# 3 'Οριο – Συνέχεια Συνάρτησης

## Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί η πρωταρχική έννοια του ορίου μιας συνάρτησης. Θα παρουσιασθούν οι βασικές ιδιότητές του και βασικές συνέπειες, όπως η μελέτη της ύπαρξης κατακόρυφης ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Κατόπιν θα εξετάσουμε την έννοια της συνέχειας η οποία είναι μια τοπική ιδιότητα για μια συνάρτηση.

Θα ασχοληθούμε τέλος με τα όρια στο άπειρο, συνέπεια των οποίων είναι η μελέτη της ύπαρξης οριζόντιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

## 3.1. Η έννοια του Ορίου

Στην καθημερινή μας ζωή είναι αρκετά συνηθισμένη η έννοια του ορίου σε διάφορες καταστάσεις. Αν προσπαθήσουμε να αφαιρέσουμε την ιδιαιτερότητα των καταστάσεων αυτών, θα συνειδητοποιήσουμε ότι η έννοια του ορίου είναι μια γενικότερη έννοια που μας εκφράζει ότι αν μια «ποσότητα» τείνει προς ένα συγκεκριμένο όριο, τότε οσοδήποτε κοντά στο όριο αυτό, θα υπάρχουν άπειρες τιμές της ποσότητας. Δηλαδή, οι τιμές της ποσότητας συγκλίνουν / συσσωρεύονται προς την τιμή του ορίου.

### Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό τρένο στο οποίο κάνουμε δοκιμαστικές μετρήσεις. 'Εστω f η συνάρτηση θέσης του τρένου, η οποία είναι συνάρτηση του χρόνου t. Για t = 0, 1, 2, …, 10 οι τιμές της f θα είναι:

| **t** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f(t)** | 0 | 4 | 16 | 36 | 64 | 100 | 144 | 198 | 256 | 324 | 400 |

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση θέσης f, έχει τη μορφή:

$f(t) = 4t^2$, $t \geqslant 0$. Η μέση ταχύτητα του τρένου δίνεται από το πηλίκο:

$$\frac{\text{απόσταση που έχει διανυθεί}}{\text{αντίστοιχο χρονικό διάστημα}}$$

Ας εξετάσουμε τη συμπεριφορά της μέσης ταχύτητας για χρόνους πολύ κοντά στο $t_0 = 2$. Η μέση ταχύτητα δίνεται από τη συνάρτηση:

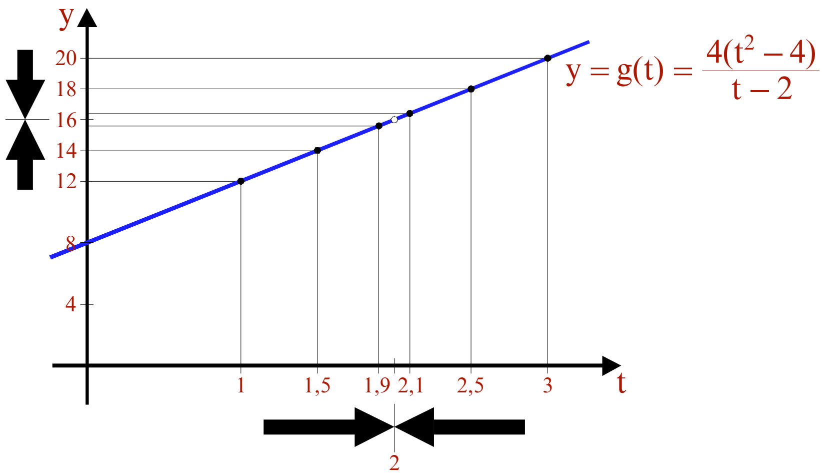
$$g(t) = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2}$$

| **t** | 1,5 | 1,9 | 1,99 | 1,999 | 1,9999 | 2,0001 | 2,001 | 2,01 | 2,1 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **g(t)** | 14 | 15,6 | 15,96 | 15,996 | 15,9996 | 16,0004 | 16,004 | 16,04 | 16,4 | 18 |

Παρατηρούμε ότι όσο το t πλησιάζει το $t_0 = 2$, οι τιμές της g τείνουν στην τιμή 16, είτε από δεξιά, είτε από αριστερά. Τότε θα λέμε ότι το όριο της g, όταν το t τείνει στο $t_0 = 2$, είναι ίσο με 16, και θα γράφουμε:

$$\lim_{t \to t_0} g(t) = \lim_{t \to 2} \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = 16$$

Η γραφική παράσταση της g επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα αυτό:




Επίσης παρατηρούμε ότι το σημείο $t_0 = 2$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Ωστόσο, μας είναι αδιάφορη η τιμή της g στο $t_0 = 2$, καθώς δεν παίζει κανένα ρόλο στη διαδικασία σύγκλισης της g προς το όριο. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί, ότι το πραγματικό παράδειγμα που μελετήσαμε εκφράζει το γνωστό αποτέλεσμα από τη Φυσική ότι το όριο της μέσης ταχύτητας g(t), όταν το t τείνει στο $t_0 = 2$, είναι ίσο με τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική αυτή στιγμή.

Η έννοια ότι το x τείνει στο $x_0$, δηλαδή ότι βρίσκεται αρκετά κοντά στο $x_0$, εκφράζεται διαφορετικά λέγοντας ότι το x ανήκει σε μια **περιοχή** του $x_0$, δηλαδή σε ένα ανοιχτό διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0)$, $(x_0, \beta)$ ή και στην ένωσή τους $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

***Ορισμός:*** Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f\colon (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)^* \to \mathbb{R}$, έχει όριο τον πραγματικό αριθμό $\ell$ όταν το x τείνει στο $x_0$, αν οι τιμές της f(x) βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στον αριθμό $\ell$, όταν το x είναι αρκετά κοντά στο $x_0$ (αλλά δεν γίνεται απαραίτητα ίσο με το $x_0$). Θα συμβολίζουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

Η έννοια ότι οι τιμές της f(x) βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στο όριο $\ell$, σημαίνει ότι οι τιμές f(x) ανήκουν σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του $\ell$.

