

# Διδακτικές Οδηγίες

## Α. Γενικοί Στόχοι του Βιβλίου

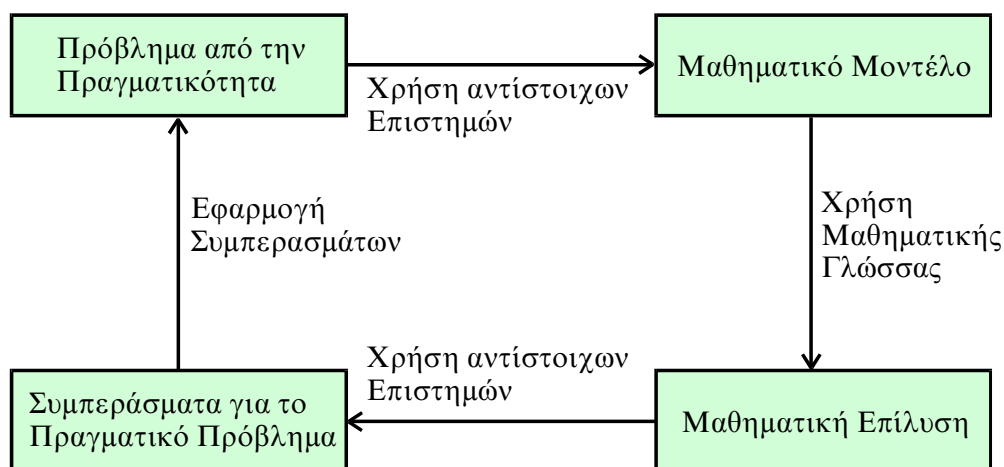
Οι βασικοί στόχοι του παρόντος βιβλίου καθορίζονται ουσιαστικά από το γεγονός ότι απευθύνεται σε μαθητές των Τεχνικών Επαγγελματικών Εκπαιδευτηρίων (Τ.Ε.Ε.). Για το λόγο αυτό δε δόθηκε ιδιαίτερη βαρύτητα στην αυστηρή μαθηματική δομή και αποδεικτική διαδικασία, αλλά στη σύλληψη εννοιών, σχέσεων και ιδιοτήτων που συντελούν στην κατανόηση και επίλυση πραγματικών προβλημάτων μέσα από τη μαθηματική γλώσσα. Είναι πολύ σημαντική η χρήση της γλώσσας αυτής, η οποία χαρακτηρίζεται από τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια και λιτότητα στη ζωή.

Η απουσία της αποδεικτικής διαδικασίας, δεν επηρεάζει την πληρότητα και συνέπεια της μαθηματικής δομής. Ωστόσο, η επιμονή σε εισαγωγικά παραδείγματα οδηγεί στην κατανόηση και αναγκαιότητα κάθε νέας μαθηματικής έννοιας, ενώ με μεγάλη προσοχή παρουσιάζεται η σύνδεσή της με τα επόμενα. Η θεωρία παρουσιάζεται απέριτη με στόχο να διδάσκεται πλήρης μέσα στην τάξη.

Το αμέσως επόμενο βήμα της εκπαιδευτικής διαδικασίας αποτελούν οι λυμένες εφαρμογές, οι οποίες εμπεριέχουν θέματα διαφορετικής μορφής και διαβάθμισης. Το πρώτο είδος θεμάτων που συναντάμε στις εφαρμογές είναι ασκήσεις μεθοδολογίας, δηλαδή ασκήσεις που εισάγουν τον μαθητή στον τρόπο χρήσης των εννοιών που μόλις διδάχθηκε από τη θεωρία. Τις εφαρμογές αυτές είναι θεμιτό να επαναλαμβάνει ο μαθητής στην προσωπική του μελέτη. Μια δεύτερη μορφή εφαρμογών είναι αυτές που οδηγούν σε ένα λίγο πιο δύσκολο επίπεδο μαθηματικής μελέτης, με στόχο την άνοδο του επιπέδου της τάξης και τη δυνατότητα μεγαλύτερης τριβής με τις προτεινόμενες ασκήσεις που ακολουθούν. Τέλος, μια τρίτη μορφή εφαρμογών αποτελεί η εισαγωγή μαθηματικών μοντέλων από διάφορες επιστήμες. Οι εφαρμογές αυτές απαιτούν ιδιαίτερη προετοιμασία από τον καθηγητή και προσπάθεια μιας συγκροτημένης παρουσίασης. Ο διδακτικός στόχος των εφαρμογών αυτών, δεν είναι οι μαθητές να πλατιάσουν τις γνώσεις τους ή να ασχοληθούν με άλλες επιπρόσθετες γνώσεις από διάφορες επιστήμες, αλλά η αναγνώριση του μαθηματικού μοντέλου μέσα από "περίεργες" εκφωνήσεις, άγνωστες έννοιες και διαφορετικές ορολογίες από άλλες επιστήμες και τελικά η χρήση της μαθηματικής γλώσσας για την επίλυση των προβλημάτων αυτών.

Δεν κρίνεται λοιπόν απαραίτητη η εκτενής ανάλυση της προέλευσης του μαθηματικού μοντέλου, ούτε η γνώση των εννοιών άλλων επιστημών από τους μαθητές, καθώς μας ενδιαφέρει η ουσιαστική αναγνώριση και χρήση των μαθηματικών εννοιών που κρύβει μέσα του το μαθηματικό μοντέλο. Οι εφαρμογές αυτές ανταποκρίνονται στις ακόλουθες προτεινόμενες πρακτικές εφαρμογές και αποτελούν τη βασική αιτιολόγηση της Μαθηματικής επιστήμης στους μαθητές.

