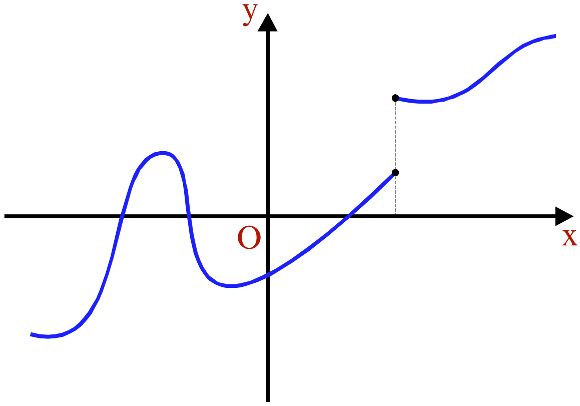
3.6. Η έννοια της Συνεχούς Συνάρτησης

Η έννοια της συνεχούς συνάρτησης δεν είναι τόσο οικεία, όσο η έννοια μιας συνεχούς γραμμής ή καμπύλης. Είναι λογικό να συνδέσουμε τις δύο αυτές έννοιες συνέχειας, αφού οι περισσότερες γραφικές παραστάσεις συνάρτησης αποτελούνται από ευθείες και καμπύλες. Ωστόσο, η έννοια της συνεχούς συνάρτησης είναι πιο πολύπλοκη από αυτή μιας συνεχούς γραμμής.

Αν, καθώς χαράσσουμε μια γραμμή, σηκώσουμε το μολύβι μας και συνεχίσουμε από κάποιο άλλο σημείο, τότε αυτόματα έχουμε μια ασυνεχή γραμμή.



Το αν είναι ασυνεχής μια αντίστοιχη συνάρτηση εξαρτάται και από την προσεκτική μελέτη του πεδίου ορισμού της. 'Οπως καταλαβαίνουμε η συνέχεια είναι τοπική ιδιότητα, δηλαδή μελετάται γύρω από κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, επομένως θα πρέπει το σημείο αυτό να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Επιπλέον, η συνέχεια της f σε ένα σημείο εκφράζει ότι η "συμπεριφορά" των γειτονικών σημείων είναι η "αναμενόμενη", δηλαδή δεν υπάρχουν κενά ή διακοπές στη γραφική παράσταση της f.

Η συνέχεια της f σε ένα σημείο x_0 εξασφαλίζεται με τρεις προϋποθέσεις:

(i) Το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, δηλαδή υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $f(x_0)$.

(ii) Υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, δηλαδή τα δύο πλευρικά όρια της f, όταν $x\to x_0$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσα.

(iii) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ορισμός (Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο):

'Εστω $A \subseteq \mathbb{R}$, και $x_0 \in A$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0, αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Παραδείγματα

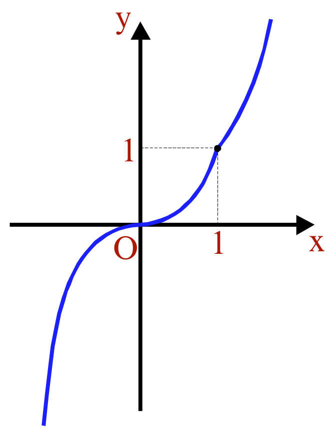
Στα ακόλουθα παραδείγματα θα μελετήσουμε όλες τις μορφές ασυνέχειας που μπορεί να παρουσιάσει μια συνάρτηση.

Παράδειγμα 1

Ας μελετήσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ x^2 & , \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

στο σημείο $x_0 = 1$.



Αρχικά παρατηρούμε ότι το $x_0 = 1$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και ότι $f(1) = 1^2 = 1$.

Εξετάζουμε αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, βρίσκοντας τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^3 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1$$

'Αρα υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ και μάλιστα $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$.

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Παράδειγμα 2

Ας μελετήσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

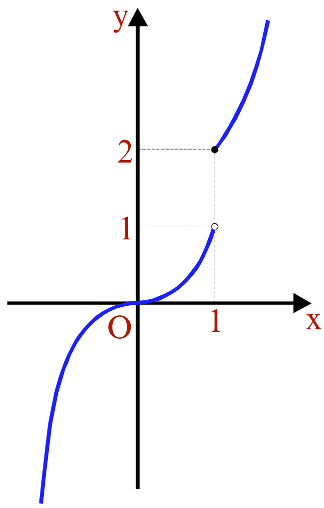
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ x^2 + 1 & , \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

στο σημείο $x_0 = 1$. Παρατηρούμε ότι:

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^3 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 1) = 2$$



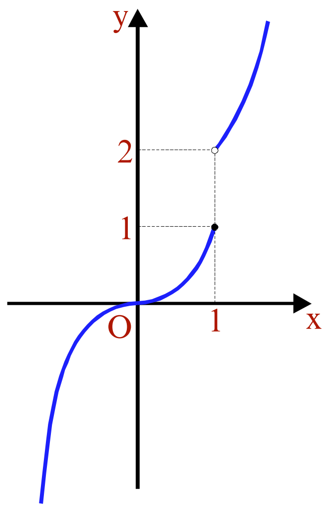
'Εχουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, το $\lim_{x \to 1} f(x)$. Επομένως η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$.

Παρατηρούμε, ωστόσο, ότι, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 = f(1)$, δηλαδή ότι ο δεξιός κλάδος της C_f είναι "συνεχής". Θα λέμε τότε ότι η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$, συνεχής από δεξιά.

Παράδειγμα 3

Ας μελετήσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \leqslant 1 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$



στο σημείο $x_0 = 1$. 'Εχουμε ότι:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

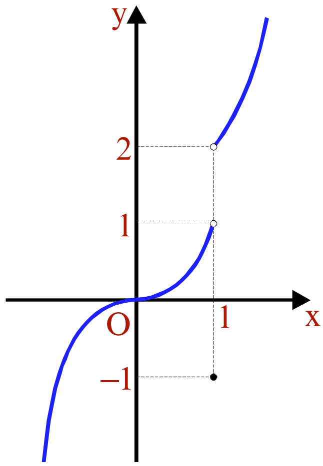
οπότε η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$, και αντίστοιχα με το προηγούμενο παράδειγμα συνεχής από αριστερά.

Παράδειγμα 4

Ας μελετήσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ -1 & , \quad x = 1 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

στο σημείο $x_0 = 1$. Παρατηρούμε ότι:



$$f(1) = -1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

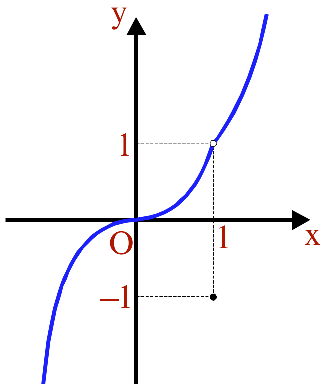
Επομένως η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$.

Παράδειγμα 5

Ας μελετήσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ -1 & , \quad x = 1 \\ x^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

στο σημείο $x_0 = 1$. 'Εχουμε ότι $f(1) = -1$ και $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, ωστόσο η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$ αφού $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$.

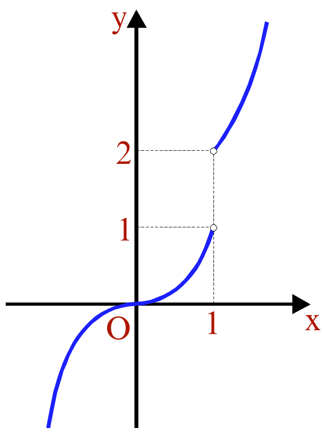


Παράδειγμα 6

Η συνάρτηση:

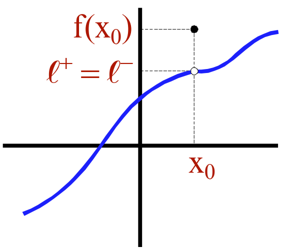
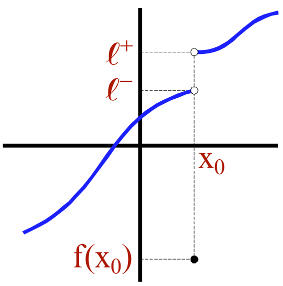
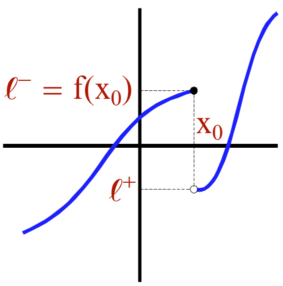
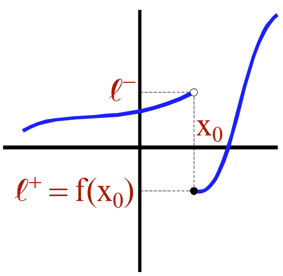
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

δε μπορεί να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 1$, καθώς αυτό δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.