## 3.2. Ιδιότητες του Ορίου Συνάρτησης

Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και είναι $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \ell_1 \pm \ell_2$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = \ell_1\cdot\ell_2$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, εφόσον $\ell_2 \neq 0$

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell_1|$

(v) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^\nu = \ell_1^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$

(vi) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\ell_1}$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa \geqslant 2$,
όπου η f είναι θετική σε μια περιοχή του $x_0$.

---

* Το πεδίο ορισμού της f είναι φυσικά δυνατόν να είναι ευρύτερο του $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Για να δώσουμε έμφαση θα γράφουμε από εδώ και στο εξής το ελάχιστο δυνατό υποσύνολο που απαιτείται στους ορισμούς των ορίων μιας συνάρτησης.

## 3.3. Πλευρικά 'Ορια Συνάρτησης

'Εγινε φανερό από τις ιδιότητες των ορίων ότι μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα όρια πολυωνυμικών ή ρητών συναρτήσεων, ακόμα και ριζικών, εφόσον διατηρούν σταθερό τύπο. Τι γίνεται όμως όταν η συνάρτηση την οποία μελετάμε είναι κλαδωτή, δηλαδή περιέχει περισσότερους από έναν τύπους γνωστών συναρτήσεων;

***Παράδειγμα 1***

'Ενας εργαζόμενος κάνει την εξής συμφωνία με τον εργοδότη του: να πληρώνεται 1000 δραχμές την ώρα για τις πρώτες οκτώ ώρες εργασίας του και 1500 δραχμές την ώρα όταν κάνει υπερωρίες, δηλαδή όταν εργάζεται περισσότερο από οκτώ ώρες. Να βρεθεί η συνάρτηση f που εκφράζει το μισθό του εργαζομένου και να υπολογισθούν τα $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$.

Λύση

Ας ονομάσουμε x τις ώρες εργασίας του εργαζομένου. Τότε όταν $0 \leqslant x \leqslant 8$, δηλαδή στο πρώτο οκτάωρο εργασίας, οι αποδοχές του εργαζομένου θα είναι:

$$f(x) = 1000x \text{ δραχμές}$$

Για $x > 8$ θα έχουμε ότι οι αποδοχές του θα είναι 1500x δραχμές, αφαιρώντας όμως $8 \cdot 500 = 4000$ δραχμές, καθώς το πρώτο οκτάωρο δε χρεώθηκε στις υπερωρίες. Η συνάρτηση f του μισθού του εργαζομένου, θα έχει τη μορφή:

$$f(x) = \begin{cases} 1000x & \text{αν} \quad 0 \leqslant x \leqslant 8 \\ 1500x - 4000 & \text{αν} \quad 8 < x \leqslant 24 \end{cases}$$

'Οταν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, είναι φανερό ότι εργαζόμαστε με τον πρώτο κλάδο της f, οπότε:

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} (1000x) = 5000$$

'Ομοια, για το $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$ εργαζόμαστε με το δεύτερο κλάδο της f και έχουμε:

$$\lim_{x\to 9} f(x) = \lim_{x\to 9} (1500x - 4000) = 9500$$

'Ομως δε μπορούμε να εργασθούμε με έναν μόνο κλάδο για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$. Περιοριζόμαστε λοιπόν σε κάθε κλάδο ξεχωριστά και έχουμε:

(α) Για $x < 8$: $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = \lim\limits_{x\to 8} (1000x) = 8000$

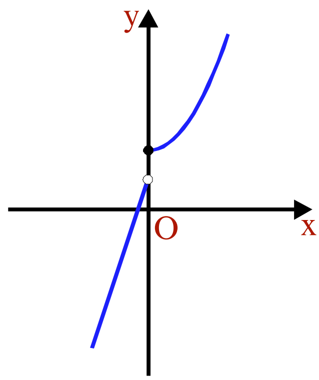
(β) Για $x > 8$: $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = \lim\limits_{x\to 8} (1500x - 4000) = 8000$

Τα δύο αυτά όριο ονομάζονται πλευρικά όρια της f και για να τα διακρίνουμε γράφουμε $\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 8^+} f(x)$ αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση θα λέμε ότι το x τείνει (πλησιάζει) στο $x_0 = 8$ από τα αριστερά ($x\to x_0^-$), ενώ στη δεύτερη ότι το x τείνει στο $x_0$ από τα δεξιά ($x\to x_0^+$).

### *Παράδειγμα 2*

Ας μελετήσουμε και ένα παράδειγμα ορίου συνάρτησης σε σημείο στο οποίο τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά. Ας εξετάσουμε το όριο της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & , \quad x < 0 \\ x^2+2 & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$




στο $x_0 = 0$. 'Εχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2+2) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (3x+1) = 1$$

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Είναι φανερό ότι το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει, αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά της όρια και είναι ίσα, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, όπου $\ell \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν:

$$\mathbf{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell}$$

Αν τα δυο πλευρικά όρια μιας συνάρτησης είναι διαφορετικά, τότε θα λέμε ότι δεν υπάρχει το όριο της f, όταν το x τείνει στο $x_0$.

## 3.4. Μη πεπερασμένο 'Οριο Συνάρτησης – Απροσδιόριστες Μορφές

Η έννοια του απείρου είναι γνωστή σε όλους μας, με την έννοια της απεριόριστης αύξησης (+∞) ή μείωσης (–∞) μιας ποσότητας. Στην περίπτωση του +∞ η ποσότητα αυτή ξεπερνά οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό, ενώ για το –∞ έχουμε ότι η ποσότητα είναι μικρότερη από οποιονδήποτε αρνητικό πραγματικό αριθμό.

Η διαδικασία της προσέγγισης του απείρου από μια συνάρτηση εκφράζεται με το όριο της συνάρτησης, το οποίο θα λέμε ότι είναι μη πεπερασμένο.

