4 *Στοιχεία Διαφορικού Λογισμού*

§ 4.1

Ασκήσεις Εμπέδωσης

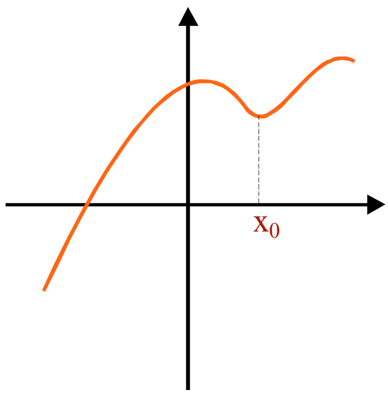
'Ασκηση 1

Στις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις να εξετάσετε:

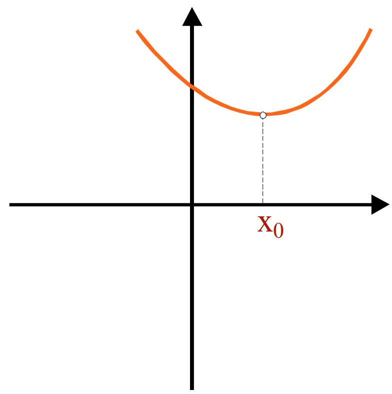
(α) Αν η f έχει όριο στο $x = x_0$.

(β) Αν η f είναι συνεχής στο $x = x_0$.

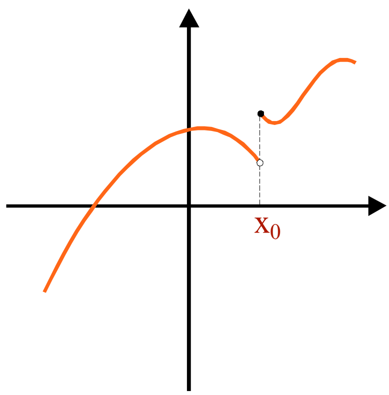
(γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.



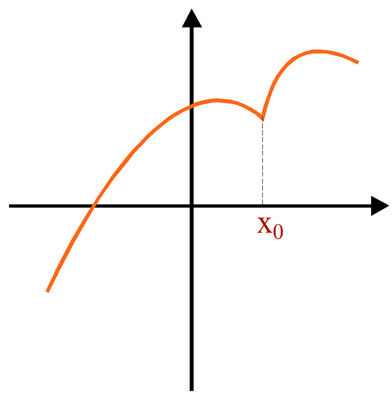
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Λύση

(i) Υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.

(ii) Υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, αλλά η f δεν ορίζεται στο x_0, οπότε δεν εξετάζουμε τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

(iii) Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, η f είναι ασυνεχής στο $x = x_0$ και συνεπώς δεν είναι παραγωγίσιμη.

(iv) Υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, η f είναι συνεχής στο $x = x_0$, αλλά η C_f σχηματίζει γωνιακό σημείο, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

'Ασκηση 2

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύση

Θεωρούμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}}$$

Αφού $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$ έχουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

'Ασκηση 3

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x - x_0|$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $x = x_0$ ως απόλυτη τιμή πολυωνυμικής συνάρτησης. Για την παραγωγισιμότητα εξετάζουμε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=-1$$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $x = x_0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη.

'Ασκηση 4

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-x_0}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.

Λύση

Εξετάζουμε το πηλίκο:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

και αφού $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$ δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο $x = x_0$.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}\gamma x^2+\delta x & , \quad \text{αν } x\leqslant 1\\ \alpha x^2+\beta x & , \quad \text{αν } x>1\end{cases}$$

Να εξετάσετε για ποιες τιμές των α, β, γ, δ:

(α) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

(β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση

(α) 'Εχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\gamma+\delta \qquad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\alpha+\beta \qquad f(1)=\gamma+\delta$$

Επομένως, για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ θα πρέπει:

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta \quad (1)$$

(β) 'Εχουμε ότι για $x\leqslant 1$ ή $h\leqslant 0$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\gamma(1+h)^2+\delta(1+h)-\gamma-\delta}{h}=\gamma h+(2\gamma+\delta).$$

Οπότε $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2\gamma+\delta$.

Για $x>1$ ή $h>0$ έχουμε ότι:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\alpha(1+h)^2+\beta(1+h)-\gamma-\delta}{h}=$$

$$\alpha h+(2\alpha+\beta)+\frac{(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta)}{h}=\alpha h+(2\alpha+\beta)$$

αφού λόγω της συνέχειας της f στο $x_0=1$ ισχύει ότι $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.
Επομένως $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2\alpha+\beta$.

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ θα πρέπει:

$$2\gamma+\delta=2\alpha+\beta \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\gamma=\alpha$ και $\beta=\delta$.

'Ασκηση 2

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=|x-1|^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{|h|^3}{h}=\frac{h^2|h|}{h}=h|h|.$$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$ και άρα $f'(1)=0$.

'Ασκηση 3

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2|x-2|}{x^2-2x+4}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\dfrac{2|h|}{(2+h)^2-2(2+h)+4}}{h}=\frac{2|h|}{h(h^2+2h+4)}$$

Επομένως:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{1}{2}$$

και άρα δεν υπάρχει το $f'(2)$.

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

'Ενα αερόστατο αρχίζει να ανεβαίνει κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα 1,28 m/sec. Λόγω βλάβης στην τροφοδοσία αρχίζει να χάνει αέρα, έτσι ώστε το ύψος του μετά από t sec να δίνεται από τη συνάρτηση $g(t)=1{,}28t-0{,}16t^2$ m.

(α) Ποιά είναι η μέση ταχύτητα του αερόστατου στα χρονικά διαστήματα [3, 4], [3, 3,5] και [3, 3,1];

(β) Ποιά η στιγμιαία ταχύτητα του αερόστατου τη χρονική στιγμή $t = 3$ sec;

(γ) Ποιά η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 5$ sec; Εκείνη τη στιγμή το αερόστατο ανεβαίνει ή πέφτει;

(δ) Πότε το αερόστατο θα πέσει στο έδαφος;

Λύση

(α) Θα είναι:

$$\frac{g(4)-g(3)}{4-3}=0{,}16$$

$$\frac{g(3{,}5)-g(3)}{3{,}5-3}=4{,}92$$

$$\frac{g(3{,}1)-g(3)}{3{,}1-3}=4{,}83$$

(β) Θα είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(3+h)-g(3)}{h}=0{,}32 \text{ m/sec}$$

(γ) Είναι $\lim_{h\to 0}\frac{g(5+h)-g(5)}{h} = -0{,}32$ m/sec και το αερόστατο πέφτει.

(δ) 'Οταν $g(t)=0$, αλλά όχι για $t=0$, αλλά για $t=8$ sec.

'Ασκηση 2

Σε θερμοκρασία 20° C, ο όγκος V (σε lt) 1,33 gr O_2 σχετίζεται με την πίεσή του P (σε atm) με τον τύπο $V=\frac{1}{P}$.

(α) Ποιός είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής του όγκου V ως συνάρτηση της πίεσης P, όταν η πίεση P αυξάνεται από 2 atm σε 3 atm;

(β) Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου V όταν η πίεση P γίνει 2 atm;

Λύση

(α) Ο μέσος ρυθμός του όγκου δίνεται από το πηλίκο:

$$\frac{V(3)-V(2)}{3-2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\,\text{lt}$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ελάττωση του όγκου με την αύξηση της πίεσης.

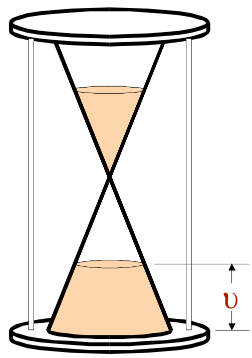
(β) Ο ρυθμός μεταβολής δίνεται από το όριο του πηλίκου:

$$\frac{V(2+h)-V(2)}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=-\frac{1}{2(2+h)}$$

και $V'(2)=-\frac{1}{4}$ lt/atm.

