4 Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την έννοια της παραγώγου, την οποία θα εισάγουμε ταυτίζοντάς την με το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους, δίνοντας πολλές χρήσιμες πρακτικές εφαρμογές.

Παρουσιάζεται ο λογισμός με παραγώγους, καθώς και οι παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Εισάγεται, κατόπιν, η αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης με την παράγουσα συνάρτηση και την παρουσίαση διαφορικών εξισώσεων και προβλημάτων αρχικών τιμών.

Τέλος, το πρόσημο των παραγώγων μας οδηγεί στην εύκολη μελέτη της μονοτονίας και των ακροτάτων μιας συνάρτησης.

4.1. Η έννοια της Παραγώγου ως Ρυθμός Μεταβολής

Στο κεφάλαιο 3 εκφράσαμε μαθηματικά ένα γνωστό αποτέλεσμα της φυσικής, ότι το όριο της μέσης ταχύτητας ενός κινητού είναι η στιγμιαία ταχύτητα. Ας αναλύσουμε γενικότερα το παράδειγμα αυτό:

'Εστω ότι το μέγεθος S αποτελεί τη συνάρτηση θέσης ενός κινητού ως προς το χρόνο t. Μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0, το κινητό θα έχει διανύσει απόσταση $S(t_0)$. Μετά από χρόνο h, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_0 + h$, η απόσταση που θα έχει διανύσει θα είναι $S(t_0 + h)$. Ως μέση ταχύτητα, ορίζεται το πηλίκο:

$$\frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

Η στιγμιαία ή οριακή ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0, δίνεται από το όριο:

$$\upsilon(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

Είναι φανερό ότι το όριο αυτό, εφόσον υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της θέσης ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 και ισούται με την οριακή του ταχύτητα, την ίδια χρονική στιγμή.

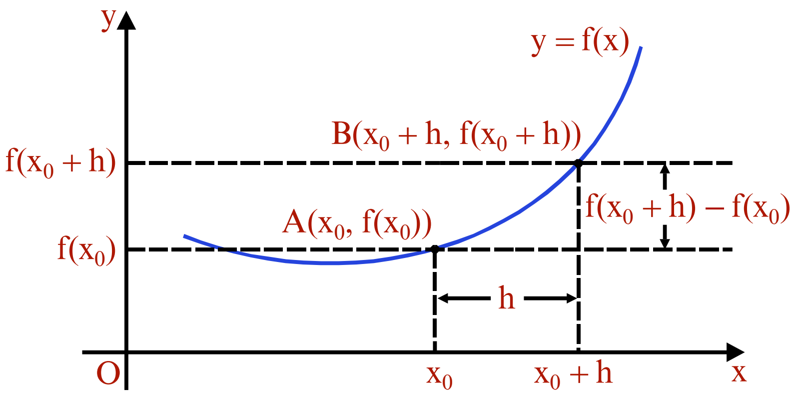
Θα λέμε τότε ότι υπάρχει η παράγωγος της S στο t_0 και θα τη συμβολίζουμε με $S'(t_0)$, δηλαδή:

$$\upsilon(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h} = S'(t_0)$$

Ας μελετήσουμε κατόπιν την έννοια της παραγώγου στη γενική της μορφή. 'Εστω ότι η συνάρτηση f εκφράζει τη σχέση μεταξύ δύο μεγεθών x και y ως εξής:

$$y = f(x)$$

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f και ας μετακινηθούμε σε ένα άλλο σημείο $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$ της C_f, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Η διαφορά $f(x_0 + h) - f(x_0)$ εκφράζει τη μεταβολή του μεγέθους y, που αντιστοιχεί στη μεταβολή h του μεγέθους x. Ο λόγος:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

εκφράζει τη μέση τιμή της μεταβολής του μεγέθους y. Αν θεωρήσουμε ότι η μεταβολή h της ποσότητας x, γίνεται οσοδήποτε μικρή ($h\to 0$), τότε προκύπτει το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

το οποίο εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της f στο x_0 και ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0. Συμβολίζουμε με $f'(x_0)$.

- **Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο**

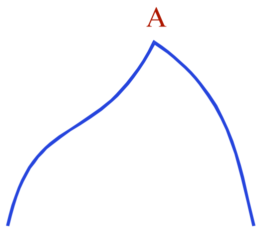
Ορισμός: Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε συμβολίζουμε το όριο αυτό $f'(x_0)$ και το ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε ότι το ακόλουθο σχήμα περιγράφει μια διαδρομή την οποία ακολουθεί ένας δρομέας.



Βελτιώνοντας διαρκώς την τεχνική του, ο δρομέας ακολουθεί χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια τις στροφές της διαδρομής. Τη μόνη δυσκολία τη συναντά στο σημείο A, όπου χρειάζεται διαφορετική αντιμετώπιση. Για να μελετήσουμε μαθηματικά την ιδέα αυτή, ας θεωρήσουμε ότι η διαδρομή του δρομέα στο σχήμα δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x\leqslant 1 \\ 2-x^2 & , \quad x>1 \end{cases}$$

και ότι θέλουμε να μελετήσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία με τετμημένες $x_0=-1,\ 1,\ 2$.

(α) 'Οταν $x_0=-1$ έχουμε ότι:

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{(-1+h)^3-(-1)^3}{h}=$$

$$\frac{h\,[(-1+h)^2+(-1+h)\,(-1)+(-1)^2]}{h}=(h-1)^2-(h-1)+1$$

Επομένως υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}[(h-1)^2-(h-1)+1]=3$$

και άρα $f'(1)=3$.

(β) 'Οταν $x_0=2$ έχουμε ότι:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{2-(2+h)^2+2}{h}=\frac{4-(2+h)^2}{h}=-h-4$$

Επομένως $f'(2)=-4$.

(γ) 'Οταν $x_0=1$ θα πρέπει να εργασθούμε όπως και στη συνέχεια με πλευρικά όρια, αφού η f αλλάζει κλάδο. Για $x<1$ ή $h<0$ έχουμε ότι:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^3-1}{h}=(1+h)^2+(1+h)+1$$

οπότε:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=3$$

Για $x>1$ ή $h>0$ έχουμε ότι:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{2-(1+h)^2-1}{h}=\frac{1-(1+h)^2}{h}=-(h+2)$$

οπότε:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-2$$

Αφού τα δύο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά θα έχουμε ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο $x_0=1$.

Γενικότερα, ισχύει ότι:

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχουν τα δύο πλευρικά όρια:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\ \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

και είναι ο ίδιος πραγματικός αριθμός.

• Συνέχεια και Παραγωγισιμότητα

Αν μελετήσουμε την προηγούμενη συνάρτηση της διαδρομής:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \leqslant 1 \\ 2 - x^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$, θα δούμε ότι είναι συνεχής. Ωστόσο, προηγουμένως αποδείξαμε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μια συνεχής συνάρτηση, δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη. 'Ομως, το αντίστροφο ισχύει πάντα, δηλαδή μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι απαραίτητα και συνεχής, όπως φαίνεται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Πόρισμα

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Παρατήρηση

Στα σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, στα οποία η f είναι συνεχής αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη, σχηματίζεται γωνία (βλέπε σχήμα παραδείγματος) και για το λόγο αυτό ονομάζονται γωνιακά σημεία.

• Ρυθμός μεταβολής μεγέθους σε συγκεκριμένη τιμή

Ορισμός: Αν δυο μεγέθη x, y συνδέονται με τη συνάρτηση f, έτσι ώστε $y = f(x)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η παράγωγος $f'(x_0)$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς x, για τη συγκεκριμένη τιμή $x = x_0$.

Παραδείγματα ρυθμού μεταβολής

Επιτάχυνση

Αν θεωρήσουμε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t, τη χρονική στιγμή t_0, τότε εκφράζει την επιτάχυνση του κινητού τη δεδομένη χρονική στιγμή. Δηλαδή:

$$\gamma(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\upsilon(t_0+h)-\upsilon(t_0)}{h} = \upsilon'(t_0)$$

Οριακό κόστος – Οριακό κέρδος

Στην οικονομία, θεωρούμε τις συναρτήσεις του κόστους παραγωγής K και του κέρδους P, ως προς μεταβλητή x την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος. Είναι γνωστό ότι τα πηλίκα:

$$\frac{K(x_0+h)-K(x_0)}{h}, \frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}$$

εκφράζουν το μέσο κόστος και το μέσο κέρδος, αντίστοιχα.