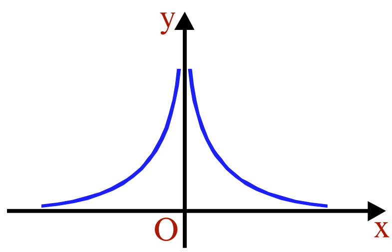
### Παράδειγμα

Ας μελετήσουμε το όριο της συνάρτησης f: $\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{x^2}$, όταν το x τείνει στο 0.

| x | –0,1 | –0,001 | –0,000001 | 0,000001 | 0,001 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 100 | $10^6$ | $10^{12}$ | $10^{12}$ | $10^6$ | 100 |

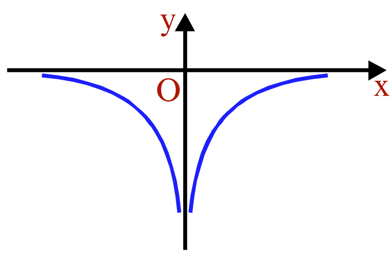
Είναι φανερό ότι καθώς το x τείνει στο 0, οι τιμές της f(x) αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M. Τότε γράφουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$




'Ομοια για τη συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, έχουμε ότι οι τιμές της ελαττώνονται απεριόριστα όταν το x τείνει στο 0. Τότε γράφουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$



***Ορισμός:*** (α) Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f: (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \to \mathbb{R}$ έχει όριο το $+\infty$ όταν το x τείνει στο $x_0$, αν οι τιμές της f(x) αυξάνονται απεριόριστα ξεπερνώντας κάθε θετικό πραγματικό αριθμό, καθώς το x πλησιάζει το $x_0$.

(β) Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f: (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \to \mathbb{R}$ έχει όριο το $-\infty$ όταν το x τείνει στο $x_0$, αν οι τιμές της f(x) ελαττώνονται απεριόριστα ώστε να γίνονται μικρότερες από κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό, καθώς το x πλησιάζει το $x_0$.

- **Επιτρεπτές πράξεις με το άπειρο**

Για να μπορούμε πλέον να κάνουμε πράξεις με μη πεπερασμένα όρια, θα πρέπει να γνωρίζουμε ποιες είναι οι δυνατές ή όπως λέμε επιτρεπτές πράξεις.

'Εστω $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις:

(i) $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$

(ii) Αν $x > 0$, τότε $x\cdot(+\infty) = +\infty$, $x\cdot(-\infty) = -\infty$

(iii) Αν $x < 0$, τότε $x\cdot(+\infty) = -\infty$, $x\cdot(-\infty) = +\infty$

(iv) $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$

Επιπλέον των παραπάνω πράξεων έχουμε και τις πράξεις μεταξύ του $(+\infty)$ και του $(-\infty)$ ως εξής:

(i) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

(ii) $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$, $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

Είναι σημαντική η παρατήρηση ότι δεν ορίζονται οι πράξεις:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot(\infty), (+\infty) + (-\infty)$$

οι οποίες καλούνται απροσδιόριστες μορφές.

- **Μελέτη απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$ για ρητές συναρτήσεις**

Στα όρια ρητών συναρτήσεων, συναντάμε συχνά την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, όταν έχουμε ότι:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0},$$

με $\alpha_\nu$, $\beta_\mu \neq 0$ και

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0) = 0, \quad \lim_{x\to x_0} q(x) = q(x_0) = 0$$

Τότε ισοδύναμα έχουμε ότι το $x_0$ αποτελεί ρίζα των πολυωνύμων p(x), q(x), δηλαδή τα p, q έχουν παράγοντα τον όρο $(x - x_0)$ υψωμένο σε κάποια δύναμη.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλες αλγεβρικές πράξεις, ταυτότητες, παραγοντοποιήσεις κ.λπ. θα απλοποιούμε τις δυνάμεις του $(x - x_0)$ από τον αριθμητή και τον παρονομαστή και κατόπιν θα εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων.

## Παραδείγματα

### *Παράδειγμα 1*

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$.

Λύση

'Εχουμε ότι: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x-1}{x-3}$.

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x-3} = -1$.

### *Παράδειγμα 2*

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{(x-2)^3}$.

Λύση

'Εχουμε ότι: $\dfrac{x^2 - 4}{(x-2)^3} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^3} = \dfrac{x+2}{(x-2)^2}$.

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{(x-2)^3} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{(x-2)^2} = +\infty$.

***Παράδειγμα 3***

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8}$.

**Λύση**

'Εχουμε ότι: $\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8}=\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\dfrac{x-2}{x^2+2x+4}$.

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+2x+4}=0$.

- **Μελέτη απροσδιόριστης μορφής $\dfrac{0}{0}$ για ριζικά**

'Οταν συναντάμε την απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$ σε συναρτήσεις που περιλαμβάνουν ριζικά, τότε συνήθως πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με κατάλληλες συζυγείς παραστάσεις (βλ. πίνακα).

**Πίνακας Συζυγών Παραστάσεων**

| Αποτέλεσμα Γινομένου | Παράγοντας | Συζυγής Παράσταση |
|---|---|---|
| $x-\alpha$ | $\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}$ | $\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}$ |
| $x-\alpha$ | $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\alpha}$ | $(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{\alpha}+(\sqrt[3]{\alpha})^2$ |
| $x-\alpha$ | $\sqrt[\nu]{x}-\sqrt[\nu]{\alpha}$ | $(\sqrt[\nu]{x})^{\nu-1}+(\sqrt[\nu]{x})^{\nu-2}\sqrt[\nu]{\alpha}+\cdots+\sqrt[\nu]{x}(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu-2}+(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu-1}$ |

**Παραδείγματα**

***Παράδειγμα 1***

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

**Λύση**

'Εχουμε ότι: $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$.

Επομένως: $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$.

*Παράδειγμα 2*

Να υπολογισθεί το όριο: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{(\sqrt[3]{x}-1)[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]}{(x-1)[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]}=\frac{x-1}{(x-1)[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]}=$$
$$\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}$$

Επομένως: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{3}$.

