1 Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

§ 1.1 – 1.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα Β = $[\beta_{ij}]$ με $\beta_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$, i = 1, 2, 3 και j = 1, 2, 3. Τι παρατηρείτε σχετικά με τη μορφή του πίνακα Β;

Λύση

$$\beta_{11} = \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{11}) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) = \frac{1}{2}(-3 - 1) = -2$$

$$\beta_{13} = \frac{1}{2}(\alpha_{13} + \alpha_{31}) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{2}(\alpha_{21} + \alpha_{12}) = \frac{1}{2}(-1 - 3) = -2$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{2}(\alpha_{22} + \alpha_{22}) = \frac{1}{2}(5 + 5) = 5$$

και κατά όμοιο τρόπο υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία του Β.

Αυτός ο πίνακας είναι:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του που βρίσκονται εκατέρωθεν της διαγωνίου είναι ίσα, δηλαδή $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, όταν $i \neq j$.
Ο B ονομάζεται συμμετρικός πίνακας.

'Ασκηση 2

Αν ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & x^2 - y^2 & (x+y)^2 \\ (x+4)^2 & y^2 & x+2y-4 \\ y^2 - x^2 & x+y & (x-y)^2 \end{bmatrix}$$

με $x, y \in \mathbb{R}$ είναι τριγωνικός κάτω, να δείξετε ότι είναι και διαγώνιος.

Λύση

Τριγωνικός κάτω σημαίνει ότι τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0, άρα:

$$\left.\begin{matrix} x^2 - y^2 = 0 \\ (x+y)^2 = 0 \\ x+2y-4=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = y \text{ ή } x = -y \\ x = -y \\ x+2y-4=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = -y \\ x+2y-4=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -4 \\ y = 4 \end{matrix}$$

Με αυτές τις τιμές των x, y ο πίνακας A γράφεται:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

άρα διαγώνιος.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Βρείτε τον πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$, για τον οποίο γνωρίζουμε ότι $\alpha_{ij} = \min\{i, j\}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, \nu$. Κατόπιν, βρείτε το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Λύση

Ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \nu \end{bmatrix}$$

'Αρα το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου είναι:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{(1+\nu)\nu}{2}$$

(Θυμίζουμε ότι το άθροισμα ν-όρων αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\nu}{2}$).

'Ασκηση 2

Θεωρούμε ένα ν×ν πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$.

(α) Πόσα στοιχεία έχει συνολικά ο πίνακας Α;

(β) Πόσα στοιχεία υπάρχουν πάνω ή κάτω από την κύρια διαγώνιο;

(γ) Μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιον πίνακα με περισσότερα από $\nu^2 - \nu$ στοιχεία ίσα με μηδέν, που να έχει όλες τις γραμμές (αντίστοιχα στήλες) διάφορες της μηδενικής;

Λύση

(α) Ο τετραγωνικός πίνακας τύπου ν×ν προφανώς έχει ν^2 στοιχεία.

(β) Η κύρια διαγώνιος $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ έχει ν στοιχεία. 'Αρα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα είναι $\nu^2 - \nu$. Αφού είναι τετραγωνικός, τα μισά είναι πάνω απ' τη διαγώνιο, άρα $\frac{\nu^2 - \nu}{2}$ στοιχεία και τα άλλα μισά είναι κάτω απ' τη διαγώνιο, επίσης $\frac{\nu^2 - \nu}{2}$ στοιχεία.

(γ) Αν θέσουμε $\nu^2 - \nu$ στοιχεία του πίνακα ίσα με μηδέν τότε όλα τα στοιχεία εκτός εκείνα της διαγωνίου είναι 0. Με περισσότερα από $\nu^2 - \nu$ στοιχεία ίσα με μηδέν θα έχουμε επιπλέον κάποια στοιχεία της διαγωνίου 0, άρα κάποια γραμμή (ή γραμμές) ή στήλη (ή στήλες) θα είναι μηδενική, θα έχει δηλαδή όλα τα στοιχεία της μηδέν.