'Ασκηση 3

Σε μια κλεψύδρα η άμμος αρχίζει να πέφτει από το πάνω μέρος της στο κάτω με σταθερό ρυθμό 4 cm^3/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ύψους υ της άμμου που μαζεύεται στο κάτω μέρος της κλεψύδρας, αν το ύψος εκφράζεται ως συνάρτηση της ακτίνας από τον τύπο $\upsilon=\frac{R}{\pi}$.



Λύση

'Εχουμε ότι $V=\frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon = \frac{R^3}{3}$, οπότε:

$$\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}=\frac{R^3(t_0+h)-R^3(t_0)}{3h}=$$

$$\frac{R(t_0+h)-R(t_0)}{h}\cdot\frac{R^2(t_0+h)+R(t_0)R(t_0+h)+R^2(t_0)}{3}$$

Οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{R(t_0+h)-R(t_0)}{h}=\frac{1}{R^2(t_0)}\lim\limits_{h\to 0}\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}$ δηλαδή:

$$R'(t_0)=\frac{V'(t_0)}{R^2(t_0)}.$$

'Ασκηση 4

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της διαγωνίου ενός κύβου ως συνάρτηση της ακμής του.

Λύση

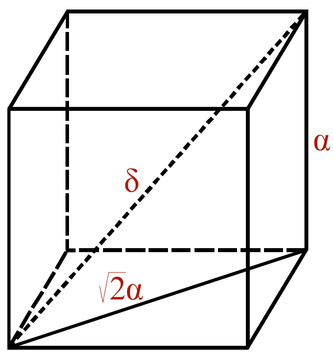
Η διαγώνιος ενός κύβου είναι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές α και $\sqrt{2}\alpha$. Επομένως

$$\delta^2=\alpha^2+2\alpha^2=3\alpha^2 \quad ή \quad \delta=\sqrt{3}\alpha.$$

Τότε έχουμε ότι $\frac{\delta(\alpha+h)-\delta(\alpha)}{h}=\sqrt{3}$.

Επομένως, καταλήγουμε ότι:

$$\delta'(\alpha)=\sqrt{3}.$$



'Ασκηση 5

Αν ο όγκος μιας σφαίρας μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειάς της είναι αντιστρόφως ανάλογος της ακτίνας της.

Λύση

'Εχουμε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}=c$. 'Ομως $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, οπότε:

$$\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}=\frac{4}{3}\pi\,\frac{R^3(t_0+h)-R^3(t_0)}{h}=$$
$$\frac{4}{3}\pi\,\frac{R(t_0+h)-R(t_0)}{h}\,[R^2(t_0+h)+R(t_0)R(t_0+h)+R^2(t_0)].$$

Επομένως έχουμε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{R(t_0+h)-R(t_0)}{h}=\dfrac{3c}{4\pi}\cdot\dfrac{1}{3R^2(t_0)}=\dfrac{c}{4\pi R^2(t_0)}$.

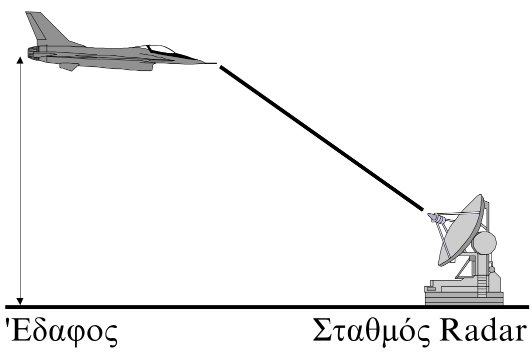
Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E = 4\pi R^2$ της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(t_0+h)-E(t_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(4\pi\,\frac{R^2(t_0+h)-R^2(t_0)}{h}\right)=$$
$$8\pi R(t_0)\lim_{h\to 0}\frac{R(t_0+h)-R(t_0)}{h}.$$

'Αρα έχουμε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{E(t_0+h)-E(t_0)}{h}=8\pi R(t_0)\,\dfrac{c}{4\pi R^2(t_0)}=\dfrac{2c}{R(t_0)}$.

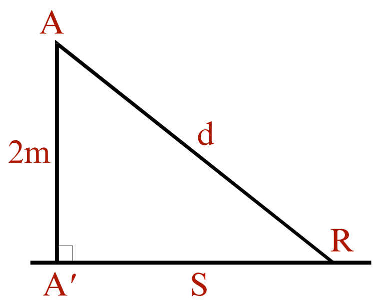
'Ασκηση 6

'Ενα αεροπλάνο πετάει παράλληλα προς το έδαφος με σταθερή ταχύτητα 600 μίλια/h και πλησιάζει ένα σταθμό Radar. Αν το ύψος στο οποίο πετάει το αεροπλάνο είναι 2 μίλια, πόσο γρήγορα μειώνεται η απόσταση ανάμεσα στο αεροπλάνο και στο σταθμό, τη χρονική στιγμή που η οριζόντια απόστασή τους είναι 1,5 μίλια;



Λύση

'Εστω S(t) η οριζόντια απόσταση και t_0 η χρονική στιγμή, όπου $S(t_0) = 1{,}5$ μίλια. Η απόσταση του αεροπλάνου από το σταθμό Radar δίνεται από τον τύπο: $d = \sqrt{S^2+4}$. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής του d τη χρονική στιγμή $t = t_0$ δίνεται από το όριο $(h\to 0)$ του πηλίκου:



$$\frac{\sqrt{S^2(t_0+h)+4}-\sqrt{S^2(t_0)+4}}{h}=\frac{S^2(t_0+h)-S^2(t_0)}{h[\sqrt{S^2(t_0+h)+4}+\sqrt{S^2(t_0)+4}]}=$$

$$\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}\cdot\frac{S(t_0+h)+S(t_0)}{\sqrt{S^2(t_0+h)+4}+\sqrt{S^2(t_0)+4}}$$

'Ομως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}=600$ μίλια/h, οπότε:

$$d'(t_0)=S'(t_0)\frac{2S(t_0)}{2\sqrt{S^2(t_0)+4}}=\frac{600\cdot 1{,}5}{2{,}5}=360 \text{ μίλια/h.}$$

§ 4.2 – 4.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x)=x^2\ln x$, για $x>0$

(ii) $f_2(x)=x\,\eta\mu x\ln x$, για $x>0$

(iii) $f_3(x)=x^2\varepsilon\varphi x$, για $x\in\mathbb{R}-\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\}$

(iv) $f_4(x)=2^x\log_2 x$, για $x>0$

Λύση

'Εχουμε ότι:

(i) $f_1'(x)=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'=x(2\ln x+1)$

(ii) $f_2'(x)=(x)'\,\eta\mu x\ln x+x\,(\eta\mu x)'\ln x+x\,\eta\mu x\,(\ln x)'=$
$\eta\mu x\ln x+x\,\sigma\upsilon\nu x\ln x+\eta\mu x$

(iii) $f_3'(x)=2x\,\varepsilon\varphi x+x^2\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\dfrac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}(x+\eta\mu 2x)$

(iv) $f_4'(x)=2^x\ln 2\dfrac{\ln x}{\ln 2}+2^x\dfrac{1}{x\ln 2}=2^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x\ln 2}\right)$

'Ασκηση 2

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 3}$, για $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

(ii) $f_2(x) = σφx$, για $x \in \mathbb{R} - \{κπ, κ \in \mathbb{Z}\}$

Λύση

'Εχουμε ότι:

(i) $f_1'(x) = \dfrac{2x(x-3) - (x^2+3)}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x - 3}{(x-3)^2}$

(ii) $f_2'(x) = \left(\dfrac{συνx}{ημx}\right)' = -\dfrac{1}{ημ^2x}$

'Ασκηση 3

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = ημ(2x + 5)$

(ii) $f_2(x) = \ln(ημx)$, για $x > 0$

(iii) $f_3(x) = (2x - 3x^2)^3$

Λύση

'Εχουμε ότι:

(i) $f_1'(x) = συν(2x + 5)\cdot(2x + 5)' = 2συν(2x + 5)$

(ii) $f_2'(x) = \dfrac{1}{ημx}(ημx)' = σφx$

(iii) $f_3'(x) = 3(2x - 3x^2)^2\cdot(2x - 3x^2)' = 3(2 - 6x)(2x - 3x^2)^2$

'Ασκηση 4

(α) Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f_1(x) = xe^x$.