## 3.5. Κατακόρυφη Ασύμπτωτη Γραφικής Παράστασης Συνάρτησης

Η συμπεριφορά μιας συνάρτησης στα σημεία που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της προσδιορίζεται άμεσα από τον τύπο της. Ωστόσο, στη μελέτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης συναντάμε ιδιαίτερο πρόβλημα στον προσδιορισμό της συμπεριφοράς της συνάρτησης, σε σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, αλλά υπάρχει περιοχή τους μέσα σε αυτό.

### Παραδείγματα

*Παράδειγμα 1*

Η συνάρτηση f: $\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\frac{1}{x}$ έχει γνωστή συμπεριφορά σε κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Για παράδειγμα: $f(-5)=-\frac{1}{5}$, $f(8)=\frac{1}{8}$ κ.ο.κ.

Ωστόσο, δε γνωρίζουμε πως συμπεριφέρεται κοντά στο σημείο $\alpha=0$, το οποίο δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, αλλά υπάρχουν περιοχές του $\alpha=0$ και στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

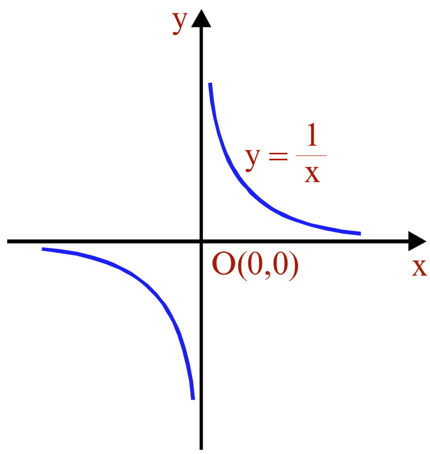
Είναι λογικό να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των τιμών της f, όταν το x τείνει στο α = 0. Φυσικά η μελέτη αυτή πρέπει να γίνει από τα δεξιά και από τα αριστερά. 'Εχουμε λοιπόν ότι:

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι τιμές της f τείνουν στο +∞, όταν το x τείνει στο α = 0 από τα δεξιά, επομένως συμπεριφέρονται όπως η ευθεία x = 0 (άξονας y′y), χωρίς όμως η γραφική παράσταση της f να τέμνει την x = 0. Η συμπεριφορά αυτή της $C_f$ λέγεται ασυμπτωτική συμπεριφορά και η ευθεία x = 0 λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$, όταν το x τείνει στο α = 0 από τα δεξιά.

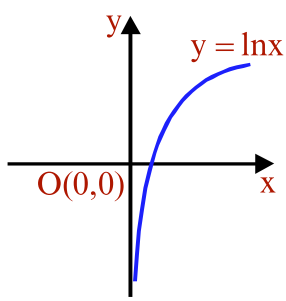
'Ομοια η x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$ και όταν το x τείνει στο α = 0 από τα αριστερά, με τη διαφορά ότι οι τιμές της f τείνουν στο –∞.




***Παράδειγμα 2***

Ας μελετήσουμε τη συνάρτηση f: (0, +∞)→ℝ, με f(x) = lnx, ως προς τις κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Το μοναδικό σημείο στο οποίο θα εξετάσουμε αν η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι το α = 0, καθώς δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, αλλά υπάρχει περιοχή του α = 0 στο διάστημα (0, +∞).



Προφανώς, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ δεν έχει νόημα η μελέτη για κατακόρυφες ασύμπτωτες, παρ'όλο που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f, αφού δεν υπάρχει περιοχή τους μέσα σε αυτό. Έτσι, έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

οπότε η $x = 0$ είναι μια κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$, όταν το x τείνει στο $\alpha = 0$ από τα δεξιά.

***Ορισμός:*** Έστω συνάρτηση $f\colon A\to\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin A$, αλλά υπάρχει περιοχή του α στο Α. Η ευθεία $x = \alpha$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$, αν και μόνο αν:

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty$$

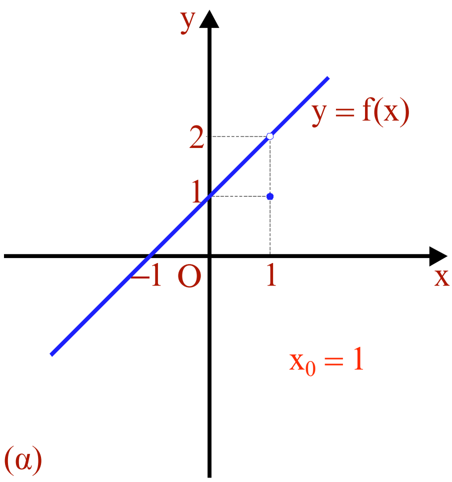
ή όταν:

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty$$

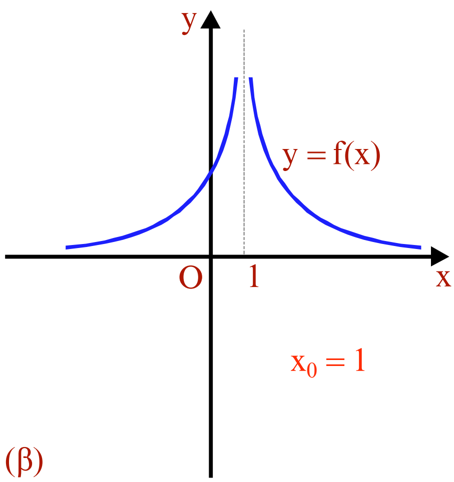
## Εφαρμογές

### *Εφαρμογή 1*

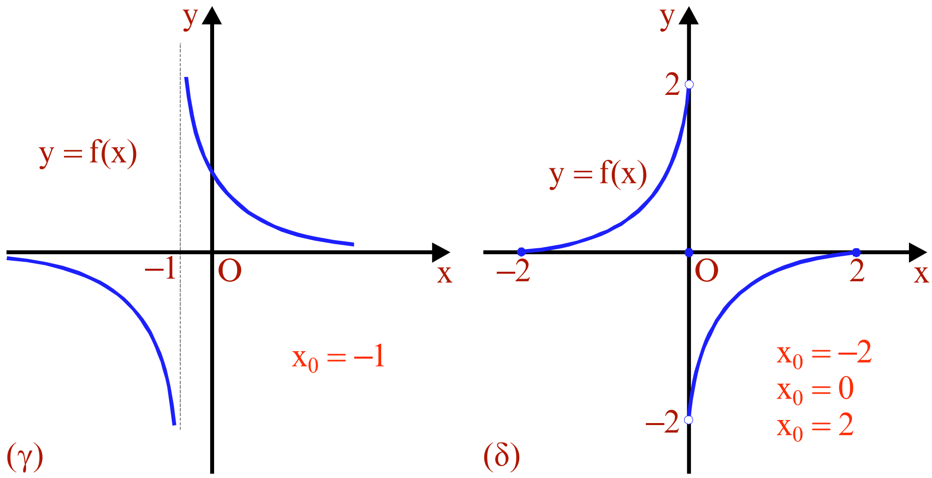
Χρησιμοποιήστε τις επόμενες γραφικές παραστάσεις για να εκτιμήσετε τα $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} f(x)$, όπου αυτά υπάρχουν και βρείτε την τιμή $f(x_0)$, όπου ορίζεται.




(α)




(β)




## Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, $f(1) = 1$.

(β) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$, δεν ορίζεται $f(1)$.

(γ) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, δεν υπάρχει $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, δεν ορίζεται $f(-1)$.

(δ) (i) Δεν ορίζεται $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$, $f(-2) = 0$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -2$, δεν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $f(0) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$, δεν ορίζεται $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, $f(2) = 0$.

### *Εφαρμογή 2*

Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f κάθε φορά.

(α) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$ , $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

| x | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | |

(β) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1} + x^2$ , $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

| x | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | |

(γ) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , $\lim_{x\to 0} f(x)$

| x | –0,1 | –0,01 | –0,001 | 0,001 | 0,01 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | |

(δ) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ , $\lim_{x\to 1} f(x)$

| x | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | |

Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f, όπου υπάρχει.

## Λύση

(α)

| x | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | –0,19 | –0,0199 | –0,0019 | 0,0020 | 0,0201 | 0,21 |

Είναι φανερό πως καθώς το x πλησιάζει πάρα πολύ κοντά στο 1 οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν πάρα πολύ κοντά στο 0. Άρα $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. Παρατηρήστε ότι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης $f(1) = 1$ δεν έχει σχέση με την προσέγγιση των τιμών της f πολύ κοντά στο 0.

(β)

| x | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | –0,19 | –0,0199 | –0,0019 | 2,0020 | 2,0201 | 2,21 |

Είναι φανερό πως καθώς το x πλησιάζει πάρα πολύ κοντά στο 1 από αριστερά οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν πολύ κοντά στο 0. Όταν όμως το x πλησιάζει πολύ κοντά στο 1 από δεξιά οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν πολύ κοντά στο 2. Επομένως εδώ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$.

(γ)

| x | –0,1 | –0,01 | –0,001 | 0,001 | 0,01 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 100 | 1000 | 1000000 | 1000000 | 1000 | 100 |

Είναι φανερό πως καθώς το x πλησιάζει πολύ κοντά στο 0 οι τιμές της συνάρτησης αυξάνονται απεριόριστα. Αυτό μας οδηγεί να αντιληφθούμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

(δ)

| x | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | –9 | –99 | –999 | 1001 | 101 | 11 |

Καθώς το x πλησιάζει πολύ κοντά στο 1 από αριστερά οι τιμές της συνάρτησης μειώνονται απεριόριστα. Αυτό μας οδηγεί να αντιληφθούμε ότι $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

'Ομοια όταν το x πλησιάζει το 1 από δεξιά οι τιμές της συνάρτησης αυξάνονται απεριόριστα, άρα $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$.

***Εφαρμογή 3*** *(Χορήγηση ενδοφλεβίου διαλύματος)*

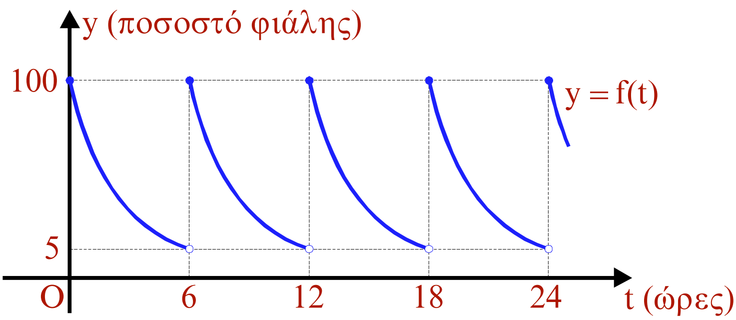
'Ενα διάλυμα δεξτρόζης χορηγείται σ' έναν ασθενή ενδοφλέβια. Η πρώτη φιάλη - φορείου που έχει το παραπάνω διάλυμα αφαιρείται και αντικαθίσταται από άλλη μόλις το περιεχόμενο πέφτει περίπου στο 5% του αρχικού (1 λίτρο) ποσού. Η εκροή του διαλύματος είναι συνεχής και χρειάζεται 6 ώρες για να διοχετευθεί το 95% του περιεχόμενου μιας πλήρους φιάλης στον ασθενή.

(α) Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y = f(t) όπου t χρόνος και y το ποσοστό το διαλύματος δεξτρόζης σε μια φιάλη, για μια περίοδο πάνω από 24 ώρες, υποθέτοντας ότι η χορήγηση ξεκινά με γεμάτη φιάλη.

(β) Υπολογίστε τα $\lim_{x\to 6^-} f(t)$, $\lim_{x\to 6^+} f(t)$. Τι παρατηρείτε; Πώς το ερμηνεύετε;

Λύση

(α)



Είναι φανερό πως από το 100% του περιεχόμενου η εκροή φθάνει στο 95%, στη φιάλη μένει περίπου 5% και τότε αλλάζουμε φιάλη. Αυτό συμβαίνει κατά τον ίδιο τρόπο κάθε 6 ώρες.