Οφείλουμε να τονίσουμε το γνωστό βασικό σχεδιασμό ενός μαθηματικού μοντέλου στους μαθητές:



Μέσω των, διαφορετικής μορφής, εφαρμογών οδηγούμαστε να προτείνουμε αντίστοιχες ασκήσεις, οι οποίες χωρίζονται σε τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες, με εσωτερική διαβάθμιση:

1. **Ασκήσεις εμπέδωσης**, οι οποίες είναι απλές και πρέπει να δίνονται στους μαθητές στο σύνολό τους για επίλυση σε επίπεδο προσωπικής μελέτης.
2. **Σύνθετες ασκήσεις**, οι οποίες είναι καθαρά μαθηματικού περιεχομένου, αλλά σε ένα δυσκολότερο επίπεδο από τις προηγούμενες. Ο καθηγητής είναι αυτός που θα καθορίσει την επιλογή αυτών που θα αναθέσει στους μαθητές και αυτών που θα παρουσιάσει στην τάξη, ανάλογα με το επίπεδο της τάξης.
3. **Πρακτικές εφαρμογές**, στο πνεύμα της σύνδεσης των μαθηματικών μοντέλων με την πραγματικότητα. Κρίνεται απαραίτητη η επίλυση τέτοιων θεμάτων μέσα στην τάξη, προτού δοθούν στους μαθητές.

- 4. Γενικές Ασκήσεις**, οι οποίες είτε πρέπει εξ ολοκλήρου να παρουσιάζονται από τον καθηγητή - λόγω του αυξημένου βαθμού δυσκολίας τους - είτε να ανατίθενται σε ομάδες μαθητών ως δραστηριότητα ή συνθετική εργασία, με κατάλληλες υποδείξεις και συνεχή βοήθεια από τον καθηγητή.

Τέλος, κάθε κεφάλαιο κλείνει με μια ιδιαίτερα χρήσιμη ανακεφαλαίωση και ερωτήσεις κατανόησης, τα οποία προτείνεται να γίνονται μέσα στην τάξη, μετά από παραίνεση του καθηγητή για επανάληψη της διδακτικής ενότητας. Κατά τον τρόπο αυτό θα συντελέσουν ουσιαστικά στη συγκροτημένη θεώρηση της ύλης από τους μαθητές.

Το προηγούμενο διδακτικό πλάνο, απετέλεσε τον κύριο μοχλό διαμόρφωσης της δομής του παρόντος βιβλίου.

## **B. Η Μαθηματική Δομή του Βιβλίου**

Το βιβλίο αυτό αποτελείται από πέντε κεφάλαια, τα οποία απαρτίζουν ενιαίες θεματικές ενότητες και παρουσιάζουν κομμάτια από τρεις διαφορετικούς μαθηματικούς κλάδους: της Άλγεβρας, της Στατιστικής και της Ανάλυσης. Πιο αναλυτικά, έχουμε την εξής παρουσίαση:

### **Κεφάλαιο 1: Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα**

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αρχικά η έννοια του πίνακα ως μία ορθογώνια διάταξη αριθμών που παρέχει κάποιες πληροφορίες για τα στοιχεία του. Η ισότητα και οι απλές μορφές πινάκων κλείνουν την πρώτη ενότητα και ακολουθούν εφαρμογές με τις οποίες οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τη χρησιμότητα του πίνακα.

Στην επόμενη θεματική ενότητα παρουσιάζονται η πρόσθεση και αφαίρεση πινάκων καθώς και οι ιδιότητές τους. Επίσης παρουσιάζεται ο πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με πίνακα και οι ιδιότητες της πράξης αυτής. Τα εισαγωγικά παραδείγματα είναι χαρακτηριστικά για να αντιληφθούν οι μαθητές το μηχανισμό πρόσθεσης – αφαίρεσης καθώς και τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα. Στο ίδιο πνεύμα παρουσιάζονται και μερικές από τις εφαρμογές αυτών των δύο παραγράφων.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται με αναλυτικό τρόπο ο πολλαπλασιασμός πινάκων ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές το μηχανισμό της πράξης αυτής. Μέσα από τα παραδείγματα οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι μπορεί να ορίζεται η πράξη  $A \cdot B$ , όχι όμως η πράξη  $B \cdot A$ , δη-

λαδή ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, επομένως δεν ισχύουν ιδιότητες στον πολλαπλασιασμό πινάκων αντίστοιχες εκείνων που ισχύουν στον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών. Ακολουθούν οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων και ορίζεται ο μοναδιαίος πίνακας.

Τέλος, παρουσιάζεται η ενότητα των γραμμικών συστημάτων όπου αρχικά δίνονται οι έννοιες της γραμμικής εξίσωσης – γραμμικού συστήματος και ορισμοί που θα βοηθήσουν στην κατανόηση της επίλυσής τους. Γίνεται παρουσίαση γραμμικού συστήματος με τη βοήθεια πινάκων και επίλυση αυτού με τη μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών (Gauss). Η παρουσίαση του αλγορίθμου γίνεται ταυτόχρονα με δύο μορφές, δηλαδή με πράξεις μεταξύ εξισώσεων του συστήματος και με γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος. Στις εφαρμογές που ακολουθούν αναφέρονται σοβαρές παρατηρήσεις που πρέπει να γνωρίζει ο μαθητής όταν θα επιλύσει γραμμικό σύστημα απλό ή ομογενές με τη μέθοδο Gauss.

## Κεφάλαιο 2: Περιγραφική Στατιστική

Η Στατιστική έχει σήμερα ιδιαίτερη σημασία για τον πολίτη, ο οποίος κατακλύζεται από ένα σύνολο στατιστικών πληροφοριών, και πρέπει να είναι σε θέση να τις κατανοεί, αλλά συγχρόνως να στέκεται κριτικά απέναντί τους.