Τα όρια των πηλίκων αυτών όταν η μεταβολή της παραγόμενης ποσότητας x τείνει στο μηδέν (δηλαδή όταν $h\to 0$) εκφράζει το οριακό κόστος και το οριακό κέρδος, αντίστοιχα, για παραγόμενη ποσότητα προϊόντος x_0:

$$K'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{K(x_0+h)-K(x_0)}{h}$$

$$P'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h}$$

Ανάλογα ορίζονται οι ρυθμοί μεταβολής οποιωνδήποτε άλλων μεγεθών μελετάμε.

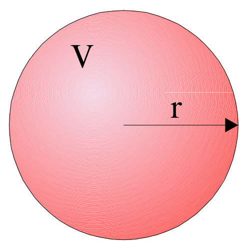
Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

'Ενα σφαιρικό μπαλόνι γεμίζεται με αέρα με ρυθμό που εκφράζεται σε cm^3/min. Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του μπαλονιού, όταν η ακτίνα του γίνει ίση με 3 cm;

Λύση

Αν V είναι ο όγκος του μπαλονιού και r η ακτίνα του τότε είναι $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Οπότε για $r_0 = 3$ έχουμε ότι:



$$\frac{V(3+h)-V(3)}{h} = \frac{4\pi}{3h}[(3+h)^3 - 3^3] =$$

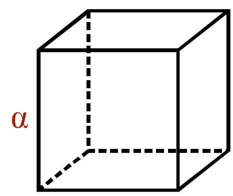
$$= \frac{4\pi}{3}[(3+h)^2 + 3(3+h) + 3^2]$$

Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{4\pi}{3}[(3+h)^2 + 3(3+h) + 3^2] = \frac{4\pi}{3}(3^2 + 3\cdot 3 + 3^2) = 36\pi \text{ cm}^3/\text{min}.$$

Εφαρμογή 2

'Ενας κύβος μεγαλώνει ως προς την ακμή του. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κύβου ως συνάρτηση της ακμής του.



Λύση

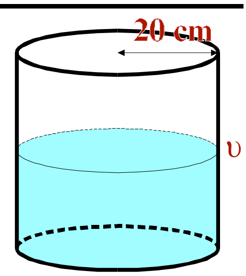
Αν α είναι η ακμή του κύβου, τότε ο όγκος του είναι $V(\alpha) = \alpha^3$. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κύβου είναι το όριο για $h \to 0$ του πηλίκου:

$$\frac{V(\alpha+h) - V(\alpha)}{h} = \frac{(\alpha+h)^3 - \alpha^3}{h} = (\alpha+h)^2 + \alpha(\alpha+h) + \alpha^2.$$

Επομένως, $V'(\alpha) = 3\alpha^2$.

Εφαρμογή 3

Μια δεξαμενή νερού με σχήμα ορθού κυλίνδρου διαμέτρου 40 cm αρχίζει να αδειάζει έτσι ώστε η στάθμη του νερού να κατεβαίνει με σταθερό ρυθμό $\frac{3}{2}$ cm/min. Πόσο γρήγορα φθίνει ο όγκος του νερού;



Λύση

'Εχουμε ότι η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου είναι 20 cm και υ το ύψος του. Αφού η στάθμη του νερού φθίνει με σταθερό ρυθμό θα έχουμε ότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\upsilon(t_0+h) - \upsilon(t_0)}{h} = -\frac{3}{2}$$

σε κάθε χρονική στιγμή t_0.

Ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = \pi R^2 \upsilon$, με μέσο ρυθμό μεταβολής:

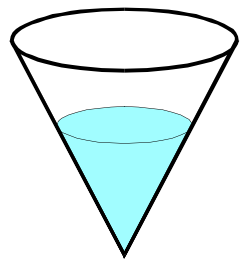
$$\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h} = \frac{\pi R^2 \upsilon(t_0+h) - \pi R^2 \upsilon(t_0)}{h} = \pi R^2 \frac{\upsilon(t_0+h)-\upsilon(t_0)}{h}$$

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής του όγκου σε κάθε χρονική στιγμή t είναι:

$$V'(t_0) = \pi R^2 \lim_{h\to 0} \frac{\upsilon(t_0+h)-\upsilon(t_0)}{h} = -\frac{3}{2}\pi \cdot 400 = -600\pi \text{ cm}^3/\text{min}.$$

Εφαρμογή 4

'Ενα κωνικό δοχείο νερού (ορθός κώνος) αρχίζει να στάζει με σταθερό ρυθμό, ώστε ο όγκος του να μειώνεται με ρυθμό 1 cm^3/min και το ύψος της επιφάνειας του νερού είναι τριπλάσιο της ακτίνας της σε κάθε χρονική στιγμή. Αν το δοχείο ήταν γεμάτο για $t = 0$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας της επιφάνειας του νερού τη χρονική στιγμή όπου η ακτίνα αυτή είναι ίση με 2 cm.



Λύση

Ο όγκος του κωνικού δοχείου δίνεται από τον τύπο $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon$, όπου R η ακτίνα και υ το ύψος του και αφού $\upsilon = 3R$, τότε $V = \pi R^3$, επομένως:

$$\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h} = \pi \frac{R(t_0+h)-R(t_0)}{h}[R^2(t_0+h) + R(t_0)R(t_0+h) + R^2(t_0)]$$

Οπότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(t_0+h)-R(t_0)}{h} = \frac{1}{3\pi R^2(t_0)} \lim_{h\to 0}\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h} = -\frac{1}{12\pi} \text{ cm/min}$$

Εφαρμογή 5

Η απόσταση που διανύει ένας πύραυλος (σε m) σε μια ευθύγραμμη κίνηση t δευτερόλεπτα μετά την εκκίνησή του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = t^4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 30$$

(α) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του πυραύλου στα χρονικά διαστήματα [10, 11], [10, 10,1] και [10, 10,01].

(β) Να υπολογίσετε τη στιγμιαία ταχύτητα του πυραύλου όταν $t = 10$ sec.

(γ) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των (α) και (β).

Λύση

(α) Υπολογίζουμε αρχικά τη μέση ταχύτητα στο διάστημα $[t_0, t_0 + h]$. Βρίσκουμε ότι:

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \frac{(t_0 + h)^4 - t_0^4}{h} = \frac{h(2t_0 + h)[(t_0 + h)^2 + t_0^2]}{h} =$$

$$(2t_0 + h)[(t_0 + h)^2 + t_0^2]$$

Επομένως, για $t_0 = 10$ και $h = 1$ βρίσκουμε ότι η μέση ταχύτητα του πυραύλου στο χρονικό διάστημα [10, 11] είναι ίση με $21 \cdot 221 = 4641$ m/sec. Για $t_0 = 10$ και $h = 0{,}1$ η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα [10, 10,1] είναι ίση με $20{,}1 \cdot 202{,}01 = 4060{,}401$ m/sec, ενώ για $t_0 = 10$ και $h = 0{,}01$ η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα [10, 10,01] είναι ίση με 4006,004 m/sec.

(β) Η οριακή ή στιγμιαία ταχύτητα του πυραύλου είναι το όριο για $h \to 0$ της μέσης ταχύτητας, δηλαδή:

$$\upsilon(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} (2t_0 + h)[(t_0 + h)^2 + t_0^2] = 2t_0 \cdot 2t_0^2 = 4t_0^3.$$

Για $t_0 = 10$ sec έχουμε ότι $\upsilon(10) = 4000$ m/sec.

(γ) Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των (α) και (β) προκύπτει ότι όσο μικραίνει το χρονικό διάστημα στο οποίο ορίζεται η μέση ταχύτητα, τόσο αυτή πλησιάζει στην τιμή της στιγμιαίας ταχύτητας.

Εφαρμογή 6

Το συνολικό κόστος $K(x)$ (σε χιλιάδες δραχμές) παραγωγής x ιστιοπλοϊκών πανιών την ημέρα από μια εταιρεία δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = -x^2 + 30x + 15, \quad 0 \leqslant x \leqslant 15$$

Ποιός ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους, αν η εταιρεία παράγει δέκα πανιά την ημέρα;

Λύση

Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κόστους στο σημείο $x_0 = 10$, οπότε:

$$\frac{K(10+h)-K(10)}{h} = \frac{-(10+h)^2+30(10+h)+15-215}{h} =$$

$$\frac{-h^2+10h}{h} = -h+10$$

Οπότε:

$$K'(10) = \lim_{h\to 0}\frac{K(10+h)-K(10)}{h} = \lim_{h\to 0}(-h+10) =$$

10 χιλιάδες δρχ. ανά ημέρα.