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Είναι γνωστό ότι το νερό βράζει στους 100° C. Ισχύει όμως πάντοτε αυτό; Η απάντηση μπορεί να δοθεί με χρήση της εξίσωσης Antoine που εκφράζει την «τάση ατμών» (δηλαδή την πίεση στο σημείο βρασμού) ως συνάρτηση της θερμοκρασίας:

$$\ln P^s = 18{,}3104 - \frac{3826{,}36}{T - 45{,}47} = A - \frac{B}{T + C}$$

όπου $A = 18{,}3104$, $B = 3826{,}36$, $C = -45{,}47$, $T =$ θερμοκρασία σε Kelvin, P^s = τάση ατμών σε mm Hg.

Αν είναι γνωστό ότι οι βαθμοί Kelvin προκύπτουν, αν στους βαθμούς Κελσίου προσθέσουμε 273,15, συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

$$\Theta = \begin{bmatrix} C & K & \dfrac{B}{C+T} & A - \dfrac{B}{C+T} & P^s\,(\text{mm Hg}) & P^s\,(\text{atm}) \\ 100 & & & & & \\ 90 & & & & & \\ 98 & & & & & \end{bmatrix}$$

Σχολιάστε τα αποτελέσματα του πίνακα.

Λύση

Με χρήση υπολογιστή ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

$$\Theta = \begin{bmatrix} C & K & \dfrac{B}{C+T} & A - \dfrac{B}{C+T} & P^s\,(\text{mm Hg}) & P^s\,(\text{atm}) \\ 100 & 373{,}15 & 11{,}67712 & 6{,}633 & 760 & 1 \\ 90 & 363{,}15 & 12{,}04469 & 6{,}2657 & 526 & 0{,}69 \\ 98 & 371{,}15 & 11{,}74883 & 6{,}56156 & 707 & 0{,}93 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω τρόπος διεξαγωγής υπολογισμών μέσω πίνακα είναι ιδιαίτερα βολικός. 'Οπως περιμέναμε, το νερό βράζει σε μικρότερες των 100°C θερμοκρασίες σε μεγάλα υψόμετρα (χαμηλότερης ατμοσφαιρικής πίεσης).

'Ασκηση 2

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι πειραματικές και υπολογισμένες, με 3 διαφορετικά μοντέλα μέτρησης, τιμές για τον συντελεστή ενεργότητας μιας σειράς πολυμερών διαλυμάτων. Ο συντελεστής ενεργότητας είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα στην εφαρμοσμένη Θερμοδυναμική.

Σύστημα	Πειραματική Τιμή	Μοντέλο		
		Α	Β	Γ
PIB/τολουόλιο	5,30	5,28	6,19	7,01
PIB/τετραχλωράνθρακας	2,53	2,74	2,93	2,10
PVC/ακετόνη	11,80	9,98	10,17	3,64
PVC/κυκλοεξάνιο	16,10	10,96	8,96	5,36
BR/εξάνιο	6,36	5,79	4,97	9,89
BR/ακετόνη	10,40	11,36	9,49	33,63
PS/βενζόλιο	4,27	4,76	3,98	5,78
PS/αιθυλοβενζόλιο	4,96	4,63	4,23	7,02

Να σχηματίσετε έναν πίνακα όπου:

(α) Στην πρώτη στήλη να εμφανίζονται οι πειραματικές τιμές και

(β) Στις επόμενες στήλες να εμφανίζονται, αντί των υπολογισμένων τιμών, τα ποσοστιαία σφάλματα, καθώς και το μέσο ποσοστιαίο σφάλμα του κάθε μοντέλου στην τελευταία γραμμή του πίνακα.