(β) Να υπολογισθεί η τρίτη παράγωγος της συνάρτησης $f_2(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$, για $x > 2$.

(γ) Να υπολογισθεί η τέταρτη παράγωγος της συνάρτησης $f_3(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$, για $x \neq 3$.

Λύση

(α) Είναι $f_1'(x) = e^x(x + 1)$ και $f_1''(x) = e^x(x + 2)$

(β) Είναι $f_2'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{4}{4-x^2}$, $f_2''(x) = -\dfrac{4}{(4-x^2)^2}(-2x) = \dfrac{8x}{(4-x^2)^2}$

και $f_2^{(3)}(x) = \dfrac{8(3x^2-4)}{(4-x^2)^3}$

(γ) Είναι $f_3^{(4)}(x) = \dfrac{144}{(x-3)^5}$

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{\alpha x}x^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Λύση

Είναι:

$$f'(x) = e^{\alpha x}x^{\nu-1}(\alpha x + \nu)$$
$$f''(x) = e^{\alpha x}x^{\nu-2}[\alpha^2x^2 + \nu(\alpha+1)x + (\nu-1)]$$

'Ασκηση 2

Να υπολογισθεί η 1000-οστή παράγωγος των συναρτήσεων $f_1(x) = e^x$ και $f_2(x) = \alpha^x$, με $0 < \alpha \neq 1$.

Λύση

Είναι: $f_1'(x) = f_1''(x) = \cdots = f_1^{(1000)}(x) = e^x$ ενώ ισχύει ότι:

$$f_2'(x) = \alpha^x \ln\alpha$$
$$f_2''(x) = \alpha^x \ln^2\alpha$$
$$\vdots$$
$$f_2^{(1000)}(x) = \alpha^x \ln^{1000}\alpha$$

'Ασκηση 3

(α) Να παραγωγίσετε τη γνωστή ταυτότητα:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu} = \frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + \nu\cdot 3^{\nu-1}$$

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + \nu x^{\nu-1} = \frac{\nu x^{\nu+1} - (\nu+1)x^{\nu} + 1}{(x-1)^2}$$

(β) Θέτοντας $x = 3$ βρίσκουμε ότι:

$$1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + \nu\cdot 3^{\nu-1} = \frac{\nu\cdot 3^{\nu+1} - (\nu+1)3^{\nu} + 1}{4} = \frac{3^{\nu}(2\nu-1)+1}{4}$$

Άσκηση 4

Έστω P πραγματικό πολυώνυμο για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$(P'(x))^2 = P(x),\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρεθεί ο τύπος του πολυωνύμου P.

Λύση

Αν $P(x) = \alpha_\nu x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, τότε

$$P'(x) = \nu\alpha_\nu x^{\nu-1} + (\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2} + \cdots + \alpha_1.$$

Επομένως οι τάξεις των δύο πολυωνύμων $(P'(x))^2$ και $P(x)$ θα είναι ί-σες, δηλαδή:

$$2(\nu-1) = \nu \quad \text{ή} \quad \nu = 2.$$

Συνεπώς, $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και $P'(x) = 2\alpha x + \beta$ ενώ προκύπτει ότι:

$$4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

οπότε:

$$4\alpha^2 = \alpha,\ 4\alpha\beta = \beta,\ \beta^2 = \gamma \ \text{ και}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0) \quad \text{ή} \quad \left(\frac{1}{4}, \beta, \beta^2\right),\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι είτε $P \equiv 0$, είτε $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \beta x + \beta^2$.

Πρακτικές Εφαρμογές

Άσκηση 1

Ένα αυτοκίνητο διανύει απόσταση S στα t πρώτα δευτερόλεπτα της εκκίνησής του ίση με:

$$S(t) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t \text{ m}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$$

(α) Να βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, με $0 \leqslant t \leqslant 10$.

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το αυτοκίνητο επιβραδύνει μετά από τα 6 πρώτα sec της κίνησής του.

Λύση

(α) Είναι $\gamma(t) = S''(t) = 6t + 2\alpha$ m/sec^2.

(β) Θα πρέπει $\gamma(t) \leqslant 0$ για $6 \leqslant t \leqslant 10$, δηλαδή $\alpha \leqslant -3t$, για $6 \leqslant t \leqslant 10$, επομένως $\alpha \leqslant -30$.

'Ασκηση 2

'Εστω το γνωστό από τον ηλεκτρισμό δυναμικό (V):

$$V = \frac{q}{r} \quad (q = \text{φορτίο}, \ r = \text{απόσταση})$$

Να αποδείξετε ότι για το δυναμικό αυτό ισχύει:

$$V''(r) + \frac{2}{r} V'(r) = 0$$

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$V'(r) = -\frac{q}{r^2} \quad \text{και} \quad V''(r) = \frac{2q}{r^3}$$

Επομένως:

$$V''(r) + \frac{2}{r} V'(r) = \frac{2q}{r^3} + \frac{2}{r}\left(-\frac{q}{r^2}\right) = 0$$

'Ασκηση 3

Μια ομάδα βιολόγων σε ένα ωκεανογραφικό ινστιτούτο προτείνει να ληφθούν μια σειρά από προληπτικά μέτρα για τη διάσωση ενός συγκεκριμένου είδους φάλαινας από την εξαφάνιση. Μετά την εφαρμογή των μέτρων αυτών ο αριθμός (N) των φαλαινών εκτιμάται ότι θα μεταβάλλεται με τον χρόνο (t) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$N(t) = 3t^3 + 2t^2 - 10t + 600, \ 0 \leqslant t \leqslant 10$$

Να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τον 2^{o} και 6^{o} χρόνο, καθώς και πόσες φάλαινες θα υπάρχουν τον 8^{o} χρόνο.

Λύση

Ο ρυθμός αύξησης είναι:

$$N'(t) = 9t^2 + 4t - 10$$

οπότε $N'(2) = 34$, $N'(6) = 338$ φάλαινες το χρόνο.

Ο συνολικός πληθυσμός μετά από 8 χρόνια θα είναι

$$N(8) = 3\cdot 8^3 + 2\cdot 8^2 - 10\cdot 8 + 600 = 2184 \text{ φάλαινες.}$$

'Ασκηση 4

Τα οργανικά απόβλητα που ρίχνονται σε έναν υδάτινο αποδέκτη, π.χ. σε μια λίμνη, ελαττώνουν κατ' αρχήν το οξυγόνο της λίμνης έως ότου η φύση δράσει έτσι ώστε να υπάρξει πάλι ισορροπία στο οικοσύστημα. Για ένα τέτοιο οικοσύστημα το οξυγόνο μεταβάλλεται ως προς το χρόνο t ως εξής:

$$f(t) = 100\left(\frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 + 4}\right), \; 0 \leqslant t < 8$$

Πώς αλλάζει το οξυγόνο 1, 2 και 3 ημέρες μετά τη ρίψη ενός φορτίου οργανικών αποβλήτων;

Λύση

Ο ρυθμός μεταβολής του οξυγόνου είναι:

$$f'(t) = \frac{400(t^2 - 4)}{(t^2 + 4)^2}$$

'Αρα $f'(1) = -48$, $f'(2) = 0$ και $f'(3) = 11{,}8$, δηλαδή την πρώτη ημέρα υπάρχει ελάττωση του οξυγόνου κατά 48%, μετά από 2 ημέρες δεν υπάρχει ούτε ελάττωση ούτε αύξηση, ενώ μετά από 3 ημέρες υπάρχει 11,8% αύξηση.