Τα άμεσα συμπεράσματα από μια στατιστική παράσταση δεν είναι πάντοτε αντικειμενικά (π.χ. διάφορες δημοσκοπήσεις). Για το λόγο αυτό, η χρησιμοποίηση της μαθηματικής γλώσσας είναι επιβεβλημένη ώστε να αποφεύγονται παρερμηνείες ή λάθη.

Το κεφάλαιο αυτό είναι μια εισαγωγή στην Περιγραφική Στατιστική και μπορεί να διαιρεθεί σε έξι μέρη.

Στο πρώτο μέρος (§ 2.1) γίνεται μια πρώτη εισαγωγή στην έννοια του στατιστικού πληθυσμού – δείγματος και στην έννοια της μεταβλητής (ποιοτική – ποσοτική – διακριτή – συνεχής).

Στο δεύτερο μέρος (§ 2.2) περιγράφονται οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να παρουσιαστεί η κατανομή συχνότητας (σχετικών – αθροιστικών – σχετικών αθροιστικών) ποιοτικής ή διακριτής μεταβλητής και των αντίστοιχων διαγραμμάτων.

Στο τρίτο μέρος (§ 2.3) παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να παρουσιασθεί η κατανομή των συχνοτήτων σε συνεχείς μεταβλητές και των αντίστοιχων ιστογραμμάτων.

Στο τέταρτο μέρος (§ 2.4) ορίζονται οι παράμετροι θέσης μιας κατανομής (επικρατούσα τιμή – μέση τιμή – διάμεσος) και πως υπολογίζονται αυτές.

Στο πέμπτο μέρος (§ 2.5) ορίζονται οι παράμετροι διασποράς μίας κατανομής και πως υπολογίζονται αυτές.

Τέλος, στο έκτο μέρος (§ 2.6) παρουσιάζεται ο συντελεστής μεταβλητότητας που είναι ουσιαστικά ένα μέτρο της ομοιογένειας το δείγματος.

Η εισαγωγή όλων των εννοιών του κεφαλαίου αυτού γίνεται μέσω εισαγωγικών παραδειγμάτων.

### **Κεφάλαιο 3: Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης**

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αρχικά η έννοια του ορίου συνάρτησης, έτσι ώστε ο μαθητής να κατανοήσει τη σύγκλιση υπολογιστικά (με πίνακα τιμών) αλλά και εποπτικά (με τη γραφική της παράσταση). Μελετούνται οι αλγεβρικές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης, καθώς και η έννοια των πλευρικών ορίων. Η πρώτη θεματική ενότητα κλείνει με τη μελέτη μη πεπερασμένων ορίων, την αναγνώριση και αντιμετώπιση απροσδιόριστης μορφής  $\left(\frac{0}{0}\right)$  για συγκεκριμένες συναρτήσεις και την εφαρμογή αυτών στον προσδιορισμό των κατακόρυφων ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Στην επόμενη θεματική ενότητα μελετάται η έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Πρώτα, εξετάζουμε τη συνέχεια συνάρτησης σε σημείο και αναλυτικά τα είδη των σημείων ασυνέχειας. Τέλος, παρουσιάζονται η συνέχεια συνάρτησης σε ανοιχτό και κλειστό διάστημα, η συνέχεια βασικών συναρτήσεων και οι ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων.

Το κεφάλαιο κλείνει με τη μελέτη ορίου συνάρτησης στο άπειρο και την αντιμετώπιση της απροσδιόριστης μορφής  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$  για πολυωνμικές και ρητές συναρτήσεις. Το όριο στο άπειρο βρίσκει κατόπιν εφαρμογή στη μελέτη των οριζόντιων ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

### **Κεφάλαιο 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού**

Η θεματική αυτή ενότητα ξεκινά με την έννοια της παραγώγου, συνδέοντάς την με το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους, απεμπλέκο-

ντάς την ωστόσο από τη σχέση της με την ύπαρξη και την κλίση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Προτείνεται να τονισθεί η σύνδεση της παραγώγου με τις μεταβολές στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, καθώς επίσης και η παρατήρηση για τα γωνιακά σημεία, ώστε οι μαθητές να αναγνωρίζουν άμεσα τα σημεία στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη μια συνάρτηση στη γραφική της παράσταση.

Κατόπιν ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση σε ανοιχτό και κλειστό διάστημα, καθώς και ο λογισμός με παραγώγους, αφού πρώτα παρουσιάζονται οι παράγωγοι βασικών συναρτήσεων. Τέλος, ορίζονται σύντομα οι παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Στην επόμενη παράγραφο αναπτύσσεται η έννοια της παράγουσας συνάρτησης ως αντίστροφη διαδικασία της παραγωγίσιμης και δίνονται οι πίνακες παραγουσών βασικών συναρτήσεων και σύνθετων συναρτήσεων. Με τη χρήση των παραγουσών οδηγούμαστε στις διαφορικές εξισώσεις, δίνοντας έμφαση στα προβλήματα αρχικών τιμών, λόγω των μεγάλων εφαρμογών τους σε πραγματικά προβλήματα.

Το κεφάλαιο κλείνει με τη μελέτη της μονοτονίας και των ακροτάτων μιας συνάρτησης, μέσα από τη μελέτη της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στη χρήση του κριτηρίου 2<sup>ης</sup> παραγώγου για την εξακρίβωση του αν ένα στάσιμο σημείο είναι τελικά ακρότατο.