(β) Από τη γραφική παράσταση καταλαβαίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 6^-} f(t) = 5$, ενώ $\lim\limits_{x\to 6^+} f(t) = 100$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 6} f(t)$, όπως επίσης δεν υπάρχουν τα όρια στις χρονικές στιγμές $t = 12, 18, 24$ κ.λπ. Αυτό ερμηνεύεται από τη γραφική παράσταση, λόγω αλλαγής φιάλης.

### *Εφαρμογή 4*

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

(α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ (β) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^3-3x+2}$

(γ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$ (δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$

Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4) = 4-4 = 0$

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+6) = 4-10+6 = 0$

'Αρα έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

'Εστω $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x+2}{x-3}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{4}{-1} = -4$.

(β) 'Ομοια έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

'Εστω $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^3-3x+2} = \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-1)^2} = \dfrac{x-3}{(x-1)^2}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{1} = -1$.

(γ) 'Ομοια έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

'Εστω $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9} = \dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)} =$

$\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} = \dfrac{1}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{(x+3)(\sqrt{x+1}+2)} = \dfrac{1}{6\cdot4} = \dfrac{1}{24}$.

(δ) $\lim\limits_{x\to1} (1-\sqrt[3]{x}) = 1-\sqrt[3]{1} = 0$

$\lim\limits_{x\to1} (\sqrt{x}-1) = \sqrt{1}-1 = 0$

'Αρα έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\dfrac{0}{0}$.

'Εστω $f(x) = \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(1-\sqrt[3]{x})[1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2](\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)[1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]} =$

$\dfrac{(1-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = -\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\left(-\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\right) = -\dfrac{2}{3}$.

## *Εφαρμογή 5*

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ και $g(x) = \dfrac{\lambda}{x^2}$, $\lambda \in (0, +\infty)$, $x \neq 0$.

(α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ και το $\lim\limits_{x\to0} g(x)$, αν υπάρχουν.

(β) Ποιάς μορφής απροσδιοριστία βρίσκουμε όταν αναζητούμε το $\lim\limits_{x\to0} [f(x)-g(x)]$;

(γ) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in (0, +\infty)$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to0} [f(x)-g(x)]$.

### Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\lambda}{x^2} = +\infty$, αφού $\lambda > 0$.

(β) $\lim\limits_{x\to0} [f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to0} f(x) - \lim\limits_{x\to0} g(x) = (+\infty)-(+\infty)$ απροσδιοριστία.

(γ) $f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\lambda}{x^2} = \frac{1-\lambda}{x^2}$

Τότε $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\lambda}{x^2} = (1-\lambda) \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = (1-\lambda)(+\infty)$.

(i) Αν $1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = +\infty$.

(ii) Αν $1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = -\infty$.

(iii) Αν $1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ τότε $f(x) - g(x) = \frac{1-1}{x^2} = 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = 0$.

### *Εφαρμογή 6*

Βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων, αν βέβαια υπάρχουν. Σ' αυτές που υπάρχουν να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση.

(α) $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$ (β) $f(x) = \begin{cases} \ln x & , \ x > 0 \\ x^2 & , \ x < 0 \end{cases}$

Λύση

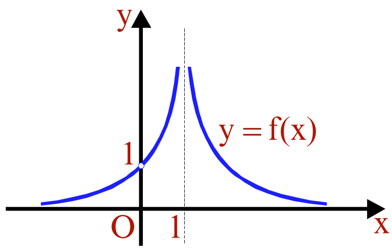
Γνωρίζουμε ότι για να έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει κάποιο από τα $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ να είναι $(+\infty)$ ή $(-\infty)$. Η αναζήτηση των ασυμπτώτων γίνεται στα σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού τους, αλλά υπάρχει περιοχή τους μέσα σ' αυτό.

(α) Η συνάρτηση f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

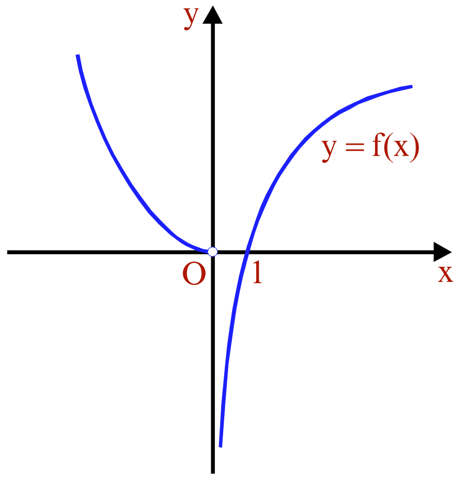
με $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$.




- Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ δεν παρουσιάζει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$.
- Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της f.

(β) Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο σημείο $x_0 = 0$.
Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x) = -\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$, έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.




### *Εφαρμογή 7*

Σε μια πόλη ο κεντρικός αγωγός νερού βρέθηκε πρόσφατα μολυσμένος με τριχλωροαιθυλένη, ένα επικίνδυνο χημικό παράγωγο, ως αποτέλεσμα ενός εγκαταλελειμένου χημικού εργοστασίου του οποίου τα απόβλητα έπεφταν πολύ κοντά στον αγωγό νερού της πόλης. 'Ενας προϋπολογισμός που έγινε από μια εταιρεία για να καθαρίσει τον κεντρικό αγωγό νερού έδειξε ότι, για τη συλλογή x% (τοις εκατό) της τοξικής αυτής ουσίας, το κόστος δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \dfrac{0,5x}{100 - x}$ σε εκατοντάδες εκατομμύρια δραχμές.

(α) Βρείτε το κόστος για τη συλλογή 50%, 80%, 90%, 99% της τοξικής αυτής ουσίας.

(β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 100^-} K(x)$.

(γ) Ερμηνεύστε τα αποτελέσματα.