'Ασκηση 5

Ο αριθμός των μελών ενός γυμναστηρίου που άνοιξε πριν από μερικά χρόνια δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$N(t) = 100(64 + 4t)^{\frac{2}{3}}, \; 0 \leqslant t \leqslant 52$$

όπου N είναι ο αριθμός των μελών στην αρχή μιας εβδομάδας t. Πώς αυξανόταν ο αριθμός νέων μελών αρχικά (t = 0), και πώς στην αρχή της 40ης εβδομάδας; Ποιός ο αριθμός των μελών τις δύο αυτές χρονικές στιγμές;

Λύση

Ο ρυθμός αύξησης των μελών είναι:

$$N'(t) = \frac{800}{3(64+4t)^{\frac{1}{3}}}$$

'Αρα $N'(0) = 66{,}7$ δηλαδή περίπου 66 ή 67 άνθρωποι την εβδομάδα και $N(0) = 1600$ μέλη στην αρχή.

Μετά την 40^{η} εβδομάδα έχουμε:

$$N'(40) = 43{,}9 \text{ και } N(40) = 3688 \text{ μέλη}$$

'Ασκηση 6

Η μέση συγκέντρωση του CO (μονοξειδίου του άνθρακα) στην ατμόσφαιρα δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 0{,}881443t^4 - 1{,}45533t^3 + 0{,}695876t^2 + 2{,}87801t + 293, \; t \geqslant 0$$

όπου t είναι η μονάδα μέτρησης του χρόνου και παίρνει τιμές $t = 0, 1, 2, \ldots$ και κάθε μονάδα χρόνου αντιστοιχεί σε περίοδο 40 ετών ($t = 0$ το 1860) και η f μετριέται σε μέρη στο εκατομμύριο ανά κυβικό εκατοστό (ppm/cm^3). Ποιός ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης στην αρχή του αιώνα ($t = 1$) και στην αρχή του 1990 ($t = 3{,}5$);

Λύση

Ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης είναι:

$$f'(t) = 3{,}525772t^3 - 4{,}36599t^2 + 1{,}391752t + 2{,}87801$$

'Αρα $f'(1) = 3{,}429 \; ppm/cm^3$ και $f'(3{,}5) = 105{,}43 \; ppm/cm^3$.

§ 4.6 – 4.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να υπολογίσετε την παράγουσα των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = \dfrac{1}{x+2}$, για $x > -2$

(ii) $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, για $x \neq 0$

(iii) $f_3(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, για $x \neq 0$

(iv) $f_4(x) = εφ^2x$, για $x \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$

Λύση

Έχουμε ότι:

(i) $F_1(x) = \ln(x+2) + c$

(ii) $F_2(x) = \dfrac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = 3\sqrt[3]{x} + c$

(iii) Αφού $f_3(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ θα είναι $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + c$

(iv) Αφού $f_4(x) = \dfrac{ημ^2x}{συν^2x} = \dfrac{1 - συν^2x}{συν^2x} = \dfrac{1}{συν^2x} - 1$ θα είναι

$F_4(x) = εφx - x + c$

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις της δεύτερης στήλης είναι οι παράγουσες των συναρτήσεων της πρώτης:

Συνάρτηση f	Παράγουσα F
$σφx$, για $ημx > 0$	$\ln(ημx)$, για $ημx > 0$
$\ln x$, για $x > 0$	$x(\ln x - 1)$, για $x > 0$

Λύση

Αρκεί να παραγωγίσουμε τις παράγουσες συναρτήσεις.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η παράγουσα των ακόλουθων συναρτήσεων:

(i) $f_1(x) = α^x$, με $0 < α \neq 1$

(ii) $f_2(x) = \log_α x$, για $x > 0$ και $0 < α \neq 1$

(iii) $f_3(x) = 1 + εφ^2x$, για $x \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$

Λύση

'Εχουμε ότι:

(i) $F_1(x) = \dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$

(ii) $F_2(x) = \dfrac{x(\ln x - 1)}{\ln\alpha} + c$

(iii) $F_3(x) = \varepsilon\varphi x + c$

'Ασκηση 4

Να υπολογίσετε την παράγουσα συνάρτηση της $f(x) = \dfrac{1}{1 + \eta\mu x}$, $x \neq 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με $(1 - \eta\mu x)$. Τότε:

$$f(x) = \frac{1 - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

οπότε:

$$F(x) = \varepsilon\varphi x - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + c$$

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ με $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = y \\ y(0) = y_0 \end{array} \right\}$$

Λύση

Από την εφαρμογή 2 έχουμε ότι:

$$\frac{y'}{y} = 1 \quad \acute{\eta} \quad (\ln y)' = 1 \quad \acute{\eta} \quad \ln y = x + c \quad \acute{\eta} \quad y = e^{x+c} \quad \acute{\eta} \quad y = c_1 e^x.$$

Για να υπολογίσουμε τη σταθερά c_1 θέτουμε $x = 0$, οπότε $y(0) = y_0 = c_1$

και $y = y_0 e^x$.

'Ασκηση 2

'Εστω συνάρτηση $y = f(x)$ με $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $f(0) = \ln 2$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$e^{-x}(y' - y) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$e^{-x}(f'(x) - f(x)) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{ή} \quad e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{ή}$$

$$(e^{-x}f(x))' = (\ln(e^x + 1))'$$

Επομένως έχουμε:

$$e^{-x}f(x) = \ln(e^x + 1) + c \quad \text{ή} \quad f(x) = e^x \ln(e^x + 1) + ce^x$$

Για $x = 0$ βρίσκουμε $c = 0$, οπότε:

$$y = f(x) = e^x \ln(e^x + 1).$$

'Ασκηση 3

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $y = f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$y' = 2x^3 - 3$$

και ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$y = f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x + c$$

Για $x = 0$ είναι $c = 2$, επομένως:

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x + 2$$

'Ασκηση 4

Δίνεται συνάρτηση $y = f(x)$, με $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\left\{ \begin{array}{c} f''(x) = 2x + 5 \\ f'(1) = 2 \\ f(1) = \dfrac{5}{6} \end{array} \right\}$$

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$f'(x) = x^2 + 5x + c.$$

Για $x = 1$ είναι $c = -4$, οπότε:

$$f'(x) = x^2 + 5x - 4.$$

Κατόπιν προκύπτει ότι:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + c_1.$$

Για $x = 1$ έχουμε ότι $c_1 = 2$, οπότε:

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x + 2.$$

'Ασκηση 5

Να βρεθεί μια διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης και μια $2^{ης}$, τις οποίες ικανοποιεί η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Λύση

Παραγωγίζουμε την f και βρίσκουμε ότι:

$$y' = f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \quad \text{ή} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

που είναι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης.

Αν ξαναπαραγωγίσουμε την εξίσωση αυτή:

$$y'(\sqrt{x^2 + 1}) = 1$$

έχουμε ότι:

$$y''(\sqrt{x^2 + 1}) + y' \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \quad \text{ή} \quad (x^2 + 1)\, y'' + x\, y' = 0$$

που είναι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης.

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

'Ενας καπετάνιος ιστιοπλοϊκού χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις του δρομόμετρου (όργανο που μετράει την ταχύτητα του σκάφους) καταλήγει ότι η ταχύτητα του σκάφους του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$\upsilon(t) = \frac{e^{\frac{t}{10}}}{100} \text{ ναυτικά μίλια/min}, \quad \text{για } 0 \leqslant t \leqslant 30$$

Να βρεθεί η συνάρτηση θέσης του ιστιοπλοϊκού και να βρεθεί πόσα μίλια διήνυσε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 10$ min έως $t = 20$ min.

Λύση

Αφού $\upsilon(t) = S'(t)$ έχουμε ότι: $S'(t) = \dfrac{e^{\frac{t}{10}}}{100}$.