## **Κεφάλαιο 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού**

Το κεφάλαιο αυτό ξεκινά με τη σύνδεση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος με το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας θετικής συνάρτησης, τον άξονα  $x$  και τις ευθείες  $x = a$  και  $x = b$ , μέσα από κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα και μετά παρουσιάζονται οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Κατόπιν, μελετάμε τις μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων, μέσα από την ανακάλυψη της παράγουσας (εδώ πρέπει να γίνει υπενθύμιση των αντίστοιχων πινάκων του κεφαλαίου 4 και της εφαρμογής 7, § 4.2 – 4.5), καθώς και με την ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Το κεφάλαιο κλείνει με τον αναλυτικό υπολογισμό του εμβαδού οποιουδήποτε επιπέδου χωρίου.

## Γ. Γενικές Οδηγίες

Πριν από τις οδηγίες που ακολουθούν κατά κεφάλαιο για τη διδασκαλία, οι διδάσκοντες πρέπει να λάβουν υπόψη ότι:

1. Η ακριβής διατύπωση των σχέσεων μεταξύ των μαθηματικών εννοιών αποτελεί βασικό κριτήριο ικανότητας εφαρμογής της μαθηματικής γλώσσας.
2. Το βιβλίο αποτελείται από τρεις διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών, οι οποίοι πρέπει να αντιμετωπισθούν με διαφορετική διδακτική λογική.
3. Ο ρυθμός διδασκαλίας στις βασικές πρωτοεισαγόμενες έννοιες πρέπει να είναι αργός και κατόπιν μπορεί να επιταχυνθεί κατά την κρίση του διδάσκοντα.
4. Το διδακτικό βιβλίο είναι το βιβλίο που χρησιμοποιεί ο μαθητής και πολλές φορές μοναδικό. Για το λόγο αυτό ο διδάσκων δε μπορεί να το παραβλέπει.
5. Σε κάθε ενότητα πρέπει να τονίζονται τα στοιχεία που συνθέτουν την αυτοτέλειά της και να εξασφαλίζονται τα στοιχεία υποδομής που θα χρειασθούν αργότερα. Ο διδάσκων έχει την ευχέρεια να αλλάξει τη σειρά, αν θέλει να εμφανίσει μια δομή του όλου πριν εξετάσει λεπτομερώς κάθε παράγραφο ή έννοια.
6. Οι ώρες που αναφέρονται σε κάθε κεφάλαιο είναι ενδεικτικές. Προσαρμόζονται ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών. Ο προγραμματισμός πρέπει να αναπροσαρμόζεται από τον διδάσκοντα ώστε να ολοκληρώνεται η διδακτέα ύλη στις εκάστοτε προβλεπόμενες ώρες ανά τάξη.
7. Αν σε κάποια ενότητα διατεθούν περισσότερες ώρες η εμπέδωση και καλύτερη κατανόηση ίσως βοηθήσει ώστε σε κάποια άλλη ενότητα να διατεθούν λιγότερες ώρες. Υποτίθεται ότι ο διδάσκων έχει κάνει έναν αρχικό προγραμματισμό τον οποίο αναπροσαρμόζει κατά χρονικά διαστήματα.
8. Οποιοιδήποτε όροι ή φράσεις δε βοηθούν τους μαθητές στην κατανόηση των κειμένων θα πρέπει να εξηγούνται στους μαθητές και να ζητείται από αυτούς η αναδιατύπωσή τους.
9. Κύριος στόχος του βιβλίου αποτελεί η ευκολία στη χρήση των μαθηματικών εννοιών και η σύνδεση αυτών με πραγματικά προβλήματα.



## Δ. Οδηγίες κατά Κεφάλαιο

### Κεφάλαιο 1: Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

- **Προτεινόμενες Διδακτικές Ώρες:** 15

- **Θεματικές Ενότητες ανά Παραγράφους**

1<sup>η</sup> ενότητα: § 1.1 – 1.3

2<sup>η</sup> ενότητα: § 1.4 – 1.5

3<sup>η</sup> ενότητα: § 1.6

4<sup>η</sup> ενότητα: § 1.7

- **Ενδεικτικός Προγραμματισμός**

§ 1.1 – 1.3 : 1 διδακτική ώρα

§ 1.4 : 1 διδακτική ώρα

§ 1.5 : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 2 διδακτικές ώρες

§ 1.6 (Ορισμός και παραδείγματα) : 1 διδακτική ώρα

§ 1.6 (Ιδιότητες πολ/μού – δύναμη πίνακα – μοναδιαίος πίνακας) : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 2 διδακτικές ώρες

§ 1.7 : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 2 διδακτικές ώρες

Γενικές Ασκήσεις : 2 διδακτικές ώρες

Ανακεφαλαίωση – Ερωτήσεις Κατανόησης : 1 διδακτική ώρα

- **Διδακτικοί Στόχοι**

1. Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια και τη χρησιμότητα του πίνακα.
2. Να μπορούν οι μαθητές να εκφράζουν πληροφορίες με μορφή πινάκων, να βγάζουν συμπεράσματα από πίνακες δεδομένων, να παραβάλουν – συγκρίνουν πίνακες.
3. Να γνωρίζουν τις μορφές των πινάκων.
4. Να μπορούν να εκτελούν πράξεις με πίνακες και να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων.