Εφαρμογή 7

Μια εταιρεία παράγει ηλεκτρονικά εξαρτήματα έχοντας πάγιο ετήσιο κόστος 4,5 εκατομμύρια δραχμές και κόστος ανά εξάρτημα 1000 δραχμές. Η τιμή πώλησης κάθε εξαρτήματος είναι 1800 δραχμές.

(α) Ποιά είναι η συνάρτηση κόστους;

(β) Ποιά η συνάρτηση των εσόδων;

(γ) Ποιά η συνάρτηση κέρδους;

(δ) Ποιός ο ρυθμός μεταβολής των παραπάνω συναρτήσεων όταν η εταιρεία παράγει έναν αριθμό εξαρτημάτων x_0;

Λύση

(α) Αν η εταιρεία παράγει x εξαρτήματα, τότε η συνάρτηση κόστους είναι:

$$K(x) = 4500 + x \text{ χιλιάδες δραχμές, για } x > 0$$

(β) Η συνάρτηση εσόδων είναι:

$$E(x) = 1{,}8x \text{ χιλιάδες δραχμές, για } x > 0$$

(γ) Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$P(x) = E(x) - K(x) = 0{,}8x - 4500 \text{ χιλιάδες δραχμές, για } x > 0$$

(δ) Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{K(x_0+h)-K(x_0)}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(x_0+h)-E(x_0)}{h} = 1{,}8$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h} = 0{,}8$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

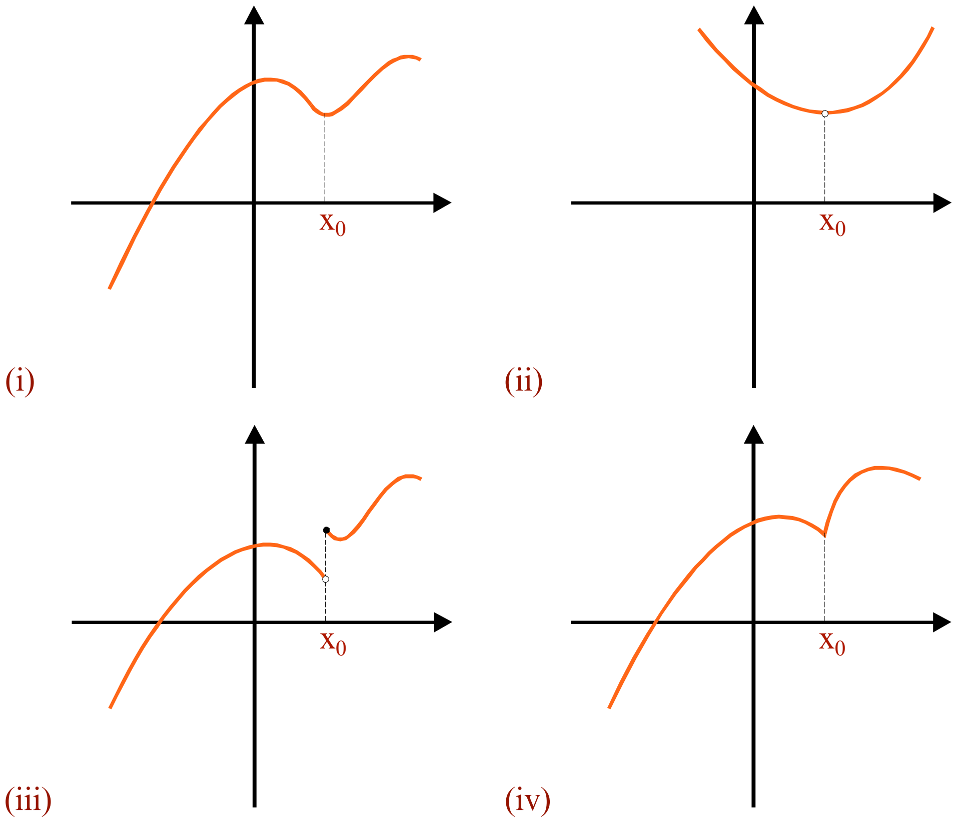
'Ασκηση 1

Στις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις να εξετάσετε:

(α) Αν η f έχει όριο στο $x = x_0$.

(β) Αν η f είναι συνεχής στο $x = x_0$.

(γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.



'Ασκηση 2

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

'Ασκηση 3

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x - x_0|$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.

'Ασκηση 4

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - x_0}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f: ℝ→ℝ με

$$f(x) = \begin{cases} \gamma x^2 + \delta x & , \quad \text{αν } x \leqslant 1 \\ \alpha x^2 + \beta x & , \quad \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Να εξετάσετε για ποιες τιμές των α, β, γ, δ:

(α) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

(β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

'Ασκηση 2

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x - 1|^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

'Ασκηση 3

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2|x-2|}{x^2 - 2x + 4}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

'Ενα αερόστατο αρχίζει να ανεβαίνει κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα 1,28 m/sec. Λόγω βλάβης στην τροφοδοσία αρχίζει να χάνει αέρα, έτσι ώστε το ύψος του μετά από t sec να δίνεται από τη συνάρτηση $g(t) = 1{,}28t - 0{,}16t^2$ m.

(α) Ποιά είναι η μέση ταχύτητα του αερόστατου στα χρονικά διαστήματα [3, 4], [3, 3,5] και [3, 3,1];

(β) Ποιά η στιγμιαία ταχύτητα του αερόστατου τη χρονική στιγμή $t = 3$ sec;

(γ) Ποιά η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t = 5 sec; Εκείνη τη στιγμή το αερόστατο ανεβαίνει ή πέφτει;

(δ) Πότε το αερόστατο θα πέσει στο έδαφος;

'Ασκηση 2

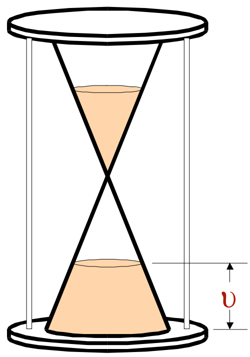
Σε θερμοκρασία 20° C, ο όγκος V (σε lt) 1,33 gr O_2 σχετίζεται με την πίεσή του P (σε atm) με τον τύπο $V = \frac{1}{P}$.

(α) Ποιός είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής του όγκου V ως συνάρτηση της πίεσης P, όταν η πίεση P αυξάνεται από 2 atm σε 3 atm;

(β) Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου V όταν η πίεση P γίνει 2 atm;

'Ασκηση 3

Σε μια κλεψύδρα η άμμος αρχίζει να πέφτει από το πάνω μέρος της στο κάτω με σταθερό ρυθμό 4 cm^3/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ύψους υ της άμμου που μαζεύεται στο κάτω μέρος της κλεψύδρας, αν το ύψος εκφράζεται ως συνάρτηση της ακτίνας από τον τύπο $υ = \frac{R}{π}$.



'Ασκηση 4

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της διαγωνίου ενός κύβου ως συνάρτηση της ακμής του.

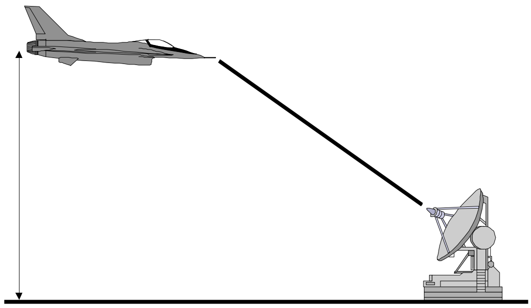
'Ασκηση 5

Αν ο όγκος μιας σφαίρας μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειάς της είναι αντιστρόφως ανάλογος της ακτίνας της.

'Ασκηση 6

'Ενα αεροπλάνο πετάει παράλληλα προς το έδαφος με σταθερή ταχύτητα 600 μίλια/h και πλησιάζει ένα σταθμό Radar.