Η παράγουσα της $e^{\frac{t}{10}}$ είναι η $10e^{\frac{t}{10}} + c$, οπότε:

$$S(t) = \frac{1}{100} 10e^{\frac{t}{10}} + c = \frac{1}{10} e^{\frac{t}{10}} + c.$$

Για να υπολογίσουμε τη σταθερά c αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μια αρχική τιμή της S, ότι $S(0) = 0$, οπότε:

$$S(0) = \frac{1}{10} + c \quad \text{ή} \quad c = -\frac{1}{10}.$$

'Αρα:

$$S(t) = \frac{e^{\frac{t}{10}}}{10} - \frac{1}{10} = \frac{e^{\frac{t}{10}} - 1}{10}, \quad \text{για } 0 \leqslant t \leqslant 30.$$

Για να βρούμε την απόσταση που διήνυσε το ιστιοπλοϊκό από $t = 10$ min έως $t = 20$ min, θεωρούμε τη διαφορά:

$$S(20) - S(10) = \frac{e^{\frac{20}{10}}}{10} - \frac{1}{10} - \frac{e^{\frac{10}{10}}}{10} + \frac{1}{10} = \frac{e^2 - e}{10} \simeq 0{,}46 \text{ ναυτικά μίλια.}$$

'Ασκηση 2

Η τωρινή κυκλοφορία του περιοδικού ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β′ της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας είναι 300 αντίγραφα την εβδομάδα. Η

ΕΜΕ υπολογίζει ότι το περιοδικό θα αυξήσει την κυκλοφορία του με ρυθμό $\frac{1}{5}\sqrt[5]{t^4}+\frac{2}{9}$ τεύχη ανά εβδομάδα (θεωρώντας πάντα τον κοντινότερο ακέραιο αριθμό τευχών), τα επόμενα τρία χρόνια. Ποιά θα είναι η κυκλοφορία του περιοδικού μετά από 32 εβδομάδες;

Λύση

Αν η συνάρτηση f(t) εκφράζει την κυκλοφορία του περιοδικού, τότε έχουμε ότι:

$$f'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[5]{t^4}+\frac{2}{9}.$$

Η παράγουσα της συνάρτησης $\sqrt[5]{t^4}=t^{\frac{4}{5}}$ είναι η:

$$\frac{t^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1}+c=\frac{5}{9}t^{\frac{9}{5}}+c=\frac{5t\sqrt[5]{t^4}}{9}+c.$$

Επομένως:

$$f(t)=\frac{2t}{9}+\frac{t\sqrt[5]{t^4}}{9}+c=\frac{t}{9}(2+\sqrt[5]{t^4})+c.$$

Για να υπολογίσουμε τη σταθερά c, χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη f(0) = 300, οπότε c = 300. 'Αρα η κυκλοφορία του ΕΥΚΛΕΙΔΗ Β′ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t)=\frac{t}{9}(2+\sqrt[5]{t^4})+300$$

οπότε η κυκλοφορία μετά από 32 εβδομάδες θα είναι:

$$f(32)=\frac{32}{9}\cdot 18+300=364 \text{ τεύχη}.$$

'Ασκηση 3

Στην Αθήνα μια καλοκαιρινή ημέρα, το μονοξείδιο του άνθρακα είναι 2 μέρη στο εκατομμύριο (ppm). Το Υπουργείο Περιβάλλοντος προβλέπει ότι αν δεν παρθούν αυστηρά μέτρα κατά του νέφους, η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα στην ατμόσφαιρα θα αυξάνεται με ρυθμό:

$$\frac{1}{1000}(t^2+20t+100) \text{ μέρη ανά εκατομμύριο (ppm)}$$

σε t χρόνια από τώρα. Ποιά θα είναι η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα σε 3 χρόνια από σήμερα;

Λύση

Ας συμβολίσουμε με f(t) τη συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα, οπότε έχουμε:

$$f'(t) = \frac{1}{1000}(t^2 + 20t + 100).$$

Οπότε:

$$f(t) = \frac{1}{1000}\left(\frac{t^3}{3} + 10t^2 + 100t\right) + c.$$

'Ομως f(0) = 2 οπότε c = 2, άρα:

$$f(t) = \frac{1}{1000}\left(\frac{t^3}{3} + 10t^2 + 100t + 2000\right).$$

Επομένως, σε 3 χρόνια από σήμερα, η συγκέντρωση του μονοξειδίου του άνθρακα θα είναι:

$$f(3) = \frac{1}{1000}(9 + 90 + 900 + 2000) = 2{,}999 \text{ ppm}.$$

'Ασκηση 4

Το γνωστό σύστημα "εκκρεμές – μάζα" περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$mx'' = -kx$$

όπου x η απόσταση ως συνάρτηση του χρόνου t και k σταθερά.

Να αποδείξετε ότι μια λύση που ικανοποιεί αυτή τη διαφορική είναι της μορφής:

$$x = c_1\, συν(ωt) + c_2\, ημ(ωt)$$

με $ω^2 = \frac{k}{m}$ και c_1, c_2 σταθερές.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$x'(t) = -c_1\, ω\, ημ(ωt) + ω\, c_2\, συν(ωt)$$

$$x''(t) = -c_1\, ω^2\, συν(ωt) - ω^2\, c_2\, ημ(ωt)$$

Επομένως:

$$mx'' = -mω^2(c_1\, συν(ωt) + c_2\, ημ(ωt)) = -kx.$$

§ 4.8 – 4.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να αποδείξετε ότι η γραμμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι:

(α) Γνησίως αύξουσα αν $\alpha > 0$.

(β) Γνησίως φθίνουσα αν $\alpha < 0$.

(γ) Σταθερή αν $\alpha = 0$.

Λύση

Προφανώς ισχύουν τα ζητούμενα αφού $f'(x) = \alpha$.

'Ασκηση 2

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x}$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Λύση

Είναι $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, οπότε αν $\alpha > 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ αν $\alpha < 0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

'Ασκηση 3

Δίνεται μια συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

(ii) Υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = 0$.

Τι ισχύει για το σημείο $(\gamma, f(\gamma))$; Τι θα ισχύει αν αντί της (i) είχαμε ότι $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$;

Λύση

Στην πρώτη περίπτωση το σημείο $(\gamma, f(\gamma))$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου, ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι θέση τοπικού μεγίστου.

'Ασκηση 4

Να αποδείξετε ότι η κυβική συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,\ \ \alpha \neq 0$$

δεν έχει τοπικά ακρότατα αν $\beta^2 - 3\alpha\gamma \leqslant 0$.

Λύση

Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$.
Η διακρίνουσα της f' είναι $\Delta = 4(\beta^2 - 3\alpha\gamma) \leqslant 0$, οπότε είτε η f' δεν έχει ρίζα, άρα δεν υπάρχουν πιθανά ακρότατα, είτε έχει μοναδική ρίζα αλλά διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε πάλι δεν έχει ακρότατα.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$, με

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},\ \ \text{όπου } \alpha, \gamma \neq 0$$

δεν έχει τοπικά ακρότατα αν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.
Τι συμβαίνει όταν $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$;

Λύση

Είναι $f'(x) = \dfrac{\alpha(\gamma x + \delta) - \gamma(\alpha x + \beta)}{(\gamma x + \delta)^2} = \dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}$.

Επομένως, είτε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$, όταν $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, είτε $f'(x) < 0$ όταν $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$. Οπότε η f δεν έχει τοπικά ακρότατα όταν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.
Αν $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, τότε $f'(x) = 0$, οπότε η f είναι σταθερά.

'Ασκηση 2

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f\colon [0, 5] \to \mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x-3)$$

Λύση

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι ο ακόλουθος:

x	0		1		2		3		5
f′		+	0	−	0	−	0	+	
f		↗		↘		↘		↗	

Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$, τοπικό ελάχιστο στο $x_3 = 3$ και τοπικό μέγιστο στο $x_4 = 5$. Στο $x_2 = 2$ η f παρουσιάζει στάσιμο σημείο, το οποίο δεν είναι ακρότατο.

'Ασκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

(α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να συγκριθούν οι τιμές $f(\pi)$ και $f(e)$.