5. Να κατανοήσουν μέσα από παραδείγματα ότι στο σύνολο των πινάκων δεν ισχύουν πάντα όλες οι γνωστές ιδιότητες που ισχύουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή ότι η δομή τους είναι διαφορετική.
  6. Να αντιληφθούν μέσα από πρακτικά προβλήματα και εφαρμογές τη χρησιμότητα των πινάκων και των πράξεών τους ως μαθηματικό μοντέλο επίλυσης αυτών των προβλημάτων.
  7. Να μπορούν να επιλύσουν ένα γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss, είτε με πράξεις μεταξύ των εξισώσεων του συστήματος, είτε με γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος.
  8. Να μπορούν να επιλύσουν πρόβλημα, μετατρέποντας τα δεδομένα του σε γραμμικό σύστημα.
- **Οδηγίες για τη Διδασκαλία**

Για την πρώτη θεματική ενότητα (§ 1.1 – 1.3) είναι χρήσιμο να επιμείνουμε στην έννοια του πίνακα ως μέσο πληροφοριών, ως μαθηματικό μοντέλο δηλαδή από το οποίο παίρνουμε πληροφορίες για τα στοιχεία του και αντλούμε συμπεράσματα απ' όλο τον πίνακα. Να τονισθεί ότι, στις πρακτικές εφαρμογές μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιούν αριθμητικό ή επιστημονικό υπολογιστή, όπου χρειάζεται.

Για τη δεύτερη θεματική ενότητα (§ 1.4 – 1.5) είναι θεμιτό να επιμείνουμε στην κατανόηση των πράξεων πρόσθεσης πινάκων και πολλαπλασιασμού αριθμού επί πίνακα και τις ιδιότητές τους. Πρέπει και εδώ ο καθηγητής να επιμείνει στις πρακτικές εφαρμογές ώστε να κατανοούν σιγά-σιγά οι μαθητές τη χρήση μαθηματικού μοντέλου στα απλά προβλήματα.

Στην τρίτη θεματική ενότητα (§ 1.6) παρουσιάζεται ο πολλαπλασιασμός πινάκων που είναι η δυσκολότερη από τις παρουσιαζόμενες πράξεις και πρέπει μέσα από πρακτικά παραδείγματα ο καθηγητής να επιμείνει ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν πλήρως το μηχανισμό της πράξης αυτής. Επίσης πρέπει να γίνει κατανοητό από τους μαθητές ότι μόνο  $m \times r$  και  $r \times n$  τύπου πίνακες πολλαπλασιάζονται και ότι δεν ισχύουν γνωστές ιδιότητες του  $\mathbb{R}$  στον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Τέλος, στην τέταρτη θεματική ενότητα (§ 1.7) πρέπει ο μαθητής να μπορεί να μετατρέπει γραμμικό σύστημα στην εξίσωση  $A \cdot X = B$  και να το επιλύει με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss. Ο καθηγητής, αφού διδάξει τη μέθοδο αυτή και αναφερθεί στον αλγόριθμο, μπορεί να ε-

πιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιούν ή πράξεις μεταξύ των εξισώσεων του συστήματος ή γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος. Χρήσιμο είναι σε κάθε περίπτωση να λαμβάνονται υπόψη και οι όποιοι περιορισμοί του προβλήματος οι οποίοι περιορίζουν το σύνολο των λύσεων του συστήματος. Στις ασκήσεις υπάρχουν και παραμετρικά συστήματα. Στην κρίση του διδάσκοντος αφήνεται αν πρέπει να γίνουν όλες ή μέρος των ασκήσεων αυτού του είδους.

Από τις προτεινόμενες γενικές ασκήσεις καλό είναι να επιλυθούν κάποιες ενδεικτικές από κάθε θεματική ενότητα. Να αφιερωθεί χρόνος στην ανακεφαλαίωση και στις ερωτήσεις κατανόησης.

## Κεφάλαιο 2: Περιγραφική Στατιστική

- **Προτεινόμενες Διδακτικές Ώρες:** 15
- **Θεματικές Ενότητες ανά Παραγράφους**

1<sup>η</sup> ενότητα: § 2.1

2<sup>η</sup> ενότητα: § 2.2

3<sup>η</sup> ενότητα: § 2.3

4<sup>η</sup> ενότητα: § 2.4

5<sup>η</sup> ενότητα: § 2.5

6<sup>η</sup> ενότητα: § 2.6

- **Ενδεικτικός Προγραμματισμός**

§ 2.1 : 1 διδακτική ώρα

§ 2.2 : 1 διδακτική ώρα

§ 2.3 : 3 διδακτικές ώρες

§ 2.4 : 2 διδακτικές ώρες

§ 2.5 : 2 διδακτικές ώρες

§ 2.6 : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 2 διδακτικές ώρες

Γενικές Ασκήσεις : 2 διδακτικές ώρες

Ανακεφαλαίωση – Ερωτήσεις Κατανόησης : 1 διδακτική ώρα

- **Διδακτικοί Στόχοι**

1. Να γνωρίζουν οι μαθητές τις διαδοχικές φάσεις μιας στατιστικής έρευνας.
2. Να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες της περιγραφικής στατιστικής και να χρησιμοποιούν σωστά τη σχετική ορολογία.
3. Να μπορούν να διαβάζουν και να κατασκευάζουν πίνακες κατανομής συχνοτήτων.
4. Να μπορούν να διαβάζουν τις διάφορες μορφές των γραφικών παραστάσεων κατανομών συχνοτήτων.
5. Να μπορούν να παριστάνουν γραφικά μια κατανομή συχνοτήτων.
6. Να γνωρίζουν και να μπορούν να υπολογίζουν τις παραμέτρους θέσεις και τις παραμέτρους διασποράς μιας κατανομής συχνοτήτων.
7. Να μπορούν να συγκρίνουν δύο κατανομές συχνοτήτων με τη βοήθεια των παραμέτρων και του συντελεστή μεταβλητότητας.