Αν το ύψος στο οποίο πετάει το αεροπλάνο είναι 2 μίλια, πόσο γρήγορα μειώνεται η απόσταση ανάμεσα στο αεροπλάνο και στο σταθμό, τη χρονική στιγμή που η οριζόντια απόστασή τους είναι 1,5 μίλια;



4.2. Παράγωγος Συνάρτηση

Η παραγωγισιμότητα, όπως η συνέχεια, είναι μια ιδιότητα την οποία μπορεί να έχει μια συνάρτηση σε ορισμένα σημεία του πεδίου ορισμού της. Ας μελετήσουμε τι γίνεται, όταν η παράγωγος ορίζεται σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης.

Παράδειγμα

Να μελετηθεί αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = 2x^2 - 3x$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{2(x_0 + h)^2 - 3(x_0 + h) - 2x_0^2 + 3x_0}{h} =$$

$$\frac{2[(x_0 + h)^2 - x_0^2] - 3h}{h} = \frac{2h(2x_0 + h) - 3h}{h} = 4x_0 + 2h - 3$$

Επομένως, προκύπτει ότι:

$$f'(x_0) = 4x_0 - 3, \text{ για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}.$$

'Ετσι ορίζεται μια νέα συνάρτηση, η $f'(x) = 4x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία ονομάζεται παράγωγος της f.

Ο ορισμός της παραγώγου συνάρτησης f' είναι απλός όταν το πεδίο ορισμού της f είναι ανοιχτό διάστημα ή ένωση ανοιχτών διαστημάτων, ενώ γίνεται πιο πολύπλοκος, όταν η f ορίζεται σε κλειστό διάστημα ή ένωση κλειστών διαστημάτων:

Ορισμός 1: Για μια συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $f': (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, αν και μόνο αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της (α, β).

Ορισμός 2: Για μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $f': [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, αν και μόνο αν:

(i) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$

(ii) Υπάρχουν τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(\beta + h) - f(\beta)}{h}$$

και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παρατήρηση

Η παράγωγος συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους σε οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής του.

4.3. Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων

Αποδεικνύεται εύκολα, με τον ορισμό της παραγώγου, ότι οι βασικές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους και η παράγωγος συνάρτησή τους δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

Συνάρτηση f	**Παράγωγος f′**
c (σταθερά)	0
x	1
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x > 0$	$\alpha x^{\alpha-1}$
ημx	συνx
συνx	−ημx
e^x	e^x
$\ln x$, $x > 0$	$\frac{1}{x}$

Παρατήρηση

Ο τύπος παραγώγισης της συνάρτησης $f(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}^*$, καλύπτει ουσιαστικά την παραγώγιση τριών ειδών συναρτήσεων:

(i) Δυνάμεις του x, π.χ. x^7, x^4 κ.λπ.

(ii) Κλάσματα δυνάμεων του x, π.χ. $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^7}$ κ.λπ.

(iii) Ρίζες του x, π.χ. $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $\sqrt[5]{x^2}$ κ.λπ.

Παραδείγματα

Παράδειγμα (i)

Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x) = x^5$.

Λύση

Είναι $f'\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f'(x) = (x^5)' = 5x^4$.

Παράδειγμα (ii)

Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{x^6}$.

Λύση

Είναι $f'\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, με $f'(x) = \left(\frac{1}{x^6}\right)' = (x^{-6})' = -6x^{-6-1} = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$.

Παράδειγμα (iii)

Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

Λύση

Είναι $f'\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x})' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{4x}$$

4.4. Κανόνες Παραγώγισης

Αν οι συναρτήσεις f, g: $A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους A, τότε και οι συναρτήσεις $f \pm g$, cf με c σταθερά, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ είναι παραγωγίσιμες στο A και ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες παραγώγισης:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Επιπλέον, αν ορίζεται η σύνθεση δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, τότε είναι και αυτή παραγωγίσιμη συνάρτηση, σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα, που ονομάζεται «κανόνας της αλυσίδας»:

Θεώρημα *(Κανόνας της αλυσίδας)*

Έστω συναρτήσεις f: $A \to \mathbb{R}$ και g: $B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$: $A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

4.5. Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Όπως είδαμε στην §4.1 η στιγμιαία ταχύτητα υ ενός κινητού αποτελούσε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης θέσης S του κινητού, ενώ η επιτάχυνση γ, με τη σειρά της αποτελούσε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του κινητού. Επομένως, ισχύει ότι:

$$S'(t) = \upsilon(t) \quad \text{και} \quad \upsilon'(t) = \gamma(t)$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι το ακόλουθο:

> «Μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση γ(t) ως προς τη συνάρτηση θέσης S(t), παρακάμπτοντας την ταχύτητα υ(t);»

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η επιτάχυνση είναι η παράγωγος της παραγώγου της συνάρτησης θέσης, δηλαδή:

$$\gamma(t) = (S'(t))'$$

την οποία ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης S και τη συμβολίζουμε με $S''(t)$.

Γενικότερα, έχουμε ότι:

Αν μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και η παράγωγος συνάρτηση $f'\colon A \to \mathbb{R}$ είναι και αυτή παραγωγίσιμη στο A, τότε ορίζεται η δεύτερη παράγωγος $f''\colon A \to \mathbb{R}$ της συνάρτησης f, ώστε $f''(x) = (f'(x))'$.

Ανάλογα, ορίζονται και μεγαλύτερης τάξης παράγωγοι μιας συνάρτησης f τις οποίες συμβολίζουμε με: $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, …

Εφαρμογές

Οικονομικά Μαθηματικά

Τα οικονομικά μαθηματικά ασχολούνται κυρίως με το ρυθμό μεταβολής οικονομικών ποσοτήτων. 'Ενας οικονομολόγος δεν ασχολείται με την τιμή του Ακαθάριστου Εθνικού Προϊόντος (ΑΕΠ) μιας χώρας, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αλλά με τη μελέτη του ρυθμού μεταβολής του και ειδικότερα με το αν αυξάνει ή φθίνει.

Ανάλογα, ένας επιχειρηματίας ενδιαφέρεται για το συνολικό κόστος $K(x)$ μιας δεδομένης παραγωγής x προϊόντων, καθώς και για το ρυθμό μεταβολής $K'(x)$ του συνολικού κόστους ως συνάρτηση της παραγωγής x προϊόντων.

Επίσης, ενδιαφέρεται για το μέσο κόστος $K_\mu(x)$ παραγωγής x μονάδων προϊόντος το οποίο ισούται με το λόγο $\frac{K(x)}{x}$, του συνολικού κόστους $K(x)$ με τις x μονάδες προϊόντος που παράγονται.

Εφαρμογή 1

Μια βιομηχανία ψυγείων υπολόγισε ότι το συνολικό κόστος παραγωγής x ψυγείων την εβδομάδα δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = 2000 + 50x - \frac{x^2}{50} \text{ χιλιάδες δραχμές για } 0 \leqslant x \leqslant 400$$

(α) Πόσο κοστίζει η παραγωγή του $151^{ου}$ ψυγείου;

(β) Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κόστους, όταν η βιομηχανία παράγει 150 ψυγεία την εβδομάδα;

(γ) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα των (α) και (β).

Λύση

(α) Το κόστος του 151ου ψυγείου δίνεται από τη διαφορά:

$K(151) - K(150) = 9093{,}98 - 9050 = 43{,}98 = 43980$ δραχμές

(β) Για το ρυθμό μεταβολής έχουμε $K'(x) = -\frac{x}{25} + 50$, οπότε:

$$K'(150) = 44 = 44000 \text{ δρχ./εβδομάδα}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής 150 ψυγείων βρίσκεται πολύ κοντά στην τιμή του κόστους παραγωγής του 151ου ψυγείου. Αυτό ισχύει αν δούμε τη διαφορά $K(151) - K(150)$ ως ρυθμό μεταβολής:

$$K(151) - K(150) = \frac{K(151) - K(150)}{151 - 150} = \frac{K(150 + h) - K(150)}{h}$$

όπου $h = 1$. Δηλαδή, η διαφορά $K(151) - K(150)$ είναι ακριβώς ο μέσος ρυθμός μεταβολής στο διάστημα $[150, 151]$.

'Ετσι, όταν οι τιμές του h είναι αρκετά μικρές, μπορούμε να έχουμε την εξής προσέγγιση:

$$K(151) - K(150) = \frac{K(151) - K(150)}{1} = \frac{K(150 + h) - K(150)}{h} \approx$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{K(150 + h) - K(150)}{h} = K'(150)$$

Εφαρμογή 2

Το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = 20 + \frac{400}{x} \text{ χιλιάδες δραχμές}$$

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση μέσου κόστους.