• Σημεία ασυνέχειας

Συνοψίζοντας τα εποπτικά αποτελέσματα των προηγούμενων παραδειγμάτων μπορούμε να δούμε όλα τα είδη των σημείων ασυνέχειας μιας συνάρτησης. Θέτουμε $\ell^+ = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\ell^- = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Γραφική Παράσταση της f	**Μελέτη Συνέχειας**	**Χαρακτηρισμός**
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ • $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$	Η f ασυνεχής στο x_0 (Παράδειγμα 5)
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αφού $\ell^+ \neq \ell^-$	Η f ασυνεχής στο x_0 (Παράδειγμα 4)
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αφού $\ell^+ \neq \ell^-$ • Ισχύει ότι $\ell^- = f(x_0)$	Η f ασυνεχής στο x_0, συνεχής από αριστερά (Παράδειγμα 3)
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αφού $\ell^+ \neq \ell^-$ • Ισχύει ότι $\ell^+ = f(x_0)$	Η f ασυνεχής στο x_0, συνεχής από δεξιά (Παράδειγμα 2)

3.7. Συνέχεια Συνάρτησης σε Διάστημα

Θα στρέψουμε τώρα τη μελέτη μας – αφού τονίσαμε την τοπική φύση της συνέχειας – σε συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σε διαστήματα. Ο ορισμός της συνέχειας σε ανοιχτό διάστημα ή σε ένωση ανοιχτών διαστημάτων είναι απλός:

Ορισμός 1: Μια συνάρτηση f: (α, β) → ℝ λέγεται συνεχής στο διάστημα (α, β) αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Η έννοια της συνέχειας σε κλειστό διάστημα είναι περισσότερο πολύπλοκη καθώς πρέπει να ξεκαθαρίσουμε τι συμβαίνει στα άκρα του:

Ορισμός 2: Μια συνάρτηση f: [α, β] → ℝ λέγεται συνεχής στο διάστημα [α, β], αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον έχουμε ότι:

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha), \quad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

3.8. Συνέχεια Βασικών Συναρτήσεων

Οι βασικές συναρτήσεις είναι συνεχείς, δηλαδή:

1. Η συνάρτηση f: ℝ→ℝ, με $f(x) = c$.

   Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = c = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο ℝ.

2. Η συνάρτηση f: ℝ→ℝ, με $f(x) = x$.

   Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = x_0 = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο ℝ.

3. Η συνάρτηση f: ℝ→ℝ, με $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

   Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = x_0^\nu = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο ℝ.

4. Η συνάρτηση f: $\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\dfrac{1}{x^\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

   Για κάθε $x_0\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\dfrac{1}{x_0^\nu}=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

5. Η πολυωνυμική συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με

   $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ με $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $0\leqslant i\leqslant\nu$.

   Για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει

   $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x_0+\alpha_0=f(x_0)$,

   δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

6. Η ρητή συνάρτηση f: $\mathbb{R}'\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\mathbb{R}'=\{x\in\mathbb{R},\ Q(x)\neq 0\}$.

   Για κάθε $x_0\in\mathbb{R}'$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}'$.

7. Η συνάρτηση f: $[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=x^\alpha$, $\alpha>0$.

   Για κάθε $x_0\geqslant 0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=x_0^\alpha=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

8. Η συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha>0$.

   Για κάθε $x_0>0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\dfrac{1}{x_0^\alpha}=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

9. Η εκθετική συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$.

   Για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\alpha^{x_0}=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

10. Η λογαριθμική συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$.

    Για κάθε $x_0>0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\log_\alpha x_0=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

11. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, με $f(x) = ημx$.
Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = ημx_0 = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

12. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, με $f(x) = συνx$.
Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = συνx_0 = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

13. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{ κπ + \frac{π}{2}, κ \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = εφx$.
Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R} - \{ κπ + \frac{π}{2}, κ \in \mathbb{Z} \}$ ισχύει
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = εφx_0 = f(x_0)$,
δηλαδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

14. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{ κπ, κ \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = σφx$.
Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R} - \{ κπ, κ \in \mathbb{Z} \}$ ισχύει
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = σφx_0 = f(x_0)$,
δηλαδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

3.9. Ιδιότητες Συνεχών Συναρτήσεων

Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in A$, τότε

(i) Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

(ii) Η συνάρτηση $h(x) = κ \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_0, για κάθε $κ \in \mathbb{R}$.

(iii) Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

(iv) Αν $g(x_0) \neq 0$, η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής στο x_0.

(v) Η συνάρτηση $h(x) = |f(x)|$ είναι συνεχής στο x_0.

(vi) Η συνάρτηση $h(x) = \sqrt[κ]{f(x)}$ με $f(x) \geqslant 0$ είναι συνεχής στο x_0.

Επίσης, έχουμε ότι και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση:

Θεώρημα

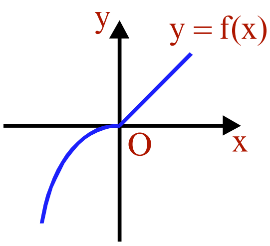
'Εστω συναρτήσεις f: A→ℝ και g: B→ℝ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και η g στο $f(x_0) \in B$, τότε και η σύνθεσή τους $g \circ f$: A→ℝ είναι συνεχής στο x_0.

Εφαρμογές

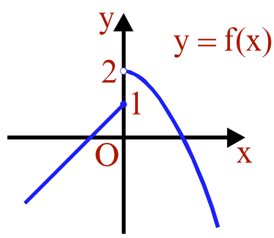
Εφαρμογή 1

Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις και οι τύποι μερικών συναρτήσεων, από τις οποίες κάποιες είναι συνεχείς και κάποιες ασυνεχείς. Βρείτε τις τιμές του x που παρουσιάζεται ασυνέχεια της συνάρτησης. Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε γιατί υπάρχει ασυνέχεια.

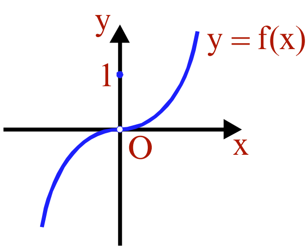
(α) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x \leqslant 0 \\ x & , \quad x > 0 \end{cases}$



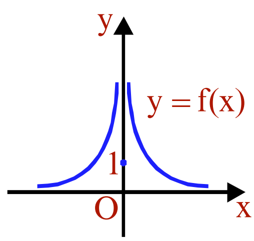
(β) $f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \leqslant 0 \\ -x^2+2 & , \quad x > 0 \end{cases}$



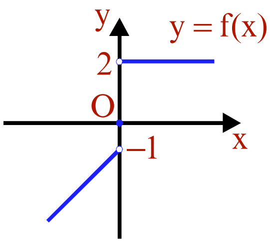
(γ) $f(x) = \begin{cases} x|x| & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$



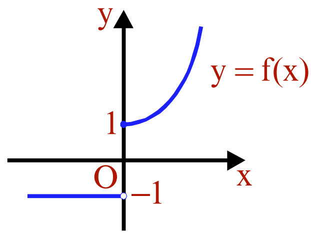
(δ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$



(ε) $f(x)=\begin{cases} x-1 & , \quad x<0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ 2 & , \quad x>0 \end{cases}$



(στ) $f(x)=\begin{cases} -1 & , \quad x<0 \\ x^2+1 & , \quad x\geqslant 0 \end{cases}$



Λύση

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Εδώ αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=1$ λέμε ότι είναι συνεχής μόνο από αριστερά του 0.

(γ) Η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$ γιατί παρόλο που υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ δε συμπίπτει με την αριθμητική τιμή της συνάρτησης $f(0)=1$.

(δ) Η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$ γιατί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και γνωρίζουμε ότι για να είναι συνεχής πρέπει απαραίτητα το όριο να είναι πραγματικός αριθμός.

(ε) Η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Επιπλέον $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq f(0)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Επομένως ούτε δεξιά, ούτε αριστερά του 0 είναι συνεχής.

(στ) Η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Εδώ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$ λέμε ότι είναι συνεχής μόνο από δεξιά του 0.

Εφαρμογή 2

Βρείτε τον πίνακα τιμών και εκτιμήστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο δοσμένο σημείο:

(α) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \ x \geqslant 0 \\ -x^2 & , \ x<0 \end{cases}$ στο $x_0=0$

(β) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & , \ x<0 \\ x^2 & , \ x \geqslant 0 \end{cases}$ στο $x_0=0$

(γ) $f(x)=\begin{cases} x+1 & , \ x>1 \\ 1 & , \ x=1 \\ x-1 & , \ x<1 \end{cases}$ στο $x_0=1$

Λύση

(α)

x	–0,1	–0,01	–0,001	0	0,001	0,01	0,1
f(x)	–0,01	–0,0001	–0,000001	0	0,000001	0,0001	0,01

Είναι φανερό ότι οι τιμές δεξιά και αριστερά του $x_0=0$ προσεγγίζουν την αριθμητική τιμή της f για x = 0, δηλαδή f(0) = 0. 'Αρα ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, επομένως συνεχής η f στο 0.