## Λύση

(α) Ο επόμενος πίνακας μας δείχνει το κόστος σε εκατοντάδες εκατομμύρια:

| x | 50 | 80 | 90 | 99 |
|---|---|---|---|---|
| K(x) | 0,5 | 2 | 4,5 | 49,5 |

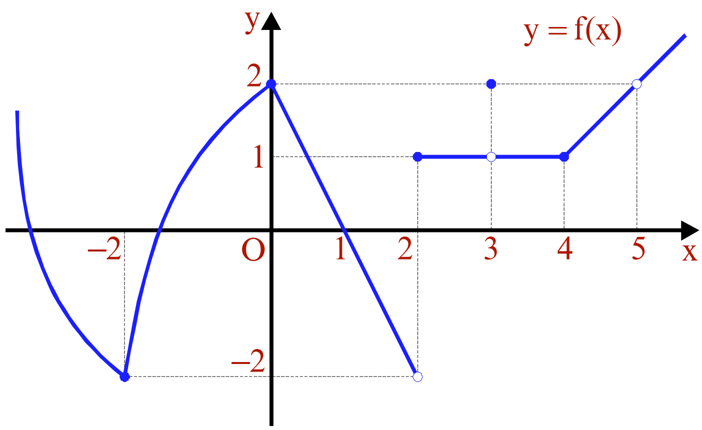
(β) $\lim\limits_{x\to 100^-} K(x) = \lim\limits_{x\to 100^-} \dfrac{0,5x}{100-x} = \lim\limits_{x\to 100^-} 0,5x \lim\limits_{x\to 100^-} \dfrac{1}{100-x} = 50(+\infty) = +\infty$

(γ) Είναι φανερό ότι για τη συλλογή του μεγαλύτερου μέρους αυτής της τοξικής ουσίας έως και 90% το κόστος αυξάνει άλλα σε λογικά πλαίσια (από 50 εκατομμύρια έως 450 εκατομμύρια). Κατόπιν υπάρχει απότομη αύξηση και για το 99% απαιτούνται περίπου 5 δις (ακριβώς 4950 εκατομμύρια). Στη συνέχεια το κόστος παίρνει απότομες διαστάσεις.

## Ασκήσεις Εμπέδωσης

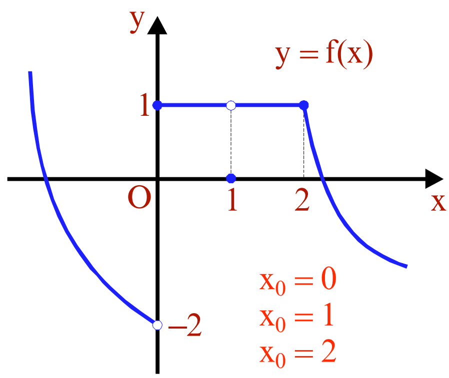
### *'Ασκηση 1*

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα να εκτιμήσετε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αν φυσικά υπάρχει, για $x_0 = -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



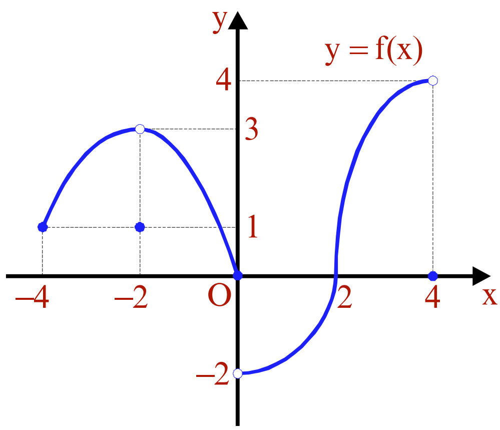

### *'Ασκηση 2*

Χρησιμοποιήστε τη διπλανή γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε (υπολογίσετε) τα $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ στα δοσμένα σημεία.



## *'Ασκηση 3*

Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού [–4, 4] και γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λάθος (Λ). Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.




(α) $\lim_{x \to -4^+} f(x) = 1$

(β) $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$

(γ) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

(δ) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

(ε) $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

(στ) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 4$

(ζ) $\lim_{x \to 4} f(x) = 0$

## *'Ασκηση 4*

Αφού χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x \leqslant 0 \\ x - 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & , \quad 1 \leqslant x \end{cases}$$

να εκτιμήσετε τα $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$, αν αυτά υπάρχουν. Επίσης, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές f(0), f(1).

## *'Ασκηση 5*

Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f. Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f, αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = x^2 - 1$, $\lim_{x \to 2} f(x)$

| x | 1,9 | 1,99 | 1,999 | 2,001 | 2,01 | 2,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | |

(β) $f(x)=\frac{|x|}{x}+1,\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

| x | 0,1 | 0,01 | 0,001 | –0,001 | –0,01 | –0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | | | | | 0 |

(γ) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x},\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

| x | –0,1 | –0,01 | –0,001 | 0,001 | 0,01 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | 0,5012 | | | | 0,4880 |

(δ) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1} & ,\ x>1\\ -x^2+1 & ,\ x\leqslant 1\end{cases},\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

| x | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | |

## *'Ασκηση 6*

Αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=5$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=4$ υπολογίστε τα παρακάτω:

(α) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$

(β) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{10g(x)}{f(x)}$

(γ) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2f(x)+5g(x)}{f(x)\cdot g(x)}$

(δ) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)+5g(x)}$

(ε) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{\frac{1}{2g(x)}}$

(στ) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+\sqrt{g(x)}}$

## *'Ασκηση 7*

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, καθένα από τα παρακάτω όρια, εφαρμόζοντας σε κάθε περίπτωση τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων:

(α) $\lim\limits_{x\to 2}(x^{-3}-3x^{-2}+5x^3)$

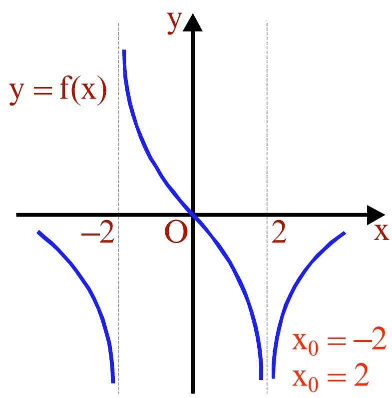
(β) $\lim\limits_{x\to 2}[(1-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})]$

(γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+4}{x^2-3x+4}$ (δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x+1}$

## *'Ασκηση 8*

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης f. Να εκτιμήσετε (μαντέψετε) τα:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x),\ \lim_{x\to x_0^-} f(x),\ \lim_{x\to x_0} f(x).$$