(β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους.

(γ) Να συγκρίνετε τους ρυθμούς μεταβολής του συνολικού και του μέσου κόστους όταν $x = 10$.

Λύση

(α) Το μέσο κόστος δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{20}{x} + \frac{400}{x^2}$$

(β) Είναι $K'_{\mu}(x) = -\frac{20}{x^2} - \frac{800}{x^3}$.

(γ) Είναι $K'(x) = -\frac{400}{x^2}$. Επομένως, $K'(10) = -4$, ενώ $K'_{\mu}(10) = -1$.

Εφαρμογή 3 *(Συνάρτηση Εσόδων)*

Μια αυτοκινητοβιομηχανία υπολόγισε ότι η σχέση μεταξύ της τιμής T ενός νέου μοντέλου αυτοκινήτου και της ζητούμενης ποσότητας x αυτοκινήτων του μοντέλου αυτού δίνεται από τη συνάρτηση:

$$T(x) = -0{,}2x + 4000 \text{ χιλιάδες δραχμές για } 0 \leqslant x \leqslant 10000$$

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση E(x) των εσόδων της αυτοκινητοβιομηχανίας.

(β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης εσόδων.

(γ) Να υπολογισθεί το $E'(1000)$.

Λύση

(α) Η συνάρτηση εσόδων δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = xT(x) = -0{,}2x^2 + 4000x \text{ χιλιάδες δρχ.}$$

(β) Ο ρυθμός μεταβολής της E(x) είναι:

$$E'(x) = -0{,}4x + 4000$$

(γ) 'Εχουμε ότι: $E'(1000) = -400 + 4000 = 3600$.

Εφαρμογή 4 *(Συνάρτηση Κέρδους)*

Ας θεωρήσουμε στην προηγούμενη εφαρμογή ότι το κόστος κάθε αυτοκινήτου, ως συνάρτηση των x μονάδων αυτοκινήτου που παράγονται, δίνεται από τη σχέση:

$$K(x) = 950x + 250000 \text{ χιλιάδες δραχμές για } 0 \leqslant x \leqslant 10000$$

(α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση κέρδους P.

(β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κέρδους.

(γ) Να υπολογίσετε το $P'(4000)$.

Λύση

(α) Είναι:

$P(x) = E(x) - K(x) = -0{,}2x^2 + 4000x - 950x - 250000 =$

$-0{,}2x^2 + 3050x - 250000$ χιλιάδες δραχμές (β) Είναι $P'(x) = -0{,}4x + 3050$.

(γ) 'Εχουμε ότι $P'(4000) = -1600 + 3050 = 1450$.

Εφαρμογή 5

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = \log_\alpha x$, για $x > 0$ και $0 < \alpha \neq 1$

(ii) $f_2(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$

(iii) $f_3(x) = \varepsilon\varphi x$, για $x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$

(iv) $f_4(x) = \alpha^x$, με $0 < \alpha \neq 1$

Λύση

'Εχουμε ότι:

(i) $f_1'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{\ln\alpha}\right)' = \dfrac{1}{x\ln\alpha}$, για $x > 0$.

(ii) $f_2'(x) = \nu\alpha_\nu x^{\nu-1} + (\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2} + \cdots + 2\alpha_2 x + \alpha_1$.

(iii) $f_3'(x) = \left(\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \dfrac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

(iv) $f_4'(x) = (e^{x\ln\alpha})' = e^{x\ln\alpha}(x\ln\alpha)' = \alpha^x \ln\alpha$.

Εφαρμογή 6

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = -\dfrac{1}{g(x)}$, με $g(x) \neq 0$

(ii) $f_2(x) = 2\sqrt{g(x)}$, με $g(x) > 0$

(iii) $f_3(x) = \ln(g(x))$, με $g(x) > 0$

(iv) $f_4(x) = \dfrac{(g(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, με $g(x) > 0$ και $\alpha \neq -1$

(v) $f_5(x) = e^{g(x)}$

Λύση

'Εχουμε ότι:

(i) $f_1'(x) = -\left(-\dfrac{1}{g^2(x)}\right)g'(x) = \dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$

(ii) $f_2'(x) = 2\,\dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\,g'(x) = \dfrac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$

(iii) $f_3'(x) = \dfrac{1}{g(x)}\,g'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

(iv) $f_4'(x) = \dfrac{(\alpha+1)\,g^{\alpha}(x)}{\alpha+1}\,g'(x) = g^{\alpha}(x)\,g'(x)$

(v) $f_5'(x) = e^{g(x)}\,g'(x)$

Εφαρμογή 7

(α) Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x}{x^2+\alpha^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρεθεί η τρίτη παράγωγος της συνάρτησης $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-x}\,\eta\mu x$.

Λύση

(α) Είναι $f'(x) = \dfrac{\alpha^2 - x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}$ και $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3\alpha^2)}{(x^2+\alpha^2)^3}$.

(β) Είναι $f'(x) = e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$, $f''(x) = -2e^{-x}\sigma\upsilon\nu x$ και $f^{(3)}(x) = 2e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)$.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = x^2 \ln x$, για $x > 0$

(ii) $f_2(x) = x\,\eta\mu x \ln x$, για $x > 0$

(iii) $f_3(x) = x^2 \varepsilon\varphi x$, για $x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$

(iv) $f_4(x) = 2^x \log_2 x$, για $x > 0$

'Ασκηση 2

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = \dfrac{x^2+3}{x-3}$, για $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

(ii) $f_2(x) = σφx$, για $x \in \mathbb{R} - \{κπ, κ \in \mathbb{Z}\}$

'Ασκηση 3

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = ημ(2x + 5)$

(ii) $f_2(x) = \ln(ημx)$, για $ημx > 0$

(iii) $f_3(x) = (2x - 3x^2)^3$

'Ασκηση 4

(α) Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f_1(x) = xe^x$.

(β) Να υπολογισθεί η τρίτη παράγωγος της συνάρτησης $f_2(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$, για $x > 2$.

(γ) Να υπολογισθεί η τέταρτη παράγωγος της συνάρτησης $f_3(x) = \frac{x+3}{x-3}$, για $x \neq 3$.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{αx}x^ν$, $ν \in \mathbb{N}^*$.

'Ασκηση 2

Να υπολογισθεί η 1000-οστή παράγωγος των συναρτήσεων $f_1(x) = e^x$ και $f_2(x) = α^x$, με $0 < α \neq 1$.

'Ασκηση 3

(α) Να παραγωγίσετε τη γνωστή ταυτότητα:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^ν = \frac{x^{ν+1} - 1}{x - 1}$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + ν\cdot 3^{ν-1}$$

'Ασκηση 4

'Εστω P πραγματικό πολυώνυμο για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$(P'(x))^2 = P(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρεθεί ο τύπος του πολυωνύμου P.

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

'Ενα αυτοκίνητο διανύει απόσταση S στα t πρώτα δευτερόλεπτα της εκκίνησής του ίση με:

$$S(t) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t \text{ m}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$$

(α) Να βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, με $0 \leqslant t \leqslant 10$.

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το αυτοκίνητο επιβραδύνει μετά από τα 6 πρώτα sec της κίνησής του.

'Ασκηση 2

'Εστω το γνωστό από τον ηλεκτρισμό δυναμικό (V):

$$V = \frac{q}{r} \ (q = \text{φορτίο},\ r = \text{απόσταση})$$

Να αποδείξετε ότι για το δυναμικό αυτό ισχύει:

$$V''(r) + \frac{2}{r}V'(r) = 0$$

'Ασκηση 3

Μια ομάδα βιολόγων σε ένα ωκεανογραφικό ινστιτούτο προτείνει να ληφθούν μια σειρά από προληπτικά μέτρα για τη διάσωση ενός συγκεκριμένου είδους φάλαινας από την εξαφάνιση. Μετά την εφαρμογή των μέτρων αυτών ο αριθμός (N) των φαλαινών εκτιμάται ότι θα μεταβάλλεται με τον χρόνο (t) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$N(t) = 3t^3 + 2t^2 - 10t + 600, \ 0 \leqslant t \leqslant 10$$

Να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τον 2ο και 6ο χρόνο, καθώς και πόσες φάλαινες θα υπάρχουν τον 8ο χρόνο.