(β)

x	–0,1	–0,01	–0,001	0	0,001	0,01	0,1
f(x)	10	1000	100000	0	0,000001	0,0001	0,01

Είναι φανερό ότι οι τιμές της συνάρτησης αριστερά του $x_0=0$ μεγαλώνουν απεριόριστα ενώ δεξιά του $x_0=0$ πλησιάζουν προς το 0. Δηλαδή έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ και f(0) = 0. Επομένως η f είναι ασυνεχής στο 0. Λέμε ότι είναι συνεχής στο 0 μόνο από δεξιά.

(γ)

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
f(x)	–0,1	–0,01	–0,001	1	2,001	2,01	2,1

Καθώς το x πλησιάζει το 1 από αριστερά οι τιμές της συνάρτησης είναι αρνητικές αλλά συνεχώς μεγαλώνουν και πλησιάζουν το 0. 'Οταν όμως το x πλησιάζει το 1 από δεξιά οι τιμές της συνάρτησης προσεγγίζουν τον αριθμό 2. 'Αρα $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$. Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$ αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Επιπλέον f(1) = 1, άρα η f δεν είναι συνεχής ούτε δεξιά ούτε αριστερά του $x_0=1$.

Εφαρμογή 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & , \quad 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} & , \quad 1 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

(α) Υπάρχουν τα όρια της f στα σημεία με τετμημένη $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$;

(β) Σε ποιά από τα προηγούμενα σημεία είναι συνεχής η f;

Λύση

(α) (1) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (\ln x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$

'Αρα $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

(2) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x-1} = 1$

(3) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} \sqrt{x-1} = 2$

(β) (1) Αφού $f(1) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

(2) Αφού $f(2) = 1$ και $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$, η f είναι συνεχής στο $x_1 = 2$.

(3) Αφού $f(5) = 2$ και $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 2$, η f είναι συνεχής στο άκρο του διαστήματος $(0, 5]$, δηλαδή στο $x_2 = 5$.

Εφαρμογή 4

Βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 4x + \alpha & , \quad x < 1 \\ \alpha^2 x^2 - 2x & , \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Λύση

Πρέπει $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ όπου:

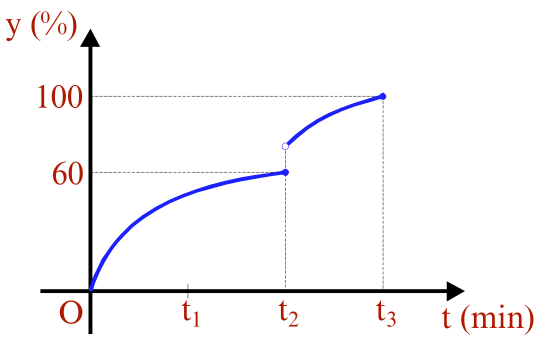
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (4x + \alpha) = 4 + \alpha$ και $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (\alpha^2 x^2 - 2x) = \alpha^2 - 2$.

Επίσης $f(1) = \alpha^2 - 2$.

'Αρα $\alpha^2 - 2 = 4 + \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ ή $\alpha = 3$.

Εφαρμογή 5 (Μαθησιακές Καμπύλες)

Η διπλανή γραφική παράσταση περιγράφει την πρόοδο που έκανε κάποιος μαθητής για να λύσει σωστά ένα Μαθηματικό πρόβλημα. Εδώ το y μας δείχνει το ποσοστό (%) της ολοκληρωμένης εργασίας του μαθητή και το t μας δείχνει το χρόνο σε λεπτά (min).



(α) Δώστε μια ερμηνεία στη γραφική παράσταση.

(β) Δικαιολογήστε γιατί η συνάρτηση είναι ασυνεχής στη θέση t_2.

(γ) Τι συμβαίνει στη θέση t_3;

Λύση

(α) Στη γραφική παράσταση φαίνεται, ότι ο μαθητής, στο 1/3 περίπου του συνολικού χρόνου που αφιέρωσε για να ολοκληρώσει την επίλυση του προβλήματος, έχει αντιμετωπίσει σωστά το 50% του προβλήματος. Επομένως, η πρόοδος είναι σημαντική. Στο επόμενο 1/3 του συνολικού χρόνου η πρόοδος μειώνεται αισθητά, ίσως γιατί κουράστηκε πνευματικά ο μαθητής, ίσως γιατί η δυσκολία του προβλήματος αυξάνεται και σ'αυτό το χρόνο αντιμετωπίζει το 10% του προβλήματος. Στο τελευταίο 1/3 του συνολικού χρόνου η πρόοδος είναι πάλι σημαντική μέχρι την ολοκλήρωση της επίλυσης του προβλήματος.

(β) Στη χρονική στιγμή t_2 η πρόοδος του μαθητή διακόπτεται και αυξάνεται απότομα γιατί σ'εκείνο το συγκεκριμμένο λεπτό ο μαθητής ξεπερνά τη δυσκολία του προβλήματος (λύνει ουσιαστικά το πρόβλημα) και στη συνέχεια το ολοκληρώνει.

(γ) Στη θέση t_3 έχει ολοκληρώσει πλέον την εργασία του (100% του προβλήματος).

Εφαρμογή 6

Να ελέγξετε αν είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους οι επόμενες συναρτήσεις. Γι' αυτές που δεν είναι να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας.

(α) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+1} & , \quad x\neq -1 \\ 1 & , \quad x=-1 \end{cases}$ (β) $f(x)=\begin{cases} συνx & , \quad 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{4} \\ ημx & , \quad \dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

(γ) $f(x)=\ln|x|$ (δ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

Λύση

(α) 'Οταν $x\neq -1$ η $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+1}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων (πολυωνυμικών).

Στο $\mathbf{x_0=-1}$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1} x=-1$.

Επίσης $f(-1)=1$, άρα η f ασυνεχής στο $x_0=-1$.

(β) 'Οταν $x\in[0,\frac{\pi}{4})$ η $f(x)=συνx$ είναι συνεχής.

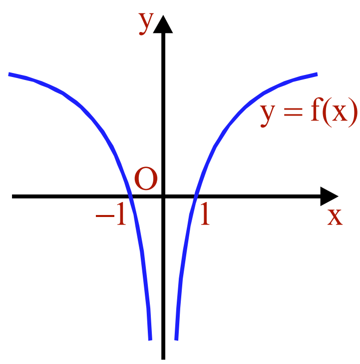
'Οταν $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ η $f(x)=ημx$ είναι συνεχής.

Στο $\mathbf{x_0=\frac{\pi}{4}}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}(συνx)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και

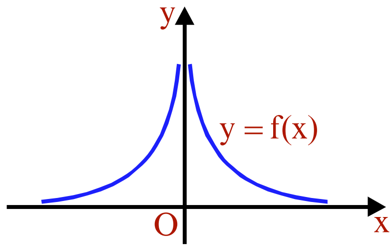
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}(ημx)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

'Αρα συνεχής σε όλο το $[0,\frac{\pi}{2}]$.

(γ) Η f είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, της $g(x)=\ln x$ και της $\varphi(x)=|x|$. Επομένως είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, δηλαδή για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.



(δ) 'Ομοια η f είναι συνεχής για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



Σημείωση: *'Αλλο συνεχείς γραμμές και άλλο συνεχείς συναρτήσεις.* ***Προσοχή!!*** *Πολλά εξαρτώνται από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.*

Εφαρμογή 7

(α) Υποθέστε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και η g είναι ασυνεχής στο x_0.

(i) Είναι το άθροισμα $f + g$ ασυνεχής στο x_0; Δικαιολογήστε.

(ii) Είναι το γινόμενο $f \cdot g$ ασυνεχής στο x_0; Δικαιολογήστε.

(β) Υποθέστε τώρα ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι ασυνεχείς στο σημείο x_0.

(i) Είναι το άθροισμα $f + g$ ασυνεχής στο x_0;

(ii) Είναι το γινόμενο $f \cdot g$ ασυνεχής στο x_0;

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας με τη βοήθεια παραδειγμάτων.

Λύση

(α) (i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma(x) = f(x) + g(x)$. Αν υποθέσουμε ότι είναι συνεχής στο x_0 τότε η $g(x) = \sigma(x) - f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 ως διαφορά συνεχών, άτοπο.

'Αρα $\sigma(x) = f(x) + g(x)$ ασυνεχής στο x_0.

(ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x)\cdot g(x)$. Υποθέτουμε ότι είναι συνεχής στο x_0, τότε η $g(x) = \dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ θα είναι συνεχής στο x_0, αν $f(x_0) \neq 0$, ως πηλίκο συνεχών πράγμα άτοπο.