- **Οδηγίες για τη Διδασκαλία**

Στην πρώτη θεματική ενότητα (§ 2.1) οι μαθητές πρέπει να μάθουν το βασικό λεξιλόγιο της στατιστικής και να κατανοήσουν ότι η επιλογή του δείγματος είναι μία πολύ δύσκολη και λεπτή υπόθεση που απαιτεί μεγάλη προσοχή, ειδικές μεθόδους και ειδικούς επιστημονες.

Στη δεύτερη θεματική ενότητα (§ 2.2) οι μαθητές πρέπει να εξασκηθούν στην κατασκευή πινάκων κατανομής συχνοτήτων (σχετικών, αθροιστικών, σχετικών αθροιστικών) και την κατασκευή των αντίστοιχων διαγραμμάτων.

Στην τρίτη θεματική ενότητα (§ 2.3) οι μαθητές πρέπει να μπορούν να κάνουν ομαδοποίηση στατιστικών δεδομένων και να παριστάνουν μια ομαδοποιημένη κατανομή με ιστόγραμμα. Να τονισθεί ότι σε μια ομαδοποίηση στατιστικών δεδομένων δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει το αριστερό άκρο της πρώτης κλάσης με τη μικρότερη παρατήρηση ούτε το δεξί άκρο της τελευταίας κλάσης με τη μεγαλύτερη παρατήρηση.

Στην τέταρτη και πέμπτη θεματική ενότητα (§ 2.4 – 2.5) οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν τους τύπους των παραμέτρων θέσης, διασποράς και να τις υπολογίζουν καθώς και τα προτερήματα ή μειονεκτήματα αυτών.

Στην έκτη θεματική ενότητα (§ 2.6) πρέπει οι μαθητές να εξασκηθούν στον υπολογισμό του συντελεστή μεταβλητότητας και να δοθεί έμφαση στην έννοια της ομοιογένειας του δείγματος.

Η διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού συνίσταται να γίνεται με ανοιχτά τα βιβλία των μαθητών και να αφιερωθεί χρόνος στην ανακεφαλαίωση και τις ερωτήσεις κατανόησης.

Για μια επιτυχημένη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού και για καλύτερη αφομοίωση των εννοιών κρίνεται σκόπιμο οι μαθητές να προσκομίσουν στατιστικό υλικό από διάφορα έντυπα (εφημερίδες, περιοδικά, άλλα μαθήματα) αλλά κυρίως να κάνουν οι ίδιοι στατιστικές έρευνες στο άμεσο περιβάλλον τους (συλλογή στοιχείων, διαλογή, παρουσίαση, συμπεράσματα) σε ατομικές ή ομαδικές εργασίες.

### Κεφάλαιο 3: Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

- **Προτεινόμενες Διδακτικές Ώρες:** 18

- **Θεματικές Ενότητες ανά Παραγράφους**

1<sup>η</sup> ενότητα: § 3.1 – 3.5

2<sup>η</sup> ενότητα: § 3.6 – 3.9

3<sup>η</sup> ενότητα: § 3.10 – 3.11

- **Ενδεικτικός Προγραμματισμός**

§ 3.1 – 3.2	: 1 διδακτική ώρα
§ 3.3 – 3.4 (μέχρι και επιτρεπτές πράξεις)	: 1 διδακτική ώρα
§ 3.4 (υπόλοιπο) – 3.5	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
§ 3.6	: 1 διδακτική ώρα
§ 3.7 – 3.9	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
§ 3.10	: 2 διδακτικές ώρες
§ 3.11	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
Γενικές Ασκήσεις	: 2 διδακτικές ώρες
Ανακεφαλαίωση – Ερωτήσεις Κατανόησης	: 2 διδακτικές ώρες

- **Διδακτικοί Στόχοι**

1. Να μπορούν οι μαθητές να προσδιορίζουν το όριο μιας συνάρτησης είτε με εποπτεία, είτε με την παρατήρηση ή δημιουργία κατάλληλου πίνακα τιμών.
2. Να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά τους να υπολογίζουν τα όρια απλών συναρτήσεων.
3. Να κατανοήσουν την έννοια των πλευρικών ορίων.
4. Να καταλάβουν την έννοια του μη πεπερασμένου ορίου και να αναγνωρίζουν τις απροσδιόριστες μορφές, καθώς και τις επιτρεπτές πράξεις με το άπειρο.
5. Να αντιμετωπίζουν την απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$  για ρητές συναρτήσεις και ριζικά.
6. Να μελετούν τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.
7. Να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας συνάρτησης σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, καθώς και σε ένα διάστημα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.
8. Να διακρίνουν τη διαφορά συνεχούς γραμμής και συνεχούς συνάρτησης, και τα διαφορετικά είδη ασυνέχειας.
9. Να κατανοήσουν τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης για πολύ μικρές ή για πολύ μεγάλες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής και να αντιμετωπίζουν την απροσδιόριστη μορφή  $\frac{\infty}{\infty}$  για πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις.
10. Να μπορούν να μελετήσουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ως προς τις οριζόντιες ασύμπτωτες.

- **Οδηγίες για τη Διδασκαλία**

Για την πρώτη θεματική ενότητα (§ 3.1 – 3.5), η πρώτη προσέγγιση του ορίου συνάρτησης γίνεται εποπτικά, μέσω γραφικών παραστάσεων, και υπολογιστικά μέσω πινάκω τιμών του  $x$  και των αντίστοιχων τιμών της  $f(x)$ . Υπάρχουν αρκετές εφαρμογές και ασκήσεις προς αυτό το σκοπό. Η εφαρμογή 3, εκτός των παραπάνω, δημιουργεί την αίσθηση στο μαθητή της αντιμετώπισης ενός προβλήματος με τη βοήθεια ορίων εποπτικά.