'Ασκηση 4

Τα οργανικά απόβλητα που ρίχνονται σε έναν υδάτινο αποδέκτη, π.χ. σε μια λίμνη, ελαττώνουν κατ' αρχήν το οξυγόνο της λίμνης έως ότου η φύση δράσει έτσι ώστε να υπάρξει πάλι ισορροπία στο οικοσύστημα. Για ένα τέτοιο οικοσύστημα το οξυγόνο μεταβάλλεται ως προς το χρόνο t ως εξής:

$$f(t) = 100\left(\frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 + 4}\right), 0 \leqslant t < 8$$

Πώς αλλάζει το οξυγόνο 1, 2 και 3 ημέρες μετά τη ρίψη ενός φορτίου οργανικών αποβλήτων;

'Ασκηση 5

Ο αριθμός των μελών ενός γυμναστηρίου που άνοιξε πριν από μερικά χρόνια δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$N(t) = 100(64 + 4t)^{\frac{2}{3}}, 0 \leqslant t \leqslant 52$$

όπου N είναι ο αριθμός των μελών στην αρχή μιας εβδομάδας t. Πώς αυξανόταν ο αριθμός νέων μελών αρχικά (t = 0), και πώς στην αρχή της 40ης εβδομάδας; Ποιός ο αριθμός των μελών τις δύο αυτές χρονικές στιγμές;

'Ασκηση 6

Η μέση συγκέντρωση του CO (μονοξειδίου του άνθρακα) στην ατμόσφαιρα δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 0{,}881443t^4 - 1{,}45533t^3 + 0{,}695876t^2 + 2{,}87801t + 293,\ t \geqslant 0$$

όπου t είναι η μονάδα μέτρησης του χρόνου και παίρνει τιμές t = 0, 1, 2, … και κάθε μονάδα χρόνου αντιστοιχεί σε περίοδο 40 ετών (t = 0 το 1860) και η f μετριέται σε μέρη στο εκατομμύριο ανά κυβικό εκατοστό (ppm/cm^3). Ποιός ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης στην αρχή του αιώνα (t = 1) και στην αρχή του 1990 (t = 3,5);

4.6. Παράγουσα Συνάρτηση

Ας θυμηθούμε ξανά το παράδειγμα του ηλεκτρομαγνητικού τρένου, όπου μελετήσαμε το εξής πρόβλημα:

> «Αν γνωρίζουμε τη θέση του τρένου σε κάθε χρονική στιγμή t, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητά του την ίδια χρονική στιγμή;»

'Οπως είδαμε στην §4.1, αν συμβολίσουμε με f τη συνάρτηση θέσης του τρένου, τότε η ταχύτητά του σε κάθε χρονική στιγμή t, θα είναι η

$f'(t)$, δηλαδή η παράγωγος συνάρτηση της f. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορούμε να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή:

> «Αν γνωρίζουμε την ταχύτητα ενός τρένου σε κάθε χρονική στιγμή t, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση θέσης του την ίδια χρονική στιγμή;»

Έστω ότι η συνάρτηση της ταχύτητας ως προς το χρόνο είναι η $\upsilon(t) = 8t$, για κάθε $t > 0$. Αφού $\upsilon(t) = S'(t)$ θα πρέπει να κάνουμε ακριβώς την αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης, δηλαδή να υπολογίσουμε μια συνάρτηση S, η οποία όταν παραγωγισθεί να μας δώσει τη συνάρτηση της ταχύτητας $\upsilon(t) = 8t$. Μια τέτοια συνάρτηση S είναι η:

$$S(t) = 4t^2, \text{ για } t > 0, \text{ αφού } S'(t) = 8t = \upsilon(t),$$

η οποία ονομάζεται παράγουσα συνάρτηση της υ.

Ορισμός: Έστω συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $F\colon \Delta \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

τότε η F λέγεται παράγουσα συνάρτηση της f στο διάστημα Δ.

Παρατήρηση

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι μια παράγουσα της $\upsilon(t) = 8t$ ήταν η $S(t) = 4t^2$. Θα μπορούσε όμως να ήταν και η $S(t) = 4t^2 + 5$ ή $S(t) = 4t^2 - 32$, αφού πάλι:

$$(4t^2 + 5)' = (4t^2 - 32)' = 8t.$$

Γενικότερα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $S(t) = 4t^2 + c$ είναι παράγουσα της $\upsilon(t)$ για όλες τις τιμές της σταθεράς c.

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχουν και άλλες αρχικές της υ. Η απάντηση είναι αρνητική όπως εκφράζει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, με Δ διάστημα του $\mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f. Τότε οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f είναι της μορφής $F + c$, όπου c σταθερά.

Πίνακας Παραγουσών Βασικών Συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Παράγουσα F
0	c
1	$x + c$
x^{α}, $\alpha \neq -1$, $x > 0$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c$
$\dfrac{1}{x}$, $x > 0$	$\ln x + c$
e^{x}	$e^{x} + c$
$συνx$	$ημx + c$
$ημx$	$-συνx + c$
$\dfrac{1}{συν^2 x}$, $x \neq κπ + \dfrac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$	$εφx + c$
$\dfrac{1}{ημ^2 x}$, $x \neq κπ$, $κ \in \mathbb{Z}$	$-σφx + c$

Παρατήρηση

Η αρχική της συνάρτησης $f(x) = x^{\alpha}$, με $\alpha \neq -1$ και $x > 0$, καλύπτει τρεις κατηγορίες συναρτήσεων:

(i) Δυνάμεις του x, π.χ. η παράγουσα της $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, είναι $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + c$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Κλάσματα δυνάμεων του x, π.χ. η παράγουσα της $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι η $F(x) = \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -\dfrac{1}{x} + c$, $x \in \mathbb{R}^*$.

(iii) Ρίζες του x, π.χ. η παράγουσα της $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x > 0$ είναι η $F(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + c = \dfrac{6}{7} x \sqrt[6]{x} + c$, $x > 0$.

Πίνακας Παραγουσών Σύνθετων Συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Παράγουσα F
$\frac{g'(x)}{g^2(x)},\ g(x) \neq 0$	$-\frac{1}{g(x)} + c$
$\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}},\ g(x) > 0$	$2\sqrt{g(x)} + c$
$\frac{g'(x)}{g(x)},\ g(x) > 0$	$\ln(g(x)) + c$
$g^{\alpha}(x)\, g'(x),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1,\ g(x) > 0$	$\frac{(g(x))^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c$
$e^{g(x)} \cdot g'(x)$	$e^{g(x)} + c$

4.7. Διαφορικές Εξισώσεις

Η παράγωγος μιας συνάρτησης, όπως είδαμε, εκφράζει το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους. Οι περισσότεροι φυσικοί νόμοι παρουσιάζουν σχέσεις μεταξύ των ρυθμών μεταβολής διαφόρων μεγεθών. Στην πραγματικότητα τα περισσότερα φυσικά μοντέλα εκφράζονται ως εξισώσεις, που περιέχουν τις παραγώγους ενός μεγέθους. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται διαφορικές εξισώσεις. Η μελέτη των Διαφορικών Εξισώσεων αποτελεί ένα μεγάλο κεφάλαιο στην Ιστορία των Επιστημών, ενώ αποτελούν τον κλάδο των Μαθηματικών με τις περισσότερες και ίσως σημαντικότερες εφαρμογές στον πραγματικό κόσμο.

Ορισμός 1: Διαφορική εξίσωση λέγεται μια εξίσωση που περιέχει παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης $y = f(x)$.

Δηλαδή, μια διαφορική εξίσωση μπορεί να περιέχει κάποιες από τις παραγώγους της συνάρτησης: y', y'', …, μπορεί να περιέχει την ίδια τη συνάρτηση y, καθώς και την ανεξάρτητη μεταβλητή x, όπως φαίνεται στα ακόλουθα παραδείγματα:

$$x^2y'' + 2xy' + y = x^2 + 2 \qquad (1)$$

$$[f^{(3)}(x)]^2 + 2\,f''(x)\,f'(x) + x^2\,[f'(x)]^3 = 0 \qquad (2)$$

$$[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}} = \kappa y \qquad (3)$$

Ορισμός 2: Ως τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης ορίζουμε την τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται σε αυτή.

Για παράδειγμα, έχουμε στις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις ότι η διαφορική εξίσωση (1) είναι δεύτερης τάξης, η (2) είναι τρίτης τάξης, ενώ η (3) είναι πρώτης τάξης.