'Αρα $\varphi(x) = f(x)\cdot g(x)$ ασυνεχής στο x_0.

!! Τι γίνεται όμως αν $f(x_0) = 0$; Δίνουμε τρία παραδείγματα με τρία διαφορετικά αποτελέσματα:

- $f(x) = x^2,\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

  Τότε $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

  με $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$ και $\varphi(0) = 0$, άρα συνεχής στο $x_0 = 0$.

- $f(x) = x,\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

  Τότε $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

  με $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 1$ και $\varphi(0) = 0$, άρα ασυνεχής στο $x_0 = 0$.

- $f(x) = |x|,\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

  Τότε $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

  η οποία δεν έχει όριο όταν $x \to 0$, επομένως πάλι ασυνεχής στο $x_0 = 0$.

  !! Είναι φανερό ότι δε μπορούμε να απαντήσουμε με σιγουριά στο ερώτημα (ii) όταν $f(x_0) = 0$.

(β) Δε γνωρίζουμε αν οι συναρτήσεις $f + g$ και $f \cdot g$ είναι ασυνεχείς στο x_0, αφού για παράδειγμα οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leqslant 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leqslant 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

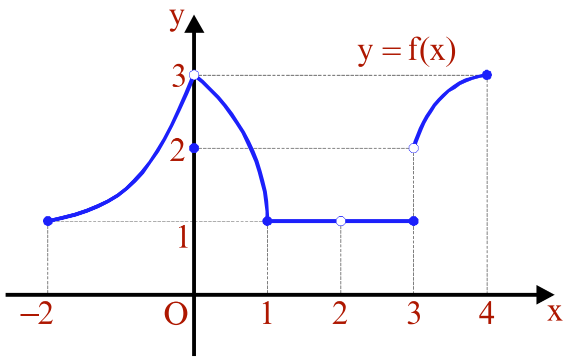
είναι ασυνεχείς στο $x_0 = 0$, όμως οι $(f + g)(x) = 1$ και $(f \cdot g)(x) = 0$ είναι συνεχείς στο 0 (και όχι μόνο σ' αυτό το σημείο) ως σταθερές συναρτήσεις.

Σημείωση: *Κατασκευάστε δικά σας παραδείγματα ασυνεχών συναρτήσεων f και g στο x_0 με ασυνεχές άθροισμα $f + g$ και γινόμενο $f \cdot g$.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



'Ασκηση 2

Στις επόμενες συναρτήσεις να ελέγξετε τη συνέχεια στην τιμή του x που αλλάζει τύπο η συνάρτηση. Σε κάθε σημείο ασυνέχειας να σημειώσετε **ποιές προϋποθέσεις** του ορισμού συνέχειας παραβιάζονται.

(α) $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 &, x\leqslant 1 \\ 0 &, x>1 \end{cases}$ (β) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+3} &, x\geqslant 1 \\ 2+\sqrt{x} &, 0\leqslant x<1 \end{cases}$

(γ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} &, x\neq -1 \\ 1 &, x=-1 \end{cases}$ (δ) $f(x)=\begin{cases} 0 &, x=2 \\ \dfrac{1}{|x-2|} &, x\neq 2 \end{cases}$

'Ασκηση 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 &, 0<x<2 \\ x^3-3 &, 2\leqslant x\leqslant 5 \end{cases}$$

(α) Υπάρχουν τα όρια της f στα σημεία με τετμημένη $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ και $x_2 = 5$;

(β) Σε ποιά από τα προηγούμενα σημεία είναι συνεχής η f;

'Ασκηση 4

Να ελέγξετε αν είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους οι επόμενες συναρτήσεις. Για αυτές που δεν είναι να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας.

(α) $f(x) = 5x^2 - x + 4$

(β) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

(γ) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$

(δ) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & , \quad x < 0 \\ e^x & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Βρείτε τις τιμές του α που κάνουν την f συνεχή στο σημείο που αλλάζει ο τύπος της.

(α) $f(x) = \begin{cases} x - 3 & , \quad x \leqslant 1 \\ \alpha x^2 - \alpha^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$

(β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & , \quad x \neq -2 \\ \alpha & , \quad x = -2 \end{cases}$

'Ασκηση 2

Να δικαιολογήσετε γιατί οι επόμενες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

(α) $f(x) = \eta\mu \dfrac{1}{x^2}$

(β) $f(x) = e^{x^2 - 1}$

'Ασκηση 3

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{(1 + x)^2 - 1}{x}$ είναι ορισμένη για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και σ' αυτό το σύνολο είναι συνεχής. Μπορείτε να την ορίσετε κατάλληλα στο σημείο $x_0 = 0$ ώστε να είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$;

'Ασκηση 4

Θεωρούμε στο $\mathbb{R}$ τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

(α) Υπολογίστε την τιμή f(1) και μετά παραγοντοποιήστε τη διαφορά $f(x) - f(1)$.

(β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, αν βέβαια αυτό υπάρχει.

(γ) Αν πάρουμε τιμές του x πολύ κοντά στο 1, όπως:

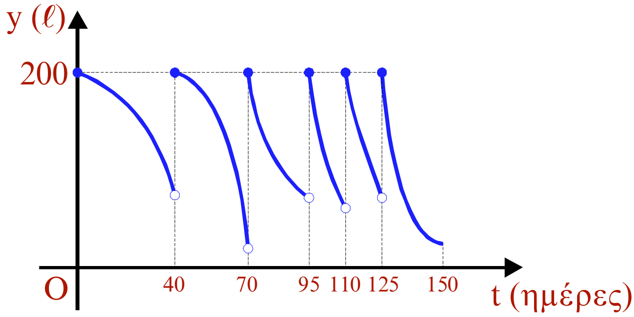
$$x \in \left(1 - \frac{1}{10}, 1\right) \cup \left(1, 1 + \frac{1}{10}\right) \text{ ή αλλιώς } \frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}, x \neq 1$$

τότε να αποδείξετε ότι $|f(x) - f(1)| < \frac{12}{100}$.

Πρακτικές Εφαρμογές

***'Ασκηση 1** (Πρόβλημα Κατανάλωσης)*

Η διπλανή γραφική παράσταση δείχνει την ποσότητα πετρελαίου θέρμανσης σε μια δεξαμενή 200 λίτρων (ℓ) που υπάρχει σε μια πολυκατοικία για μια περίοδο 150 ημερών. Αν θεωρήσουμε ότι t = 0 αντιστοιχεί στην αρχή Νοεμβρίου.



(α) Δώστε μια ερμηνεία στη γραφική παράσταση.

(β) Εξηγείστε γιατί η συνάρτηση είναι ασυνεχής στις θέσεις t = 40, t = 70, t = 95, t = 110, t = 125.

(γ) Ποιός μήνας νομίζετε ότι ήταν περισσότερο κρύος;

***'Ασκηση 2** (Πρόβλημα Τιμών Εμπορεύματος)*

Η συνάρτηση που δίνει το κόστος ενός συγκεκριμένου εμπορεύματος δίνεται από τη συνάρτηση K με τύπο:

$$K(x) = \begin{cases} 5x & , \quad 0 < x < 10 \\ 4x & , \quad 10 \leqslant x < 30 \\ 3x + 30 & , \quad 30 \leqslant x < 60 \\ 3{,}2x & , \quad 60 \leqslant x \leqslant 90 \end{cases}$$

όπου x είναι ο αριθμός των γραμμαρίων του παραγόμενου εμπορεύματος και K(x) το κόστος σε χιλιάδες δραχμές.

(α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης K(x) και βρείτε τις τιμές του x που είναι αυτή ασυνεχής.

(β) Δώστε μια ερμηνεία στη γραφική παράσταση.

3.10. 'Οριο Συνάρτησης στο 'Απειρο

Μέχρι τώρα, μελετήσαμε το όριο μιας συνάρτησης καθώς το x πλησιάζει έναν πραγματικό αριθμό x_0. Συχνά, είμαστε αναγκασμένοι να μελετήσουμε το όριο μιας συνάρτησης, καθώς το x αυξάνει απεριόριστα, δηλαδή όταν το x τείνει στο άπειρο.