(γ) Να συγκριθούν οι αριθμοί e^{π} και π^{e}.

Λύση

(α) 'Εχουμε ότι $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ και τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	0		e		+∞
f′		+	0	−	
f		↗		↘	
			Τ.Μ.		

(β) Αφού $\pi > e$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \geqslant e$, έχουμε ότι $f(\pi) < f(e)$.

(γ) Είναι:

$$f(\pi) < f(e) \quad \text{ή} \quad \frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \quad \text{ή} \quad e\ln\pi < \pi\ln e \quad \text{ή} \quad \ln(\pi^e) < \ln(e^\pi) \quad \text{ή}$$

$$\pi^e < e^\pi.$$

'Ασκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με:

$$f(x) = \frac{x - e^x}{x + e^x} \quad \text{και} \quad g(x) = x - x\ln x$$

(i) Να αποδείξετε ότι παρουσιάζουν μέγιστο σε σημείο με κοινή τετμημένη.

(ii) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$.

Λύση

(i) 'Εχουμε ότι $f'(x) = \dfrac{2e^x(1 - x)}{(x + e^x)^2}$ και τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	0		1		$+\infty$
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

Για τη g έχουμε ότι $g'(x) = -\ln x$ και τον αντίστοιχο πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
g'		+	0	−	
g		↗		↘	

(ii) Η h έχει ακριβώς την ίδια μεταβολή με τις f και g, δηλαδή:

x	0		1		$+\infty$
h'		+	0	−	
h		↗		↘	

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Το ύψος ενός πυραύλου (σε m) μετά από t sec πτήσης, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 8t^2 + \frac{33}{2}t + 5, \quad t \geqslant 0.$$

Να εξετάσετε πότε ο πύραυλος αυτός ανεβαίνει και πότε κατεβαίνει.

Λύση

Αρκεί να μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης f, δηλαδή:

$$f'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 16t + \frac{33}{2}$$

Η f' έχει ρίζες -1 και 33. Η πρώτη απορρίπτεται αφού $t \geqslant 0$, οπότε έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

t	0		33		$+\infty$
f′		+	0	−	
f		↗		↘	

Επομένως στο χρονικό διάστημα [0, 33] ο πύραυλος αυξάνει διαρκώς το ύψος του, ενώ για $t > 33$ αρχίζει και πέφτει.

'Ασκηση 2

Το πλήθος των εγκλημάτων τα τελευταία 10 χρόνια σε μία πόλη (1989 – 1999) δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 0{,}03t^3 + \frac{368{,}64}{t} \text{ δεκάδες εγκλήματα}, \quad 0 < t \leqslant 10$$

Να εξετάσετε ποια χρονιά είχαμε την ελάχιστη εγκληματικότητα.

Λύση

Αρκεί να μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης f, δηλαδή:

$$f'(t) = 0{,}09t^2 - \frac{368{,}64}{t^2} = \frac{0{,}09}{t^2}(t^4 - 4096).$$

'Εχουμε:

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^4 = 4096 \Leftrightarrow t = -8 \text{ ή } t = 8.$$

Η $t = -8$ απορρίπτεται αφού $t > 0$, οπότε έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	0		8		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Επομένως το 1997 είχαμε τη μικρότερη εγκληματικότητα.

'Ασκηση 3

Η πιθανότητα P να βρεθεί ένα ηλεκτρόνιο σε απόσταση r από τον πυρήνα ενός ατόμου υδρογόνου δίνεται από την εξίσωση:

$$P = \frac{4r^2}{\alpha_0^3} e^{-\frac{2r}{\alpha_0}}, \text{ όπου } \alpha_0 \text{ σταθερά.}$$

Αφού βρείτε την παράγωγο του P ως προς r, υπολογίστε την τιμή του r όταν η πιθανότητα είναι μέγιστη, δηλαδή την πιο πιθανή τιμή του r.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$P'(r) = \frac{4}{\alpha_0^3}\left[2re^{-\frac{2r}{\alpha_0}} + r^2 e^{-\frac{2r}{\alpha_0}}\left(-\frac{2}{\alpha_0}\right)\right] = \frac{8re^{-\frac{2r}{\alpha_0}}}{\alpha_0^4}(\alpha_0 - r).$$

Επομένως έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

r	0		α_0		$+\infty$
P'		$+$	0	$-$	
P		$\nearrow$		$\searrow$	

Οπότε η P παρουσιάζει μέγιστο για $r = \alpha_0$.

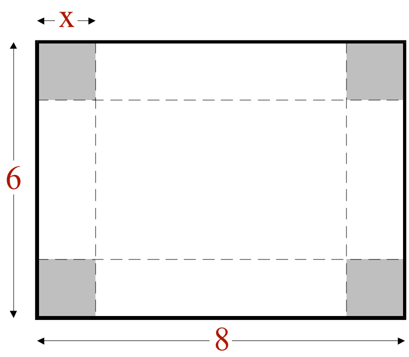
'Ασκηση 4

Από ένα κομμάτι χαρτόνι ορθογώνιου σχήματος, με πλευρές 6 cm και 8 cm, να κατασκευασθεί ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοιχτό στο πάνω μέρος, έτσι ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό όγκο.

Λύση

Κόβουμε τέσσερα τετράγωνα κομμάτια από τις γωνίες του χαρτονιού πλευράς x και σχηματίζεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όγκου:

$V(x) = x(6 - 2x)(8 - 2x) = 4x(3 - x)(4 - x)$, για $0 < x < 3$.



Τότε έχουμε ότι:

$$V'(x) = 4(3x^2 - 14x + 12)$$

και η V παρουσιάζει δύο στάσιμα σημεία:

$$x_1 = \frac{7-\sqrt{13}}{3} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{7+\sqrt{13}}{3}.$$

Αφού $x_2 > 3$, απορρίπτεται. Επίσης:

$$f''\left(\frac{7-\sqrt{13}}{3}\right) = 4\left(6\cdot\frac{7-\sqrt{13}}{3} - 14\right) = -8\sqrt{13} < 0$$

άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{13}}{3}$.

'Ασκηση 5

Μια τουριστική επιχείρηση οργανώνει εκδρομές με λεωφορεία. Κάθε τουριστικό λεωφορείο έχει 50 θέσεις. 'Οταν οι επιβάτες του λεωφορείου είναι ακριβώς 30, τότε η εταιρεία ζητά 5000 δρχ. κατά άτομο. Για να αυξήσει τους επιβάτες, η εταιρεία κάνει την εξής προσφορά:

«*Κάθε επιπλέον επιβάτης θα μειώνει κατά 100 δρχ. τη χρέωση κάθε άλλου επιβάτη*»

Να βρεθεί το πλήθος των επιπλέον επιβατών που πρέπει να έχει κάθε λεωφορείο, ώστε η επιχείρηση να έχει μεγιστοποιήσει τα έσοδά της.

Λύση

Η συνάρτηση εσόδων για x επιπλέον επιβάτες από τους 30 είναι η εξής:

$$E(x) = (30 + x)(5000 - 100x) = -100x^2 + 2000x + 150000 \text{ δραχμές}.$$

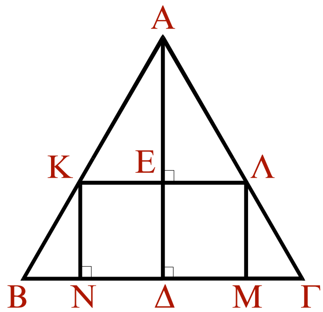
'Εχουμε τότε ότι:

$$E'(x) = -200x + 2000$$

οπότε η Ε έχει μέγιστο στο $x_0 = 10$ αφού $E''(10) = -200 < 0$. 'Αρα η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα έσοδά της αν σε κάθε λεωφορείο έχει 40 άτομα.

'Ασκηση 6

Να προσδιορισθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου μέγιστου εμβαδού, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 cm, αν η μια πλευρά του ορθογωνίου περιέχεται σε μια πλευρά του τριγώνου (βλ. Σχήμα).



