήστε την ιδιότητα (v) της § 5.2.
10. Γράψτε το $\sigma\upsilon\nu^3 x = \sigma\upsilon\nu^2 x\,(\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x\,(\eta\mu x)' = (1 - \eta\mu^2 x)\,(\eta\mu x)'$.
11. Βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης και χρησιμοποιήστε παραγοντική ολοκλήρωση.
12. Βρείτε το πρόσημο της διαφοράς των συναρτήσεων.
13. Χρησιμοποιήστε τον τύπο $h(x) - h(0) = \int_0^x h'(t)\,dt$.
14. Χρησιμοποιήστε τον τύπο $K(t) - K(0) = \int_0^t K'(x)\,dx$.
15. Χρησιμοποιήστε τον τύπο $P(x) - P(0) = \int_0^x P'(t)\,dt$.

Βιβλιογραφία

1. Bancroft, G., and Fletcher, M., 1998. Improve your maths!, Addison-Wesley.
2. Bentley J. and Turner, G.P.A., 1998, Introduction to Paint Chemistry and principles of paint technology. 4th Ed., Chapman & Hall.
3. Evans, C.W., 1997. Engineering Mathematics, A programmed approach. 3rd Ed., Chapman & Hall.
4. Haberman, R., 1997. Mathematical Models, Prentice-Hall, Inc.
5. Himmelblau, D.M., 1986. Basic principles and calculations in chemical engineering, Prentice-Hall International.
6. Kontogeorgis, G.M., Fredenslund, Aa., and Tassios, D.P., 1993. Simple activity coefficient model for the prediction of solvent activities in polymer solutions, Industrial Engineering Chemistry Research, vol. 32: 362-373.
7. Prausnitz, J.M., Lichtenthaler, R.N., Gomes De Azevedo, E., 1986. Molecular Thermodynamics of Fluid-Phase Equilibria, 2nd Ed. Prentice-Hall International Series.
8. Strang, Gilbert, 1994. Linear Algebra And Its Applications, Massachusetts Institute of Technology.
9. Tassios, D.P., 1993. Applied Chemical Engineering Thermodynamics, Springer-Verlag, Berlin.
10. Tebbutt, P., 1998. Basic Mathematics for Chemists. 2nd Ed., John Wiley & Sons.
11. Valsaraj, K.T., 1995. Elements of Environmental Engineering, CRC Press, Inc.
12. Zar, Jervold, H., 1996. Biostatistical Analysis. 3rd Ed., Prentice-Hall, Inc.
13. Βλάμος, Π.Μ., 1997. 'Οριο και Συνέχεια Συνάρτησης, Εκδόσεις «V».
14. Βλάμος, Π.Μ., 1998. Παράγωγος Συνάρτησης, Εκδόσεις «V».
15. Βλάμος, Π.Μ., 1999. Ολοκλήρωμα Συνάρτησης, Εκδόσεις «V».
16. Βλάμου, Ε.Μ., 1998. Πίνακες, Εκδόσεις «V».
17. Εξαρχάκος Θ., 1994. Γραμμική 'Αλγεβρα.
18. Παπαϊωάννου, Α., 1993. Μηχανική των Ρευστών.
19. Περιοδικά Ευκλείδης Γ', Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
20. Φούντας Γρ., Συναρτήσεις, Εκδοτική Εταιρεία Πλαίσιο.

Ευρετήριο 'Ορων