Στη συνέχεια οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τις ιδιότητες

των ορίων και την έννοια των πλευρικών ορίων. Απαραίτητη κρίνεται η εφαρμογή 4 και υπάρχουν οι ασκήσεις εμπέδωσης 2 – 7 όπου οι μαθητές θα ασχοληθούν με τις δύο προαναφερόμενες έννοιες.

Η πρώτη ενότητα κλείνει με την παρουσίαση μη πεπερασμένου ορίου συνάρτησης, επιτρεπτών και μη επιτρεπτών πράξεων με το άπειρο καθώς και της κατακόρυφης ασύμπτωτης στη γραφική παράσταση συνάρτησης. Και εδώ κρίνεται απαραίτητη η προσέγγιση των εννοιών αυτών εποπτικά και υπολογιστικά και κατόπιν μέσω των ιδιοτήτων και των επιτρεπτών πράξεων.

Προς αυτό το σκοπό βοηθούν οι εφαρμογές 5, 6 καθώς και οι ασκήσεις εμπέδωσης 8 – 11. Οι σύνθετες ασκήσεις και οι πρακτικές εφαρμογές δίνουν την ευχέρεια στον καθηγητή να θέσει σε πιο γερές βάσεις τις γνώσεις των μαθητών γύρω από το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Στη δεύτερη θεματική ενότητα (§ 3.6 – 3.9), η εποπτική ερμηνεία της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της γίνεται αναλυτικά με πολλά παραδείγματα και εφαρμογές. Τονίζεται ιδιαίτερα η διαφορά μιας συνεχούς γραμμής από μία συνεχή συνάρτηση και σε εφαρμογές και σε ασκήσεις. Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι η συνέχεια είναι τοπική ιδιότητα της συνάρτησης και ότι απαιτούνται τρεις (3) προϋποθέσεις:

(α)  $x_0 \in A_f$  ( $x_0$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f$ )

(β) Υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$

(γ)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Γι'αυτό το σκοπό προτείνονται οι εφαρμογές 1 – 5 και οι ασκήσεις εμπέδωσης 1 – 3. Η συνέχεια σε διάστημα και οι ιδιότητες συνέχειας κλείνουν την ενότητα αυτή. Προτείνονται οι εφαρμογές 6 – 7 καθώς και η άσκηση εμπέδωσης 4. Η άσκηση 3 από τις σύνθετες και οι πρακτικές εφαρμογές 1, 2 κρίνεται σκόπιμο να γίνουν μέσα στην τάξη.

Στην τρίτη θεματική ενότητα (§ 3.10 – 3.11) παρουσιάζεται η συμπεριφορά της συνάρτησης όταν το  $x$  παίρνει πολύ μεγάλες τιμές ( $x \rightarrow +\infty$ ) ή πολύ μικρές τιμές ( $x \rightarrow -\infty$ ). Πρέπει να τονισθεί σύντομα η χρησιμότητα της μελέτης αυτής για την κατασκευή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, καθώς και στην αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων για πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές τιμές μιας μεταβλητής. Και εδώ η πρώτη παρουσίαση γίνεται εποπτικά και υπολογιστι-

κά (εφαρμογές 1 – 2) και κατόπιν περνάμε στις ιδιότητες ορίων (εφαρμογή 3). Όλες οι ασκήσεις εμπέδωσης είναι κατάλληλες για να αντιληφθούν οι μαθητές τα προηγούμενα. Οι εφαρμογές 5, 6 καθώς και οι πρακτικές εφαρμογές ανήκουν στο γενικότερο πνεύμα του βιβλίου για την προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών μέσω φυσικών προβλημάτων.

Από τις γενικές ασκήσεις προτείνεται να επιλυθούν στην τάξη οι 1, 2, 3 και να μείνουν τα προβλήματα ως δραστηριότητα / συνθετική εργασία. Να αφιερωθεί χρόνος στην ανακεφαλαίωση και στις ερωτήσεις κατανόησης.

#### Κεφάλαιο 4: Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού

- **Προτεινόμενες Διδακτικές Ώρες:** 18

- **Θεματικές Ενότητες ανά Παραγράφους**

1<sup>η</sup> Ενότητα: § 4.1

2<sup>η</sup> Ενότητα: § 4.2 – 4.5

3<sup>η</sup> Ενότητα: § 4.6 – 4.7

4<sup>η</sup> Ενότητα: § 4.8 – 4.9

- **Ενδεικτικός Προγραμματισμός**

§ 4.1	: 1 διδακτική ώρα
§ 4.2 – 4.4	: 2 διδακτικές ώρες
§ 4.5	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
§ 4.6	: 1 διδακτική ώρα
§ 4.7	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
§ 4.8	: 1 διδακτική ώρα
§ 4.9	: 1 διδακτική ώρα
Ασκήσεις – Επανάληψη	: 2 διδακτικές ώρες
Γενικές Ασκήσεις	: 2 διδακτικές ώρες
Ανακεφαλαίωση – Ερωτήσεις Κατανόησης	: 2 διδακτικές ώρες



- **Διδακτικοί Στόχοι**

1. Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου σε σημείο και να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
2. Να γνωρίζουν και να εφαρμόζουν τους κανόνες παραγωγίσης βασικών συναρτήσεων και να υπολογίζουν παραγώγους ανώτερης τάξης.
3. Να κατανοήσουν την έννοια της παράγουσας συνάρτησης, της διαφορικής εξίσωσης και του προβλήματος αρχικών τιμών.
4. Να μπορούν να επιλύουν απλές διαφορικές εξισώσεις και απλά προβλήματα αρχικών τιμών.
5. Να μπορούν να μελετήσουν μια συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
6. Να αναγνωρίζουν τις πιθανές θέσεις ακροτάτων και να χρησιμοποιούν τα κριτήρια της 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> παραγώγου.