Λύση

'Εστω x = ΛΜ και y = ΚΛ. Αν θεωρήσουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε τα τρίγωνα ΑΕΛ και ΑΔΓ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{AE}{A\Delta} = \frac{E\Lambda}{\Delta\Gamma} \quad ή \quad \frac{A\Delta - x}{A\Delta} = \frac{\frac{K\Lambda}{2}}{\frac{B\Gamma}{2}} \quad ή \quad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y}{1} \quad ή \quad y = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}x$$

με τους περιορισμούς $0 < y < B\Gamma = 1$ και $0 < x < A\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου δίνεται από το γινόμενο:

$$xy = x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}x\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + x.$$

Η συνάρτηση $f\colon \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + x$$

έχει παράγωγο:

$$f'(x) = -\frac{4}{\sqrt{3}}x + 1 = -\frac{4}{\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$$

και στάσιμο σημείο στο $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Αφού $f''\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{4}{\sqrt{3}} < 0$ έχουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ οπότε το ορθογώνιο έχει διαστάσεις $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm και $\frac{1}{2}$ cm και εμβαδόν $\frac{\sqrt{3}}{8}\,\text{cm}^2$.

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

'Ασκηση 1

Δίνεται συνάρτηση f: ℝ→ℝ παραγωγίσιμη στο x_0. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f^2(x_0+h) - f^2(x_0)}{h} = 2f(x_0)f'(x_0)$

(ii) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x_0+h)f(x_0) - x_0 f(x_0+h)}{h} = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$

Λύση

(i) 'Εχουμε ότι:

$$\frac{f^2(x_0+h) - f^2(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,(f(x_0+h) + f(x_0))$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

(ii) 'Εχουμε ότι:

$$\frac{(x_0+h)f(x_0) - x_0 f(x_0+h)}{h} = \frac{x_0 f(x_0) - x_0 f(x_0+h)}{h} + f(x_0) =$$

$$(-x_0)\cdot\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + f(x_0)$$

και έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα για h→0.

'Ασκηση 2

Ο όγκος V του χωρίου μεταξύ δύο ομόκεντρων σφαιρών μεγαλώνει ως προς το χρόνο. Η ακτίνα της εξωτερικής σφαίρας αυξάνει με σταθερό ρυθμό 2 m/h, ενώ η ακτίνα της εσωτερικής σφαίρας αυξάνει με σταθερό ρυθμό $\frac{1}{2}$ m/h. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου V, όταν η εξωτερική ακτίνα γίνει ίση με 3 m και η εσωτερική με 1 m.

Λύση

Ο όγκος V θα δίνεται από τη διαφορά των όγκων των δύο σφαιρών:

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(R_2^3 - R_1^3)$$

όπου R_2 η ακτίνα της μεγάλης σφαίρας και R_1 η ακτίνα της μικρής. Έχουμε τότε ότι:

$$\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h} = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{R_2^3(t_0+h)-R_2^3(t_0)}{h} - \frac{R_1^3(t_0+h)-R_1^3(t_0)}{h}\right] =$$

$$\frac{4}{3}\pi\left[\frac{R_2(t_0+h)-R_2(t_0)}{h}\,(R_2^2(t_0+h)+R_2(t_0)R_2(t_0+h)+R_2^2(t_0)) -\right.$$

$$\left.-\frac{R_1(t_0+h)-R_1(t_0)}{h}\,(R_1^2(t_0+h)+R_1(t_0)R_1(t_0+h)+R_1^2(t_0))\right]$$

Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h} = \frac{4}{3}\pi\,[R_2'(t_0)\cdot 3R_2^2(t_0) - R_1'(t_0)\cdot 3R_1^2(t_0)] =$$

$$\frac{4}{3}\pi\,(2\cdot 3\cdot 9 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1^2) = 70\pi\ m^3/h.$$

Άσκηση 3

Ο αριθμός βακτηρίων N(t) σε μια συγκεκριμένη καλλιέργεια μεταβάλλεται μετά τη χρήση ενός βακτηριοκτόνου ως εξής:

$$N(t) = \frac{10000}{1+t^2} + 2000$$

όπου ο χρόνος t εκφράζεται σε min. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής και το πλήθος των βακτηρίων 1 και 2 min μετά τη χρήση του βακτηριοκτόνου.

Λύση

Ο ρυθμός μεταβολής είναι: $N'(t) = -\dfrac{20000t}{(1+t^2)^2}$. Επομένως:

$$N'(1) = -5000 \quad \text{και} \quad N'(2) = -1600.$$

Άσκηση 4

Στη φυσική χρησιμοποιείται ευρέως η έννοια της ειδικής θερμότητας υπό σταθερή πίεση C_P, η οποία ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της θερμότητας q ως προς τη θερμοκρασία T, δηλαδή:

$$C_P = q'(T)$$

Αν από πειραματικά δεδομένα είναι γνωστό ότι $C_P = A + BT$, όπου A, B σταθερές, να υπολογίσετε τη συνάρτηση q ως προς T. Πώς απλοποιείται η συνάρτηση αυτή αν η C_P είναι σταθερά, δηλαδή ανεξάρτητη της θερμοκρασίας;

Λύση

'Εχουμε ότι $q'(T) = A + BT$, οπότε:

$$q(T) = \frac{B}{2}T^2 + AT + C, \text{ όπου } C \text{ σταθερά.}$$

Αν η C_P ήταν σταθερά, τότε:

$$q'(T) = C_P \quad \text{ή} \quad q'(T) = C_P T + C_1, \text{ όπου } C_1 \text{ σταθερά.}$$

'Ασκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$, με $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y' + y = \kappa$, όπου κ σταθερά, πολλαπλασιάζοντας με e^x και τα δύο μέλη της εξίσωσης.

(ii) $y' - y = \kappa$, όπου κ σταθερά, πολλαπλασιάζοντας με e^{-x} και τα δύο μέλη της εξίσωσης.

(iii) $y'' = y$, προσθέτοντας την y' στα δύο μέλη της εξίσωσης.

Λύση

(i) Είναι $e^x(f'(x) + f(x)) = \kappa e^x$ ή $(f(x)e^x)' = \kappa e^x$. Οπότε:

$$f(x)e^x = \kappa e^x + c \quad \text{ή} \quad f(x) = \kappa + ce^{-x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Είναι $e^{-x}(f'(x) - f(x)) = \kappa e^{-x}$ ή $(f(x)e^{-x})' = \kappa e^{-x}$. Επομένως:

$$f(x) = \kappa + c_1 e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Είναι $f''(x) + f'(x) = f'(x) + f(x)$.

Πολλαπλασιάζοντας με e^x βρίσκουμε:

$$(e^x f'(x))' = (e^x f(x))' \quad \text{ή} \quad e^x f'(x) = e^x f(x) + c_2 \quad \text{ή} \quad f'(x) - f(x) = c_2 e^{-x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με e^{-x} βρίσκουμε:

$$(e^{-x} f(x))' = c_2 e^{-2x} \quad \text{ή} \quad e^{-x} f(x) = c_2 \frac{e^{-2x}}{-2} + c_3 \quad \text{ή} \quad f(x) = c_4 e^{-x} + c_3 e^x,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

'Ασκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$, με την f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$xy' = (x + 1)y,$$

για $x > 0$ και $f(1) = e$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$xf'(x) - f(x) = xf(x) \quad ή \quad \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \quad ή \quad \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x}$$

Επομένως:

$$\frac{f(x)}{x} = ce^x \quad ή \quad f(x) = cxe^x.$$

Αφού $f(1) = e$ έχουμε ότι $c = 1$, οπότε:

$$f(x) = xe^x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

'Ασκηση 7

Να μελετηθεί η κυβική συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \text{ με } \alpha > 0$$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, όταν $\beta^2 - 3\alpha\gamma > 0$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

'Οταν $\beta^2 - 3\alpha\gamma > 0$, η f' έχει δύο ρίζες:

$$x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 3\alpha\gamma}}{\alpha} \qquad x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 3\alpha\gamma}}{\alpha}$$

και η f έχει πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

οπότε παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_1 και τοπικό μέγιστο στο x_2.