Παράδειγμα

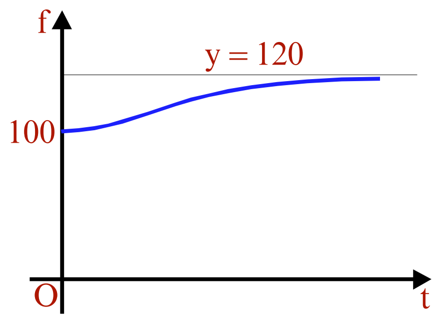
Ας θεωρήσουμε ένα κλειστό οικοσύστημα, δηλαδή μια δεξαμενή εργαστηρίου, στην οποία επιτρέπουμε να υπάρχουν μόνο χρυσόψαρα. Τροφοδοτούμε τη δεξαμενή έτσι ώστε να υπάρχει πάντα σταθερή ποσότητα τροφής για τα χρυσόψαρα: c = 20 kgr. 'Εστω f η συνάρτηση του πληθυσμού των χρυσόψαρων, με μεταβλητή το χρόνο t. 'Εστω f(0) = 100 είναι ο αρχικός πληθυσμός των χρυσόψαρων (για t = 0), και ο τύπος της f είναι:

$$f(t) = f(0) + \frac{ct^2}{1 + t^2},\ t > 0 \quad ή \quad f(t) = 100 + \frac{20t^2}{1 + t^2}$$

Θέλουμε να μελετήσουμε την εξέλιξη του πληθυσμού των χρυσόψαρων μέσα στη δεξαμενή για οσοδήποτε μεγάλους χρόνους. 'Εχουμε τον ακόλουθο πίνακα τιμών:

t	1	2	5	10	100	1000
f(t)	110	116	119,2	119,8	119,998	119,99998

Παρατηρούμε λοιπόν ότι παρόλο που ο χρόνος t αυξάνεται απροσδιόριστα, οι τιμές της f δεν ακολουθούν την ίδια αύξηση, αλλά τείνουν στην τιμή 120, κάτι που είναι αναμενόμενο, και από τη μορφή του φυσικού προβλήματος. Επομένως, έχουμε ότι:



$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 120$$

όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση της f.

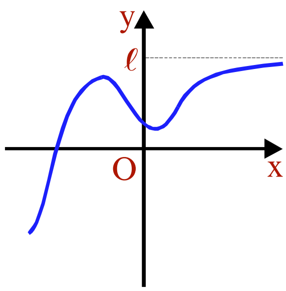
Ορισμός: (α) Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f: (α, +∞) → ℝ, έχει όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ όταν το x τείνει στο +∞ αν οι τιμές της f(x) βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στο ℓ, καθώς το x παίρνει πάρα πολύ μεγάλες θετικές τιμές και συμβολίζουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

'Ομοια ορίζεται και το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.

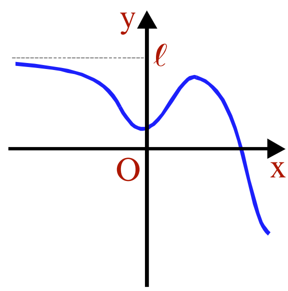
(β) Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f: (α, +∞) → ℝ, έχει όριο το +∞ όταν το x τείνει στο +∞ αν οι τιμές της f(x) αυξάνουν απεριόριστα καθώς το x πλησιάζει το +∞. Συμβολίζουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Ανάλογα ορίζονται και τα όρια:

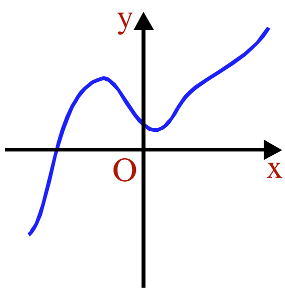
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$



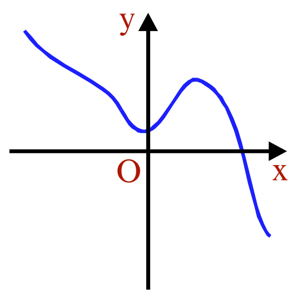
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$



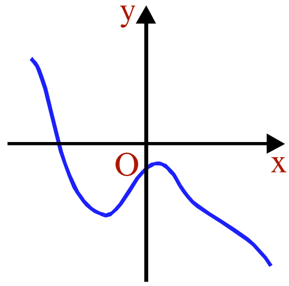
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$



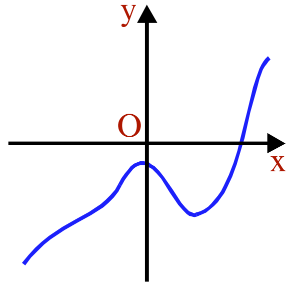
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- **'Οριο πολυωνυμικής συνάρτησης στο άπειρο**

Για να υπολογίσουμε το όριο μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, όταν το x τείνει στο άπειρο, αρκεί να συνειδητοποιήσουμε ότι ακολουθεί τη συμπεριφορά του μεγιστοβάθμιου όρου της.

Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το όριο της πολυωνυμικής συνάρτησης:

$$P(x) = -2x^3 + 5x^2 - 4$$

όταν το x τείνει στο $-\infty$. Αρκεί να γράψουμε την P ως εξής:

$$P(x) = x^3\left(-2 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^3}\right)$$

Τότε παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\left(-2 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^3}\right) = -2 + 0 + 0 = -2$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = (-\infty)\cdot(-2) = +\infty$$

Γενικότερα, ισχύει ότι:

> Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$, τότε:
>
> $$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

- **'Οριο ρητής συνάρτησης στο άπειρο**

Το προηγούμενο αποτέλεσμα για τις πολυωνυμικές εφαρμόζεται και στις ρητές συναρτήσεις, οι οποίες είναι πηλίκο πολυωνυμικών.

Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης f: ℝ→ℝ, με

$$f(x)=\frac{-3x^2+5x+2}{x^2-x+1}$$

όταν το x τείνει στο $+\infty$. Η f γράφεται ως εξής:

$$f(x)=\frac{x^2\left(-3+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{-3+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

'Ομως έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=-3 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

'Αρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{-3}{1}=-3.$

Γενικότερα, ισχύει ότι:

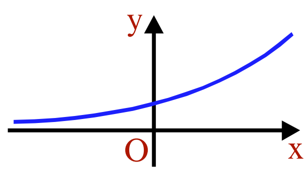
> Αν $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}$, $\alpha_\nu\neq 0$, $\beta_\mu\neq 0$, τότε:
>
> $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}$$

- **'Οριο εκθετικής συνάρτησης στο άπειρο**

Από τη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, με $0<\alpha\neq 1$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα όριά της στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

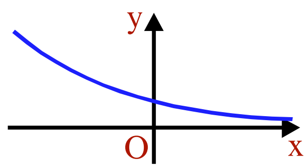
(i) Αν $\alpha>1$, τότε έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0.$



(ii) Αν $0<\alpha<1$, τότε έχουμε ότι:

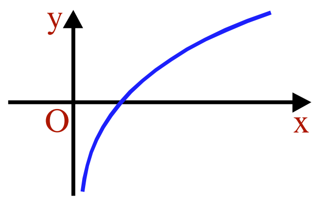
$\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty.$



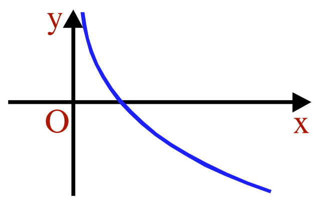
- **'Οριο λογαριθμικής συνάρτησης στο άπειρο**

Από τη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $g(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα όριά της όταν το x τείνει στο $+\infty$ (φυσικά η λογαριθμική δεν ορίζεται στο $-\infty$).

(i) Αν $\alpha > 1$, τότε έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$.



(ii) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε έχουμε ότι:
$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$.



3.11. Οριζόντια Ασύμπτωτη

Είδαμε ότι η συμπεριφορά μιας συνάρτησης προσδιορίζεται άμεσα στα σημεία του πεδίου ορισμού της καθώς και σε συγκεκριμένα σημεία εκτός του πεδίου ορισμού της, στα οποία μελετάμε αν η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. 'Ενα δεύτερο σημείο μελέτης της συμπεριφοράς της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης προκύπτει, εφόσον υπάρχει περιοχή του απείρου ($+\infty$ ή $-\infty$) στο πεδίο ορισμού της f.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

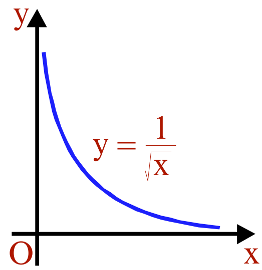
Ας μελετήσουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ας θεωρήσουμε έναν πίνακα τιμών της f:

x	10	10^5	10^{10}	10^{100}	…
f(x)	0,1	0,00001	10^{-10}	10^{-100}	…

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνουν οι τιμές της α-νεξάρτητης μεταβλητής x, τόσο μικραίνουν αυτές της συνάρτησης f(x). Θα έχουμε τότε ότι όταν το x τείνει στο +∞, η f(x) τείνει στο 0, δηλαδή:



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

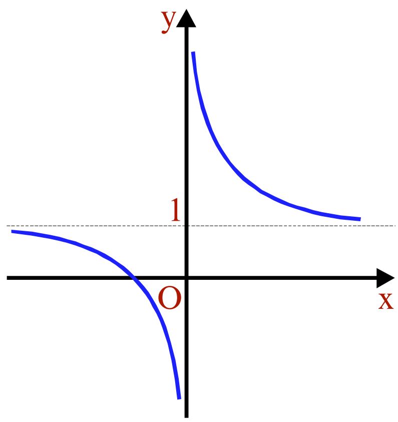
Από τη γραφική παράσταση της f παρατηρούμε ότι η C_f στην περιοχή του +∞ συμπεριφέρεται όπως η y = 0, την οποία ονομάζουμε **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f για $x \to +\infty$.