Ορισμός 3: Ως λύση μιας διαφορικής εξίσωσης ν-οστής τάξης, θεωρούμε κάθε συνάρτηση που είναι ν-φορές παραγωγίσιμη και την ικανοποιεί.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y = cx^2$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $xy' = 2y$.

- **Προβλήματα Αρχικών Τιμών**

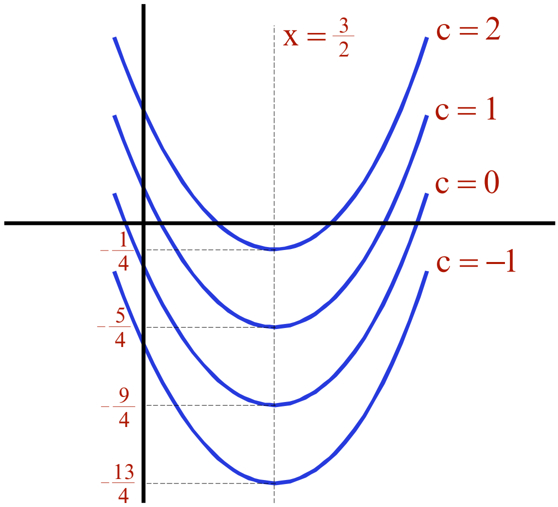
Το βασικό πρόβλημα στην επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης είναι ότι ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης – χρησιμοποιώντας δηλαδή την παράγουσα συνάρτηση – καταλήγουμε όχι σε μία, αλλά σε άπειρες λύσεις που εξαρτώνται από την τιμή μιας σταθεράς.

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $f'(x) = 2x - 3$.

Λύση

Η παράγουσα της f' είναι η $f(x) = x^2 - 3x + c$ και είναι λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης για όλες τις τιμές της σταθεράς c. Καταλήξαμε λοιπόν σε άπειρες λύσεις της μορφής:



Για να καταλήξουμε σε μοναδική λύση του προβλήματος, δηλαδή σε μοναδική τιμή της σταθεράς c, χρειαζόμαστε για το συγκεκριμένο παράδειγμα, μια επιπλέον τιμή για τη συνάρτηση $y = f(x)$, π.χ. $f(1) = 0$. Τότε θα έχουμε ότι $c = 2$ και η μοναδική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Η τιμή αυτή της f καλείται αρχική τιμή και το πρόβλημα που περιέχει μια διαφορική εξίσωση και κάποιες αρχικές τιμές καλείται πρόβλημα αρχικών τιμών.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

'Εστω F(x) μια παράγουσα της f(x).

(α) Να αποδείξετε ότι η παράγουσα της $f(\alpha x + \beta)$ είναι η $\frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + c$.

(β) Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων $f(x) = e^{\alpha x + \beta}$ και $g(x) = (\alpha x + \beta)^{\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση

(α) 'Εχουμε ότι:

$$\left(\frac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha}+c\right)' = \frac{F'(\alpha x+\beta)}{\alpha}(\alpha x+\beta)' = \frac{\alpha F'(\alpha x+\beta)}{\alpha} = f(\alpha x+\beta)$$

(β) Η παράγουσα της $f(x) = e^{\alpha x+\beta}$ είναι η $F(x) = \frac{e^{\alpha x+\beta}}{\alpha} + c$, ενώ της $g(x) = (\alpha x+\beta)^{\nu}$ είναι η $G(x) = \frac{(\alpha x+\beta)^{\nu+1}}{(\nu+1)\alpha} + c$.

Εφαρμογή 2 *(Μοντέλα Απεριόριστης Ανάπτυξης)*

Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον ότι η μορφή συγκεκριμένων διαφορικών εξισώσεων χαρακτηρίζουν πολλές εφαρμογές τους από την πραγματικότητα. Ας θεωρήσουμε δύο μεγέθη x, y που συνδέονται από τη θετική συνάρτηση f ώστε $y = f(x)$. Τότε η διαφορική εξίσωση:

$$y' = Ky$$

περιγράφει μαθηματικά μοντέλα απεριόριστης ανάπτυξης. Η θετική σταθερά K ονομάζεται σταθερά αναλογίας.

Ας επιλύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση. 'Εχουμε ότι:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} = K \quad \text{ή} \quad (\ln f(x))' = (Kx)'$$

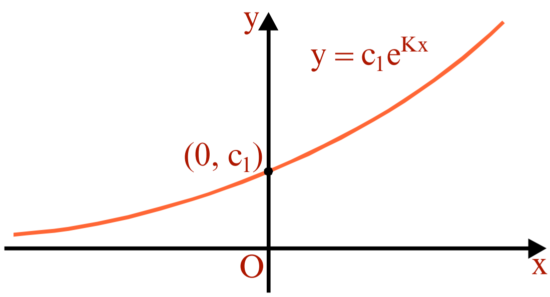
Επομένως:

$$\ln(f(x)) = Kx + c \quad \text{ή} \quad f(x) = e^{Kx+c} = e^c e^{Kx}$$

Η ποσότητα e^c παραμένει θετική σταθερά και τη συμβολίζουμε με c_1. Επομένως, η λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$y = f(x) = c_1 e^{Kx}$$

και αυξάνεται απεριόριστα.



Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c_1, χρειάζεται και μια αρχική συνθήκη.

***Εφαρμογή 3** (Μοντέλα Περιορισμένης Ανάπτυξης)*

Ας θεωρήσουμε κατόπιν μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$y' = K(c - y)$$

όπου K, c θετικές σταθερές και $y = f(x) < c$. Για να επιλύσουμε τη διαφορική αυτή εξίσωση, αρκεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = c - f(x) \quad ή \quad f(x) = c - g(x).$$

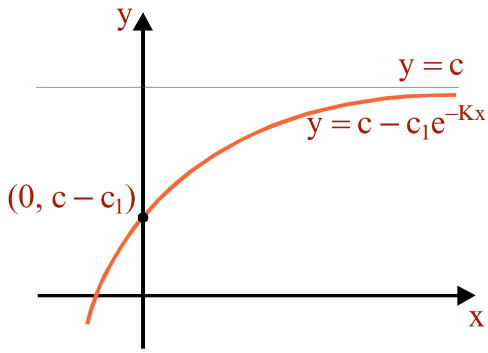
Τότε, αντικαθιστώντας στη δοσμένη διαφορική εξίσωση θα έχουμε ότι:

$$(c - g(x))' = K(c - c + g(x)) \quad ή \quad g'(x) = -Kg(x).$$

Λύνοντας όπως στο προηγούμενο μοντέλο έχουμε ότι:

$$g(x) = c_1 e^{-Kx} \quad ή \quad c - f(x) = c_1 e^{-Kx} \quad ή \quad f(x) = c - c_1 e^{-Kx}$$

η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = c$, όταν $x \to +\infty$ (βλ. Σχήμα).



Εφαρμογή 4

Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού P ως προς το χρόνο έχει περιγραφεί σε πολλά διαφορετικά μοντέλα στη βιβλιογραφία, π.χ. η κλασική εξίσωση του Malthus:

$$P' = KP \qquad (M)$$

ή η λογιστική καμπύλη περιορισμένης ανάπτυξης:

$$P' = r(M - P)P \quad (r = \text{σταθερά}, M = \text{μέγιστος πληθυσμός}) \qquad (\Lambda)$$

Επίσης δίνεται ότι για $t = t_0$ ισχύει ότι $P = P_0$. Να εκφράσετε τον πληθυσμό P ως συνάρτηση του χρόνου για τα δύο μοντέλα.

Λύση

Μοντέλο του Malthus

Είναι (βλ. Εφαρμογή 2): $\ln P = Kt + c$.