- **Οδηγίες για τη Διδασκαλία**

Για την § 4.1 είναι χρήσιμο να επιμείνουμε στην κατανόηση των εννοιών: οριακό κόστος, οριακό κέρδος, επιτάχυνση και για την εύρεση του ρυθμού μεταβολής να γίνουν οι εφαρμογές που αφορούν στη μέτρηση στερεών, έτσι ώστε οι μαθητές να επαναλάβουν τους τύπους μέτρησης στερεών, αλλά και να ασκηθούν στην παραγωγή.

Στις § 4.2 – 4.5 οι μαθητές πρέπει να εξασκηθούν στις τεχνικές παραγωγίσης ώστε να αποκτήσουν ευχέρεια καθώς και να συνδέσουν την παράγωγο συνάρτηση με τη γενική μορφή του ρυθμού μεταβολής, όπως εκφράζεται στις εφαρμογές με τα οικονομικά μαθηματικά.

Για τις § 4.6 – 4.7 οι μαθητές πρέπει να οδηγηθούν στην ικανότητα αναγνώρισης των παραγουσών βασικών ή σύνθετων συναρτήσεων και να λυθούν προβλήματα στα οποία δίνεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο και ζητείται η συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση των δύο μεγεθών. Προτείνεται η παρουσίαση των εφαρμογών που εκφράζουν τα μοντέλα απεριορίστης και περιορισμένης ανάπτυξης και η χρήση τους στην επίλυση αντίστοιχων διαφορικών εξισώσεων.

Για τις § 4.8 – 4.9 θα παρουσιασθούν πραγματικά προβλήματα στα οποία θα μελετάται η μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης. Υπάρχει πληθώρα ασκήσεων και πρακτικών εφαρμογών κατάλληλες να καλύψουν τις αντίστοιχες θεωρητικές έννοιες.

Από τις προτεινόμενες γενικές ασκήσεις είναι θεμιτή η επίλυση κάποιων ενδεικτικών από κάθε θεματική ενότητα. Να αφιερωθεί χρόνος στην ανακεφαλαίωση και στις ερωτήσεις κατανόησης.

## Κεφάλαιο 5: Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

- **Προτεινόμενες Διδακτικές Ώρες: 9**

- **Θεματικές Ενότητες ανά Παραγράφοις**

1<sup>η</sup> Ενότητα: § 5.1 – 5.2

2<sup>η</sup> Ενότητα: § 5.3

3<sup>η</sup> Ενότητα: § 5.4

- **Ενδεικτικός Προγραμματισμός**

§ 5.1 – 5.2 : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 1 διδακτική ώρα

§ 5.3 : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 1 διδακτική ώρα

§ 5.4 : 1 διδακτική ώρα

Ασκήσεις – Επανάληψη : 1 διδακτική ώρα

Γενικές Ασκήσεις : 1 διδακτική ώρα

Ανακεφαλαίωση – Ερωτήσεις Κατανόησης : 2 διδακτικές ώρες

- **Διδακτικοί Στόχοι**

1. Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια και τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.
2. Να υπολογίζουν ολοκληρώματα διαφόρων συναρτήσεων είτε με την ανακάλυψη της παράγουσας, είτε με την παραγοντική ολοκλήρωση.
3. Να μπορούν να χρησιμοποιούν το ορισμένο ολοκλήρωμα για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων και για τον υπολογισμό του εμβαδού επιπέδου χωρίου.

- **Οδηγίες για τη Διδασκαλία**

Για την πρώτη θεματική ενότητα (§ 5.1 – 5.2) πρέπει οι μαθητές να κατανοήσουν ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι έννοια γενικότε-

ρη του εμβαδού. Με τη χρήση των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος και του πίνακα των παραγουσών συναρτήσεων του κεφαλαίου 4 πρέπει οι μαθητές να εξασκηθούν στον υπολογισμό απλών ολοκληρωμάτων.

Για τη δεύτερη θεματική ενότητα (§ 5.3) πρέπει οι μαθητές να μάθουν να ανακαλύπτουν την παράγουσα χρησιμοποιώντας ουσιαστικά την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης. Πρέπει επίσης να μπορούν με τη χρήση της παραγοντικής ολοκλήρωσης να υπολογίζουν πιο σύνθετα ολοκληρώματα και να γίνει αναλυτικά παράδειγμα επανεμφάνισης του ολοκληρώματος  $(\int_a^b e^x \eta \mu x \, dx)$ .

Τέλος, για την τρίτη θεματική ενότητα (§ 5.4) πρέπει οι μαθητές να μάθουν να χρησιμοποιούν το πρόσημο μπροστά από το ολοκλήρωμα για να υπολογίζουν το εμβαδό μίας συνάρτησης στα αντίστοιχα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία είναι θετική ή αρνητική. Για τον υπολογισμό εμβαδού μεταξύ δύο συναρτήσεων πρέπει να υπολογίζουν το πρόσημο της διαφοράς των δύο συναρτήσεων. Για την πληρέστερη κατανόηση του υπολογισμού εμβαδών επιπέδων χωρίων κρίνεται σκόπιμο να παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων των οποίων υπολογίζεται το εμβαδόν.

Επίσης να σημειώσουμε ότι στις πρακτικές εφαρμογές ουσιαστικά χρησιμοποιείται ένας και μοναδικός τύπος:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x F'(x) \, dx.$$

Να αφιερωθεί χρόνος στην ανακεφαλαίωση και στις ερωτήσεις κατανόησης.