Παράδειγμα 2

Ας μελετήσουμε τη συμπεριφορά της συ-νάρτησης $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^3$$

στο άπειρο. 'Εχουμε ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, ο-πότε η ευθεία y = 1 είναι οριζόντια α-σύμπτωτη της C_f για $x \to +\infty$. 'Ομοια $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, οπότε η y = 1 είναι οριζό-ντια ασύμπτωτη της C_f και όταν $x \to -\infty$.



Ορισμός: 'Εστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όπου το πεδίο ορισμού της A περιέχει περιοχές του (+∞) και του (–∞). Η ευθεία y = c λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f, όταν $x \to +\infty$, αν και μόνο αν:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$$

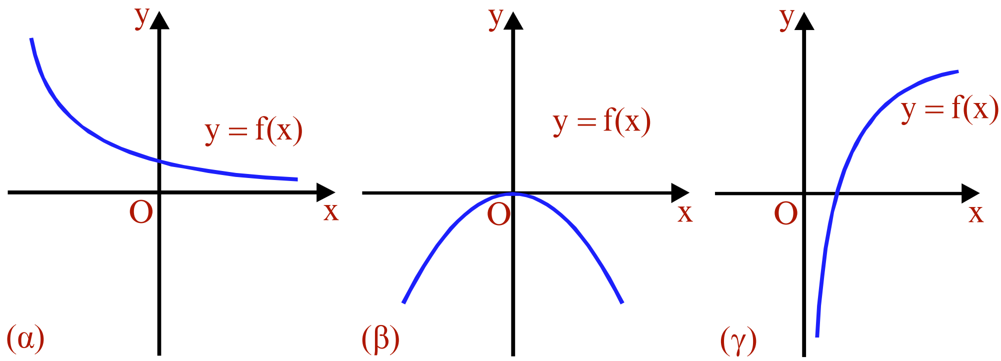
'Ομοια, αν $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \kappa$, η ευθεία y = κ καλείται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f όταν $x \to -\infty$.

Είναι φανερό ότι αν το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ δεν υπάρχει ή δίνει αποτέλεσμα ∞, τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη. Επίσης, δεν είναι απαραί-τητο μια συνάρτηση να έχει την ίδια οριζόντια ασύμπτωτη όταν $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Να εκτιμήσετε (μαντέψετε) το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, όπου αυτά ορίζονται, στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που ακολουθούν.



Λύση

(α)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ καθώς όταν το x απειρίζεται θετικά οι τιμές της f πλησιάζουν το 0.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ καθώς όταν το x απειρίζεται αρνητικά οι τιμές της f μεγαλώνουν απεριόριστα.

(β)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ καθώς όταν το x απειρίζεται θετικά οι τιμές της f μικραίνουν απεριόριστα.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ καθώς όταν το x απειρίζεται αρνητικά οι τιμές της f μικραίνουν απεριόριστα.

(γ)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ καθώς όταν το x απειρίζεται θετικά οι τιμές της f μεγαλώνουν απεριόριστα.
- Δεν ορίζεται το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ γιατί το πεδίο ορισμού της f δεν περιέχει περιοχή του $(-\infty)$.

Εφαρμογή 2

Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f. Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f, αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = \dfrac{0{,}5x}{x+100}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

x	10	100	1000	10000	1000000
f(x)					

(β) $f(x) = \sqrt{1000x} + x^2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

x	10	100	1000	100000
f(x)				

(γ) $f(x) = 10\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

x	–5	–8	–10	–15
f(x)				

Λύση

(α)

x	10	100	1000	10000	1000000
f(x)	$0{,}0\overline{45}$	0,25	$0{,}\overline{45}$	0,495	0,4999

Εδώ οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό 0,5 καθώς το x παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. 'Αρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0{,}5$.

(β)

x	10	100	1000	100000
f(x)	200	10316,23	1001000	10000010000

Εδώ οι τιμές της f μεγαλώνουν απεριόριστα καθώς το x παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. 'Αρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(γ)

x	–5	–8	–10	–15
f(x)	320	2560	10240	327680

Εδώ οι τιμές της f μεγαλώνουν απεριόριστα καθώς το x αρχίζει να μειώνεται. Οι μεταβολές αυτές είναι πολύ μεγάλες και ονομάζονται εκθετικές μεταβολές. 'Αρα $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Εφαρμογή 3

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των ορίων στο άπειρο για να υπολογίσετε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

(α) $\lim_{x \to +\infty} (-5x^3 + x - 1)$ (β) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$

(γ) $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x)$ (δ) $\lim_{x \to +\infty} \frac{100x - 10x|x - 1|}{x^2 - 1}$

Λύση

(α) $\lim_{x \to +\infty} (-5x^3 + x - 1) = \lim_{x \to +\infty} (-5x^3) = -5(+\infty) = -\infty$

(β) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2} = 2 \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 2 \cdot 0 = 0$

(γ) 'Εχει έννοια η αναζήτηση του ορίου αφού $2x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x) = \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{2x^2} + x) = \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{2}\,|x| + x) \overset{(*)}{=}$$

$$\lim_{x \to -\infty} [x(1 - \sqrt{2})] = (-\infty)(1 - \sqrt{2}) = +\infty \text{ καθότι } 1 - \sqrt{2} < 0.$$

(*) Αφού $x \to -\infty$ σημαίνει ότι $x \in (-\infty, 0)$ άρα $|x| = -x$.

(δ) Αφού $x \to +\infty$ μπορούμε να επιλέξουμε μια κατάλληλη περιοχή του $+\infty$ που να μας απαλλάσει από το απόλυτο, έστω $x \in (1, +\infty)$, οπότε $f(x) = \frac{100x - 10x(x - 1)}{x^2 - 1} = \frac{-10x^2 + 110x}{x^2 - 1}$.

Τότε $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-10x^2}{x^2} = -10$.

Εφαρμογή 4

Βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες, όταν υπάρχουν, στις αντίστοιχες περιπτώσεις της εφαρμογής 3.

Λύση

Οριζόντιες ασύμπτωτες υπάρχουν όταν $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ή $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός. Επομένως:

- Στη (β) έχουμε την $y = 0$ όταν $x \to -\infty$.
- Στη (δ) έχουμε την $y = -10$ όταν $x \to +\infty$.

Εφαρμογή 5

'Οταν οργανικά απόβλητα πετιούνται σε μια λίμνη, η οξειδωτική διαδικασία που δημιουργείται, μειώνει το περιεχόμενο της λίμνης σε οξυγόνο. Παρ' όλα αυτά, με το χρόνο η φύση επαναφέρει το περιεχόμενο οξυγόνο στο φυσιολογικό του επίπεδο. Υποθέστε ότι το περιεχόμενο οξυγόνο, σε ποσοστό επί τοις % του φυσιολογικού επιπέδου, t ημέρες μετά τη ρύψη των αποβλήτων στη λίμνη δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 100\,\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}$$

(α) Υπολογίστε το ποσοστό του οξυγόνου που θα περιέχεται στη λίμνη για $t = 0, 1, 2, 5, 0, 15, 20$ ημέρες.

(β) Από τους προηγούμενους υπολογισμούς αντιληφθείτε ότι ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα η περιεκτικότητα της λίμνης σε οξυγόνο αυξάνεται ημέρα με την ημέρα.

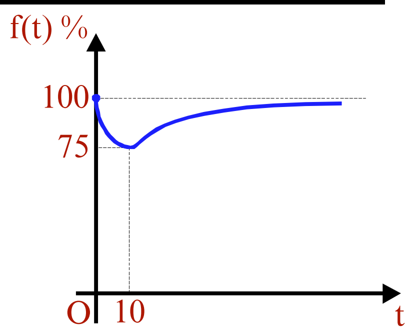
(γ) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και εξηγείστε το αποτέλεσμα.

Λύση

(α)

t	0	1	2	5	10	15	20
% f(t)	100	91,7	86,1	77,8	75	76	77,7

(β) Είναι φανερό ότι ύστερα από 10 ημέρες μείωσης του οξυγόνου, η περιεκτικότητά του στη λίμνη αρχίζει να αυξάνεται.



(γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(100\,\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right) =$

$$100 \lim_{x \to +\infty} \frac{t^2}{t^2} = 100 \cdot 1 = 100$$

που σημαίνει ότι ύστερα από πολλές ημέρες η περιεκτικότητα του νερού σε οξυγόνο θα πλησιάζει πάλι το 100% του φυσιολογικού επιπέδου.