Για $t = t_0$, έχουμε ότι $\ln P_0 = Kt_0 + c$ ή $c = \ln P_0 - Kt_0$. Επομένως:

$$\ln P = Kt + \ln P_0 - Kt_0 \quad \text{ή} \quad \ln\frac{P}{P_0} = K(t - t_0) \quad \text{ή} \quad P = P_0 e^{K(t-t_0)}.$$

Λογιστικό Μοντέλο

'Εχουμε ότι (βλ. Εφαρμογή 3):

$$\ln\frac{P}{M-P} = rMt + c$$

Για $t = t_0$ ισχύει $P = P_0$ και $c = \ln\dfrac{P_0}{M-P_0} - rMt_0$, οπότε τελικά έχουμε (για $P < M$) ότι:

$$\ln\frac{P}{M-P} - \ln\frac{P_0}{M-P_0} = rM(t-t_0) \quad \text{ή} \quad \ln\frac{P(M-P_0)}{P_0(M-P)} = rM(t-t_0) \quad \text{ή}$$

$$P(t) = \frac{P_0 M e^{rM(t-t_0)}}{M - P_0 + P_0 e^{rM(t-t_0)}}$$

Το λογιστικό μοντέλο εκφράζει καλύτερα την πραγματικότητα, όπως προκύπτει από σύγκριση με εκτενή πειραματικά δεδομένα.

Εφαρμογή 5

Να αποδειχθεί ο γνωστός από τη Φυσική τύπος που συνδέει την απόσταση S με την επιτάχυνση γ και το χρόνο t:

$$S = \frac{1}{2}\gamma t^2 + \upsilon_0 t + S_0$$

όπου υ_0 είναι η αρχική ταχύτητα (για $t = 0$) και S_0 η αρχική θέση του κινητού.

Λύση

Η επιτάχυνση δίνεται από τη δεύτερη παράγωγο της απόστασης ως προς το χρόνο:

$$\gamma = S''(t) \tag{1}$$

ενώ η ταχύτητα υ είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ως προς το χρόνο: $\upsilon(t) = S'(t)$. 'Αρα, από την (1) έχουμε ότι:

$$S'(t) = \gamma t + c \tag{2}$$

Η σταθερά c μπορεί να υπολογισθεί από την αρχική συνθήκη για $t = 0$, όπου:

$$\upsilon(0) = \upsilon_0 = c = \text{αρχική ταχύτητα.}$$

Επομένως $S'(t) = \gamma t + \upsilon_0$ και έχουμε ότι: $S(t) = \gamma \frac{t^2}{2} + \upsilon_0 t + c_1$.

Για t = 0 βρίσκουμε ότι: $c_1 = S(0) = S_0$ = αρχική θέση, οπότε καταλήγουμε ότι:

$$S(t) = \frac{\gamma t^2}{2} + \upsilon_0 t + S_0$$

Παρατήρηση

Αν $S_0 = \upsilon_0 = 0$ το S δίνεται από την απλή σχέση: $S = \frac{1}{2}\gamma t^2$.

Εφαρμογή 6

Ο 20ος αιώνας μπορεί να θεωρηθεί επαναστατικός, ανάμεσα στα άλλα, και από την οπτική γωνία του πλήθους νέων χημικών προϊόντων που παρασκευάσθηκαν. Κλειδί για την παρασκευή τους η "χημική αντίδραση" π.χ.

$$nA \rightarrow \text{προϊόντα} \quad (n = \text{τάξη αντίδρασης}) \qquad (1)$$

Η μεταβολή της σύστασης x του συστατικού A (ή των συστατικών αν είναι περισσότερα από ένα) με το χρόνο t παρίσταται από μια διαφορική εξίσωση, π.χ. για την (1):

$$x' = K(\alpha - x)^n$$

όπου K η σταθερά ταχύτητας, α η αρχική συγκέντρωση και n η τάξη της αντίδρασης. Να υπολογίσετε τη μεταβολή του x ως προς t για τις εξής περιπτώσεις:

(α) μηδενικής τάξης αντίδραση (n = 0)

(β) 1ης τάξης αντίδραση (n = 1)

Λύση

(α) 'Εχουμε ότι $x' = K$ ή $x = Kt + c$.

Για t = 0 είναι προφανές ότι x = 0 (δεν έχει αντιδράσει καθόλου το συστατικό A) άρα c = 0 και $\boxed{x(t) = Kt}$.

(β) 'Εχουμε ότι:

$$x' = K(\alpha - x) \quad \text{ή} \quad \frac{(\alpha - x)'}{\alpha - x} = -K \quad \text{ή} \quad \ln(\alpha - x) = -Kt + c.$$

Για t = 0 έχουμε x = 0, οπότε c = lnα. 'Αρα:

$$\ln(\alpha - x) = -Kt + \ln\alpha \quad \text{ή} \quad \ln\frac{\alpha}{\alpha - x} = Kt \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\alpha - x} = e^{Kt} \quad \text{ή}$$

$$\boxed{x(t) = \alpha(1 - e^{-Kt})}.$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να υπολογίσετε την παράγουσα των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = \frac{1}{x+2}$, για $x > -2$

(ii) $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, για $x \neq 0$

(iii) $f_3(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, για $x \neq 0$

(iv) $f_4(x) = εφ^2x$, για $x \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$

'Ασκηση 2

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις της δεύτερης στήλης είναι οι παράγουσες των συναρτήσεων της πρώτης:

Συνάρτηση f	**Παράγουσα F**
σφx, για ημx > 0	ln(ημx), για ημx > 0
lnx, για x > 0	x(lnx – 1), για x > 0

'Ασκηση 3

Να βρεθεί η παράγουσα των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = α^x$, με $0 < α \neq 1$

(ii) $f_2(x) = \log_α x$, για $x > 0$ και $0 < α \neq 1$

(iii) $f_3(x) = 1 + εφ^2x$, για $x \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$

'Ασκηση 4

Να υπολογίσετε την παράγουσα συνάρτηση της $f(x) = \frac{1}{1 + ημx}$, $x \neq 2κπ - \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ με $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

'Ασκηση 2

'Εστω συνάρτηση $y = f(x)$ με $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f(0) = \ln 2$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$e^{-x}(y' - y) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

'Ασκηση 3

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $y = f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε ότι $y' = 2x^3 - 3$ και ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

'Ασκηση 4

Δίνεται συνάρτηση $y = f(x)$, με $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} f''(x) = 2x + 5 \\ f'(1) = 2 \\ f(1) = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

'Ασκηση 5

Να βρεθεί μια διαφορική εξίσωση 1ης τάξης και μια 2ης, τις οποίες ικανοποιεί η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

'Ενας καπετάνιος ιστιοπλοϊκού χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις του δρομόμετρου (όργανο που μετράει την ταχύτητα του σκάφους) καταλήγει ότι η ταχύτητα του σκάφους του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$υ(t) = \frac{e^{\frac{t}{10}}}{100} \text{ ναυτικά μίλια/min}, \quad \text{για } 0 \leqslant t \leqslant 30$$

Να βρεθεί η συνάρτηση θέσης του ιστιοπλοϊκού και να βρεθεί πόσα μίλια διήνυσε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 10$ min έως $t = 20$ min.

'Ασκηση 2

Η τωρινή κυκλοφορία του περιοδικού ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β′ της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας είναι 300 αντίγραφα την εβδομάδα. Η ΕΜΕ υπολογίζει ότι το περιοδικό θα αυξήσει την κυκλοφορία του με ρυθμό $\frac{1}{5}\sqrt[5]{t^4} + \frac{2}{9}$ τεύχη ανά εβδομάδα (θεωρώντας πάντα τον κοντινότερο ακέραιο αριθμό τευχών), τα επόμενα τρία χρόνια. Ποιά θα είναι η κυκλοφορία του περιοδικού μετά από 32 εβδομάδες;

'Ασκηση 3

Στην Αθήνα μια καλοκαιρινή ημέρα, το μονοξείδιο του άνθρακα είναι 2 μέρη στο εκατομμύριο (ppm). Το Υπουργείο Περιβάλλοντος προβλέπει ότι αν δεν παρθούν αυστηρά μέτρα κατά του νέφους, η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα στην ατμόσφαιρα θα αυξάνεται με ρυθμό:

$$\frac{1}{1000}(t^2 + 20t + 100) \text{ μέρη ανά εκατομμύριο (ppm)}$$

σε t χρόνια από τώρα. Ποιά θα είναι η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα σε 3 χρόνια από σήμερα;

'Ασκηση 4

Το γνωστό σύστημα "εκκρεμές – μάζα" περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$mx'' = -kx$$

όπου x η απόσταση ως συνάρτηση του χρόνου t και k σταθερά.

Να αποδείξετε ότι μια λύση που ικανοποιεί αυτή τη διαφορική είναι της μορφής:

$$x = c_1 \text{ συν}(\omega t) + c_2 \text{ ημ}(\omega t)$$

με $\omega^2 = \frac{k}{m}$ και c_1, c_2 σταθερές.