'Ασκηση 8

Να βρείτε τα ζεύγη των θετικών αριθμών που έχουν σταθερό άθροισμα c και μέγιστο γινόμενο της τρίτης δύναμης του ενός και της δεύτερης του άλλου.

Λύση

'Εστω x, z οι αριθμοί με $x + z = c$ ή $z = c - x$. Θέλουμε να βρούμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης:

$$f(x) = x^3(c - x)^2, \text{ για } 0 < x < c.$$

Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = 3x^2(c - x)^2 - 2x^3(c - x) = x^2(c - x)(3c - 5x)$$

η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{3c}{5}$.

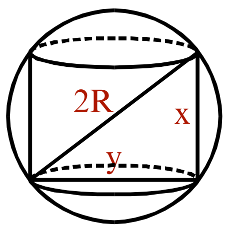
'Ασκηση 9

Σε δοσμένη σφαίρα:

(α) Να εγγραφεί κύλινδρος με μέγιστο όγκο.

(β) Να εγγραφεί ορθός κώνος με μέγιστο όγκο.

Λύση



(α) 'Εστω x το ύψος του εγγεγραμμένου κυλίνδρου και y η διάμετρος της βάσης του. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι:

$$V = \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 x$$

και $y^2 = 4R^2 - x^2$, οπότε:

$$V(x) = \frac{\pi}{4}(4R^2 - x^2)\, x$$

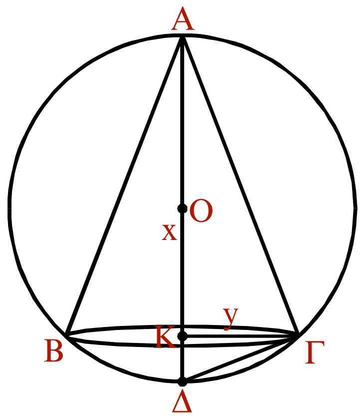
με θέση πιθανού ακροτάτου στο $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Είναι $V''\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right) = -\pi R\sqrt{3} < 0$, οπότε το ολικό μέγιστο επιτυγχάνεται στο σημείο $\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}, \frac{2R\sqrt{6}}{3}\right)$.

(β) Ο όγκος του κώνου δίνεται από τον τύπο:

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 x$$

όπου x είναι το ύψος ΑΚ του κώνου και y η ακτίνα ΚΓ της βάσης του. Τα τρίγωνα ΑΚΓ και ΑΓΔ είναι όμοια, οπότε:



$$\frac{AK}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \quad \text{ή} \quad A\Gamma^2 = AK \cdot A\Delta \quad \text{ή}$$

$$x^2 + y^2 = x \cdot 2R \quad \text{ή} \quad y^2 = x(2R - x).$$

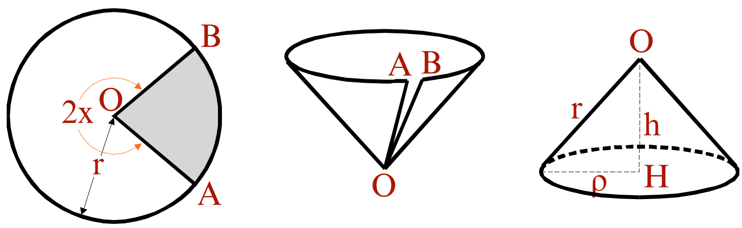
Οπότε ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2(2R - x), \text{ για } 0 < x < 2R$$

με μέγιστη τιμή για $x = \frac{4}{3}R$.

'Ασκηση 10

Δίνεται ένας κυκλικός χάρτινος δίσκος και θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα φίλτρο καφέ σε σχήμα κώνου, έτσι ώστε να έχει μέγιστο όγκο.



Λύση

'Εστω r η ακτίνα του κυκλικού δίσκου, από τον οποίο κόβουμε έναν κυκλικό τομέα ΟΑΒ με ΑΒ = 2x. Η ακτίνα ρ της βάσης του κώνου που κατασκευάζεται ισούται με:

$$\rho = \frac{2xr}{2\pi} = \frac{r}{\pi}x$$

ενώ το ύψος h ισούται με:

$$h^2 = r^2 - \rho^2 \quad \text{ή} \quad h = \frac{r}{\pi}\sqrt{\pi^2 - x^2}.$$

Συνεπώς, ο όγκος V του φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$V(x) = \pi\rho^2 \frac{h}{3} = \frac{r^3}{3\pi^2}\sqrt{x^4(\pi^2 - x^2)},\ \text{για}\ 0 < x < \pi$$

που παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = \frac{\sqrt{6}\pi}{3}$ με $V(x_1) = \frac{2\pi}{3}(3 - \sqrt{6})$ και $h \simeq 0{,}574r < \frac{1}{3}$ (διαμέτρου της βάσης).

'Ασκηση 11

Οι μπογιές είναι μίγματα ενός πολυμερούς (όπως τα πλαστικά), ενός διαλύτη (όπως νερό ή αλκοόλη) και μιας χρωστικής ουσίας. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι το πολυμερές να αναμειγνύεται πλήρως με το διαλύτη. Θερμοδυναμικά, το πρόβλημα αυτό μελετάται με συναρτήσεις του λεγόμενου συντελεστή ενεργότητας α ως προς τη συγκέντρωση x. 'Ενα τέτοιο γνωστό και σήμερα κλασικό μοντέλο προτάθηκε το 1940 από τους Flory και Huggins:

$$\ln\alpha_1 = \ln(1 - \varphi_2) + \left(1 - \frac{1}{V}\right)\varphi_2 + \lambda\varphi_2^2$$

όπου ο δείκτης 1 αντιστοιχεί στον διαλύτη και ο δείκτης 2 στο πολυμερές, ενώ:

$$\varphi_2 = \frac{x_2V_2}{x_1V_1 + x_2V_2},\quad V_1, V_2\ \text{όγκοι και}\ V = \frac{V_2}{V_1}$$

και λ η παράμετρος του μοντέλου που υπολογίζεται από πειραματικά δεδομένα. Η θερμοδυναμική ορίζει ότι μια υγρή φάση υπάρχει όταν $\lambda < \lambda_{\text{κρισ.}}$, όπου η κρίσιμη τιμή $\lambda_{\text{κρισ.}}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(\ln[\alpha_1(\varphi_2)])' = (\ln[\alpha_1(\varphi_2)])'' = 0.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια υγρή φάση όταν:

$$\lambda \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2.$$

Τι συμβαίνει για πολύ μεγάλου μοριακού βάρους ($V_2 >> V_1$) πολυμερή;

Λύση

Ισχύει ότι:

$$(\ln[\alpha_1(\varphi_2)])' = -\frac{1}{1-\varphi_2} + \left(1 - \frac{1}{V}\right) + 2\lambda\varphi_2 = 0 \qquad (1)$$

$$(\ln[\alpha_1(\varphi_2)])'' = -\frac{1}{(1-\varphi_2)^2} + 2\lambda = 0 \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων ως προς φ_2 και λ βρίσκουμε:

$$\lambda = \lambda_{\text{κρισ.}} = \frac{1}{2(1-\varphi_2)^2}$$

και αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε ότι:

$$(V-1)\varphi_2^2 + 2\varphi_2 - 1 = 0$$

οπότε η αποδεκτή τιμή είναι:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2(\sqrt{V}+1)} \quad \text{και} \quad \lambda_{\text{κρισ.}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2.$$

Για πολύ "βαριά" πολυμερή ($V_2 >> V_1$) έχουμε ότι το $\frac{1}{\sqrt{V}}$ τείνει στο 0, οπότε $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$, τιμή που για χρόνια χρησιμοποιήθηκε στη Βιομηχανία ως ένδειξη αναμειξιμότητας ενός πολυμερούς και ενός διαλύτη.