Εφαρμογή 6 (Κόστος Οδήγησης)

Μια μελέτη για τα έξοδα οδήγησης τετρακύλινδρων αυτοκινήτων μοντέλων του 1995, βρήκε ότι το μέσο κόστος των εξόδων (ασφάλειες, συντήρηση, κατανάλωση, βενζίνη κ.λπ) μετρούμενα σε δραχμές ανά χιλιόμετρο δίνονται από τη συνάρτηση:

$$\overline{K}(x) = \frac{2010}{x^3} + 17{,}80$$

όπου x είναι ο αριθμός των χιλιομέτρων (σε χιλιάδες) που διανύει το αμάξι το χρόνο.

(α) Ποιό είναι το μέσο κόστος οδήγησης ενός τέτοιου τετρακύλινδρου αμαξιού που διανύει 5000, 10000, 15000 και 20000 χιλιόμετρα το χρόνο;

(β) Χρησιμοποιήστε το (α) ερώτημα για να σχεδιάσετε **ποιοτικά** τη γραφική παράσταση της $\overline{K}(x)$.

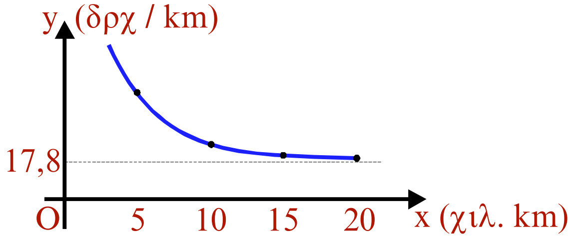
(γ) Τι συμβαίνει με το μέσο κόστος οδήγησης όταν ο αριθμός των χιλιομέτρων που διανύει το αμάξι το χρόνο αυξάνει χωρίς όριο;

Λύση

(α) Ο πίνακας τιμών που ακολουθεί μας δείχνει το μέσο κόστος οδήγησης:

x	5	10	15	20
$\overline{K}(x)$	33,88	19,81	18,40	18,05

(β)



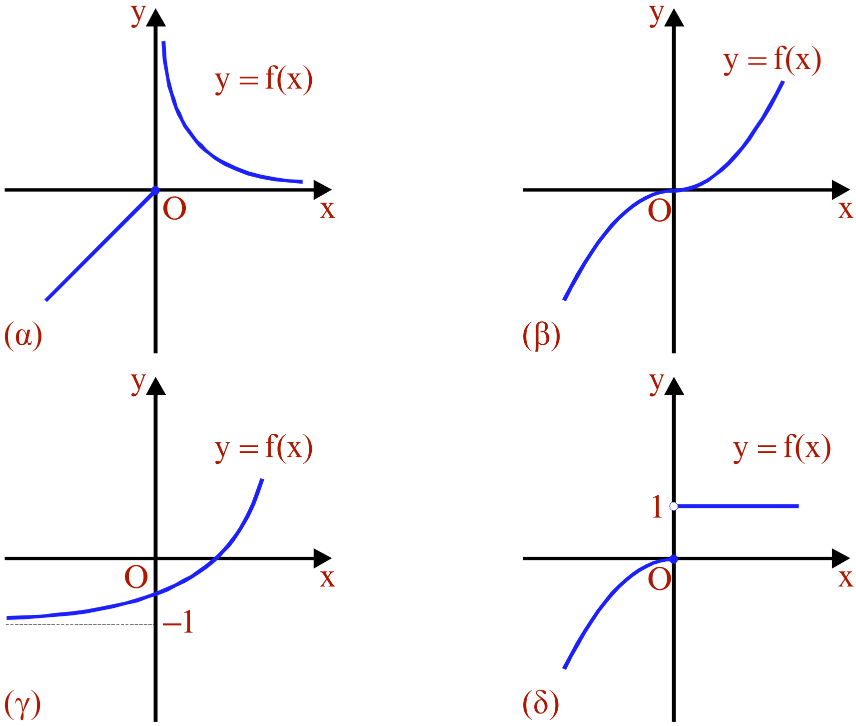
(γ) 'Εχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} \overline{K}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2010}{x^3} + 17{,}80\right) = 17{,}80.$

'Αρα όταν ο αριθμός των χιλιομέτρων που διανύει το αμάξει το χρόνο αυξάνει αρκετά τότε το μέσο κόστος οδήγησης μικραίνει και φτάνει οριακά τις 17,80 δραχμές/km.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να εκτιμήσετε (μαντέψετε) το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ στις περιπτώσεις (α), (β) και το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ στις περιπτώσεις (γ), (δ), αν υπάρχει:



'Ασκηση 2

Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f. Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f, αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

x	10	50	100	1000	1500
f(x)	1,01			1,000001	

(β) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

x	−10	−50	−100	−1000	−1500
f(x)	0,0498			0,0004	

'Ασκηση 3

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των ορίων στο άπειρο για να υπολογίσετε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

(α) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3+x^2-x+1)$ (β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^3+1}$ (γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{2x-1}$

'Ασκηση 4

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των ορίων στο άπειρο για να υπολογίσετε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[101\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]$ (β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{2-x}+\dfrac{2x^2}{2x+10}\right)$ (γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{2x+1}$

'Ασκηση 5

Στις ασκήσεις 3 και 4 να βρείτε τις εξισώσεις των οριζόντιων ασυμπτώτων των συναρτήσεων, όπου αυτές υπάρχουν.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Για τις επόμενες συναρτήσεις υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ να βρείτε επίσης το $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)$.

(α) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x}$ (β) $f(x)=2x^2-x+3$

(γ) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ (δ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}$

'Ασκηση 2

Υπολογίστε τα επόμενα όρια εκθετικών μορφών, αν υπάρχουν.

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-4x}+1)$ (β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{2e^x}$ (γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{2e^x}$

'Ασκηση 3

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x \ln x)$ (β) $\lim\limits_{x\to 0^+}(2^{\frac{1}{x}} \ln x)$

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Το κόστος κατασκευής ενός DVD δίσκου εξαρτάται από το πλήθος x των κατασκευαζομένων DVD από μια εταιρεία, με βάση τη συνάρτηση κόστους $K(x) = 0{,}5 + \dfrac{2500}{x}$ σε χιλιάδες δρχ.

(α) Υπολογίστε το κόστος ενός DVD δίσκου αν η εταιρεία κατασκευάζει 1000, 1500, 2500, 5000, 50000 δίσκους.

(β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

'Ασκηση 2

Η συγκέντρωση ενός συγκεκριμένου φάρμακου στην κυκλοφορία του αίματος ενός ασθενή, t ώρες μετά την ένεση, δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \dfrac{0{,}2t}{t^2+1}$ όπου οι τιμές της συνάρτησης υπολογίζονται σε mg/cm^3.

(α) Υπολογίστε τη συγκέντρωση για $t = 1, 2, 4, 5, 10$ ώρες.

(β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

'Ασκηση 1

Βρείτε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λάθος (Λ) και αιτιολογήστε την άποψή σας.

1. Για κάθε συνάρτηση f που ορίζεται σε σύνολο μορφής (α, β) με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ και $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = L$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L - \ell$.

3. Αν για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $f(x) = g(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

4. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ τότε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

5. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

6. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$.

'Ασκηση 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{x} - 1,\ x \geqslant 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{\lambda}{(x-1)^2},\ \lambda \neq 0,\ 0 \leqslant x \neq 1$$

(α) Να βρείτε τα $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$, αν υπάρχουν.

(β) Ποιάς μορφής απροσδιοριστία βρίσκουμε όταν αναζητούμε το $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$;

(γ) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$.

'Ασκηση 3

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν.

(α) $\lim\limits_{x \to +\infty} [2\ln x - \ln(x^2 + 1)]$ (β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

'Ασκηση 4

'Ενα ψάρι κολυμπά μια απόσταση ℓ μέτρων με ταχύτητα υ m/sec αντίθετα προς το ρεύμα ενός ποταμού, του οποίου η ταχύτητα του νερού είναι u m/sec (u < υ). Η ενέργεια που ξοδεύει το ψάρι δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(\upsilon) = \frac{\alpha\, \ell\, \upsilon^3}{\upsilon - u}$$

όπου $\alpha > 0$ είναι μια σταθερά και η ενέργεια E μετριέται σε Joule.

(α) Υπολογίστε το $\lim\limits_{\upsilon \to u^+} E(\upsilon)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

(β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{\upsilon \to +\infty} E(\upsilon)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

'Ασκηση 5

Αν για τις συναρτήσεις f και g που ορίζονται σε ένα διάστημα μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ τότε για τιμές του x πολύ κοντά στο x_0 μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $f(x) \simeq g(x)$.