## *'Ασκηση 9*

Σε ποιές από τις προηγούμενες περιπτώσεις της άσκησης 8 παρουσιάζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f; Ποιά είναι η εξίσωση της ασύμπτωτης, όπου υπάρχει αυτή;

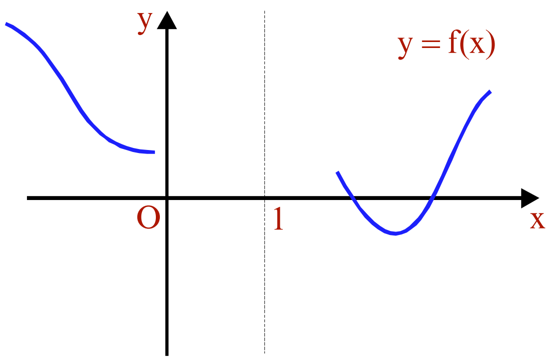
## *'Ασκηση 10*

Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διπλανό σχήμα, ώστε να ισχύει:

(α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

(β) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

(γ) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} = +\infty$




## *'Ασκηση 11*

Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f. Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f, αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = -\frac{10}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

| x | –0,1 | –0,01 | –0,001 | 0,001 | 0,01 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | –100 | | –10000 | | –1000 | |

(β) $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

| x | 1,9 | 1,99 | 1,999 | 2,001 | 2,01 | 2,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | –119 | | | 12001 | | |

## Σύνθετες Ασκήσεις

### *'Ασκηση 1*

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

(α) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ (β) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3+x^2-2x}$

### *'Ασκηση 2*

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

(α) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}}$ (β) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

(γ) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$ (δ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

### *'Ασκηση 3*

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

(α) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|2x+1|-3}{x-3}$ (β) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2+|x|}{(x+1)|x|}$

### *'Ασκηση 4*

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2|x|+2 & , \quad x \leqslant \alpha \\ x^2-1 & , \quad x > \alpha \end{cases}$$

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x)$.

### *'Ασκηση 5*

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-\alpha & , \quad x\leqslant 0 \\ x^2+\alpha+2 & , \quad x>0 \end{cases}$$

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Κατόπιν να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

### *'Ασκηση 6*

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, καθένα από τα παρακάτω όρια, εφαρμόζοντας σε κάθε περίπτωση τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων:

(α) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$

(β) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{(x+1)^3}$

(γ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x^3+2x}$

(ε) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{|1-x|}$

(στ) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+4}{x^3-3x-2}$

### *'Ασκηση 7*

Βρείτε τις περιπτώσεις όπου υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και γράψτε την εξίσωσή της στις συναρτήσεις της άσκησης 6.

## Πρακτικές Εφαρμογές

### *'Ασκηση 1*

Τα τέλη αποστολής μεμονωμένων δεμάτων όταν πρόκειται για δέματα εσωτερικού που αποστέλλονται από τα Ελληνικά Ταχυδρομεία δίνονται από το γράφημα της "ταχυδρομικής συνάρτησης":

$$f(x)=\begin{cases} 450 & 0<x\leqslant 1 \\ 550 & 1<x\leqslant 3 \\ 700 & 3<x\leqslant 5 \\ 850 & 5<x\leqslant 7 \\ 1050 & 7<x\leqslant 9 \end{cases}$$

όπου x είναι το βάρος ενός πακέτου σε Kgr (κιλά) και f(x) η αξία σε δραχμές.

(α) Να φτιάξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε σύστημα αξόνων xOy όπου στον άξονα Ox η κλίμακα είναι 1 cm για κάθε κιλό και στο 0y η κλίμακα είναι 1 cm για κάθε εκατοντάδα δρχ.

(β) Να βρείτε τις τιμές f(1), f(3), f(5) και να τις συγκρίνετε με τα $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim_{x\to 5^-} f(x)$.

(γ) Υπάρχουν τα $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to 5} f(x)$;

### *'Ασκηση 2*

Ο πληθυσμός ενός συγκεκριμένου είδους τρωκτικών που αναπαράγονται σ' ένα απομονωμένο νησί δίνεται από τη συνάρτηση $P(t) = \frac{720}{9-t}$, $0 \leqslant t < 9$ όπου ο χρόνος t μετριέται σε μήνες.

(α) Βρείτε τον αριθμό των τρωκτικών στο νησί σε χρόνο $t = 0$, δηλαδή από τότε που αρχίζουμε να παρατηρούμε την αναπαραγωγή τους. Τι εκφράζει αυτός ο αριθμός;

(β) Βρείτε τον αριθμό των τρωκτικών μετά 1, 3, 5, 8 μήνες.

(γ) Δείξτε ότι ο πληθυσμός των τρωκτικών αυξάνεται απεριόριστα καθώς ο χρόνος πλησιάζει στους 9 μήνες.

### *'Ασκηση 3*

Στην περιβαλλοντική επιστήμη συχνά μελετάμε τη διασπορά διαφόρων ρύπων σε οικοσυστήματα. Αρκετά απ' αυτά τα μοντέλα είναι μοντέλα "άπειρης αραίωσης" όπως π.χ. ίχνη $SO_2$ στην ατμόσφαιρα. Για να μελετήσουμε τη διασπορά αυτή χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συνάρτηση (συντελεστής ενεργότητας α) της συγκέντρωσης $x_1$, $x_2$ των συστατικών ρύπου – ατμόσφαιρας αντίστοιχα:

$$\ln\alpha = \ln\frac{\varphi_1}{x_1} + 1 - \frac{\varphi_1}{x_1}$$

όπου $\varphi_1 = \frac{x_1V_1}{x_1V_1 + x_2V_2}$ και $V_1$, $V_2$ οι όγκοι των δύο συστατικών, δηλαδή του ρύπου και της ατμόσφαιρας αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή α σε άπειρη αραίωση, δηλαδή το $\lim_{x_1\to 0}(\ln\alpha)$, αν γνωρίζετε ότι $x_1 + x_2 = 1$.