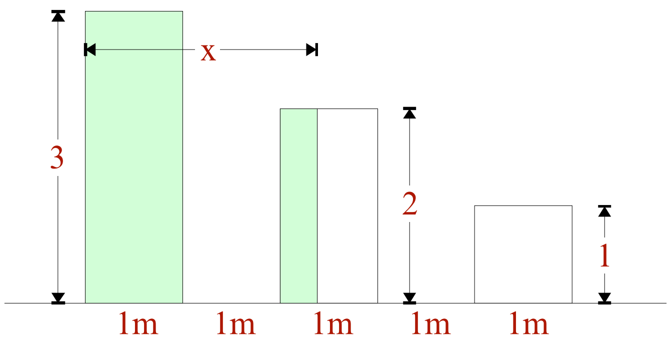
Παράδειγμα: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1 + x} - 1$ και $g(x) = \frac{x}{2}$.

(α) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

(β) Υπολογίστε προσεγγιστικά τη $\sqrt{10}$, $\sqrt{105}$, $\sqrt{0,3}$, $\sqrt{0,002}$.

'Ασκηση 6 (Πρόβλημα Εμβαδού)

Τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχουν ίδια βάση 1 m, ύψη 3 m, 2 m, 1 m αντίστοιχα, και απέχουν μεταξύ τους κατά 1 m, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



(α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το εμβαδό του σχήματος.

(β) Αν E(x) η συνάρτηση του εμβαδού, να ελέγξετε αν είναι συνεχής και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

'Ασκηση 7

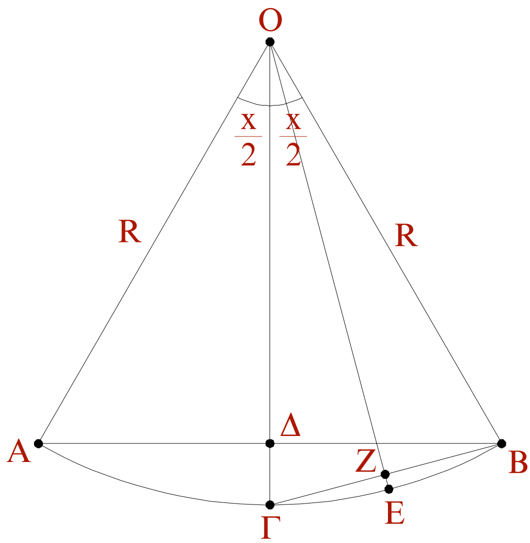
Θεωρούμε έναν κυκλικό τομέα ΑΟΒ ακτίνας R με επίκεντρη γωνία x όπως φαίνεται στο παρκάτω σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΑΒ και το μήκος του "βέλους" ΔΓ ως συνάρτηση της γωνίας x, όπου Γ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΒΓ και το μήκος του "βέλους" ΖΕ ως συνάρτηση της γωνίας x, όπου Ε είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$.

(γ) Να βρείτε τα όρια της χορδής ΑΒ και του "βέλους" ΔΓ όταν $x \to 0$.

(δ) Να αποδείξετε ότι:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{ZE}} = 4.$$



Ανακεφαλαίωση

- Ιδιότητες Ορίων:

Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και είναι $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \ell_1 \pm \ell_2$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = \ell_1\cdot\ell_2$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, εφόσον $\ell_2 \neq 0$

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell_1|$

(v) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^\nu = \ell_1^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$

(vi) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\ell_1}$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa \geqslant 2$,

όπου η f είναι θετική σε μια περιοχή του x_0.

- Επιτρεπτές πράξεις με το άπειρο:

(i) $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$

(ii) Αν $x > 0$, τότε $x\cdot(+\infty) = +\infty$, $x\cdot(-\infty) = -\infty$

(iii) Αν $x < 0$, τότε $x\cdot(+\infty) = -\infty$, $x\cdot(-\infty) = +\infty$

(iv) $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$

Επιπλέον των παραπάνω πράξεων έχουμε και τις πράξεις μεταξύ του $(+\infty)$ και του $(-\infty)$ ως εξής:

(i) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

(ii) $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$, $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

- Απροσδιόριστες μορφές $\left(\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\cdot(\infty), (+\infty) + (-\infty)\right)$:

– $\dfrac{0}{0}$ σε Ρητές: Παραγοντοποιήσεις

– $\dfrac{0}{0}$ σε Ριζικά: Συζυγής Παράσταση

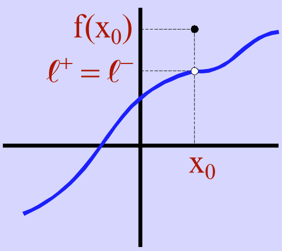
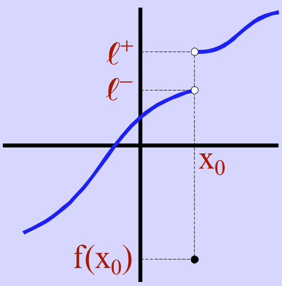
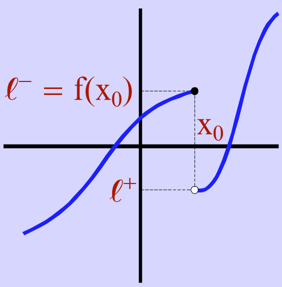
– $\frac{\infty}{\infty}$ σε Ρητές: Πηλίκο Μεγιστοβάθμιων όρων

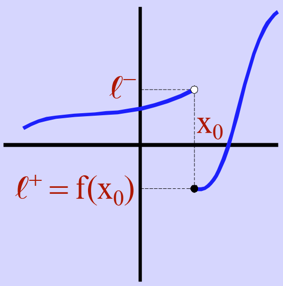
- Κατακόρυφη ασύμπτωτη γραφικής παράστασης:

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to\alpha^-} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty$$

- Συνέχεια συνάρτησης: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Σημεία ασυνέχειας:

Γραφ. Παράσταση της f	**Μελέτη Συνέχειας**	**Χαρακτηρισμός**
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ • $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$	Η f ασυνεχής στο x_0 (Παράδειγμα 5)
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, αφού $\ell^+ \neq \ell^-$	Η f ασυνεχής στο x_0 (Παράδειγμα 4)
	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, αφού $\ell^+ \neq \ell^-$ • Ισχύει ότι $\ell^- = f(x_0)$	Η f ασυνεχής στο x_0, συνεχής από αριστε-ρά (Παράδειγμα 3)

	• Ορίζεται το $f(x_0)$ • Δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αφού $\ell^+ \neq \ell^-$ • Ισχύει ότι $\ell^+ = f(x_0)$	Η f ασυνεχής στο x_0, συνεχής από δεξιά (Παράδειγμα 2)

- **Συνέχεια βασικών συναρτήσεων:**
  - Πολυωνυμικές
  - Ρητές
  - Ριζικά
  - Εκθετικές
  - Λογαριθμικές

- **Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων:**

  Αν οι συναρτήσεις f, g: A→$\mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 \in A$, τότε:

  (i) Η συνάρτηση $h(x) = f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

  (ii) Η συνάρτηση $h(x) = \kappa \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_0, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

  (iii) Η συνάρτηση $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

  (iv) Αν $g(x_0) \neq 0$, η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής στο x_0.

  (v) Η συνάρτηση $h(x) = |f(x)|$ είναι συνεχής στο x_0.

  (vi) Η συνάρτηση $h(x) = \sqrt[\kappa]{f(x)}$ με $f(x) \geqslant 0$ είναι συνεχής στο x_0.

  Επίσης, έχουμε ότι και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση:

  Θεώρημα

  'Εστω συναρτήσεις f: A→$\mathbb{R}$ και g: B→$\mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και η g στο $f(x_0) \in B$, τότε και η σύνθεσή τους $g\circ f$: A→$\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.

- **Οριζόντια ασύμπτωτη γραφικής παράστασης:**

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποιά η έννοια του ορίου; Δώστε ένα παράδειγμα από την καθημερινότητα. Τι πρέπει να ισχύει για να ορίζεται ένα όριο;
2. Τι λέμε μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης;
3. Ποιές οι επιτρεπτές και ποιές οι μη επιτρεπτές πράξεις με το άπειρο;
4. Σε ποιά σημεία ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης;
5. Ποιά η έννοια μιας συνεχούς γραμμής και μιας συνεχούς συνάρτησης;
6. Εκφράστε εποπτικά τα δυνατά σημεία ασυνέχειας μιας συνάρτησης.
7. Γράψτε τους ορισμούς των ορίων:
   (i) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell,\ \ell \in \mathbb{R}$
   (ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
   (iii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
   (iv) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
8. Ποιά τα όρια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού τους;
9. Μια συνάρτηση που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες;
10. Μια συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα έχει οριζόντιες ασύμπτωτες;
11. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης ορισμένης στο $\mathbb{R}$ χωρίς οριζόντιες ασύμπτωτες.
12. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης ορισμένης στο $(0, +\infty)$ χωρίς οριζόντια και κατακόρυφη ασύμπτωτη.