Σημείωση:

- *Το ποσοστιαίο σφάλμα υπολογίσεται ως εξής:*

$$Π.Σφ. = \frac{|Πειραματική\ τιμή - Υπολογισμένη\ τιμή|}{Πειραματική\ τιμή}.100$$

- *Το μέσο ποσοστιαίο σφάλμα υπολογίζεται ως εξής:*

$$Μ.Π.Σφ. = \frac{'Αθροισμα\ ποσοστιαίων\ σφαλμάτων\ κάθε\ μοντέλου}{Πλήθος\ μετρήσεων}$$

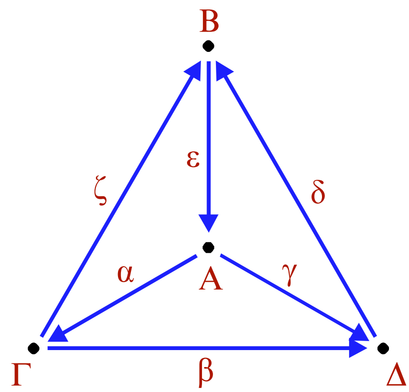
Λύση

Σύστημα	Πειραματική Τιμή	Ποσ. σφάλματα (%)		
		Α	Β	Γ
PIB/τολουόλιο	5,30	0,4	16,8	32,3
PIB/τετραχλωράνθρακας	2,53	8,3	15,8	17,0
PVC/ακετόνη	11,80	15,4	13,8	69,1
PVC/κυκλοεξάνιο	16,10	32,0	44,3	66,7
BR/εξάνιο	6,36	9,0	21,9	55,5
BR/ακετόνη	10,40	9,2	8,7	223,4
PS/βενζόλιο	4,27	11,5	6,8	35,4
PS/αιθυλοβενζόλιο	4,96	6,6	14,7	41,5
Μέσο ποσοστιαίο σφάλμα		11,55	17,85	67,61

Παρατηρήστε ότι οι διαφορές ανάμεσα στα μοντέλα μέτρησης Α και Β δεν είναι μεγάλες αν και το Α είναι ακριβέστερο. Το Γ μοντέλο οδηγεί σε ανεπαρκούς ακρίβειας αποτελέσματα και είναι το χειρότερο από τα τρία.

'Ασκηση 3 (Τοπολογικός ή συνδετικός πίνακας)

Το διπλανό σχήμα μας δείχνει μια κεντρική Α και τρεις περιφεριακές γειτονιές Β, Γ, Δ που συνδέονται με δρόμους μονής κατεύθυνσης. Κάθε ένας απ' αυτούς τους δρόμους θα συμβολίζεται με δύο αριθμούς: –1 από τη γειτονιά που ξεκινάει, 1 σ' αυτή που καταλήγει και 0 σ' αυτή που δεν πάει. (π.χ. ο δρόμος ΑΓ, –1 στη γειτονιά Α, 1 στη γειτονιά Γ και 0 στις υπόλοιπες γειτονιές).



(α) Φτιάξτε έναν πίνακα που να φανερώνει τον τρόπο που συνδέονται οι γειτονιές με τους μονόδρομους, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι γραμμές θα παριστάνουν τους δρόμους και οι στήλες τις γειτονιές.

(β) Τι παρατηρείτε στις γραμμές αυτού του πίνακα για τα δίκτυα
(i) γ, δ, ε (iii) α, β, γ
(ii) α, ζ, ε (iv) β, δ, ζ

(γ) Μπορείτε να γενικεύσετε για οποιοδήποτε από τα δίκτυα που συνδέουν τις τέσσερις γειτονιές;

Λύση

(α) Αν Μ συμβολίσουμε αυτό τον πίνακα τότε:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \Gamma & \Delta \end{array} \\
\mathrm{M} = & \left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \zeta \end{array}
\end{array}
$$

(β) (i) Το γ, δ, ε ως κλειστό δίκτυο που ξεκινά από το Α και καταλήγει στο Α (δηλ. $\vec{\gamma} + \vec{\delta} + \vec{\varepsilon} = \vec{0}$) έχει ως άθροισμα στοιχείων των γραμμών τους, **μηδέν**.

(ii) 'Ομοια.

(iii) Το α, β, γ είναι ένα δίκτυο τέτοιο ώστε μπορεί κάποιος να πάει από το Α στο Δ μέσω Γ, μπορεί όμως να πάει απευθείας από το Α στο Δ. 'Αρα το άθροισμα των γραμμών α και β μας δίνει τη γραμμή γ.

(iv) 'Ομοια.

***'Ασκηση 4** (Το πρόβλημα του γάμου)*

Υποθέστε ότι έχουμε 4 γυναίκες α, β, γ, δ και 4 άνδρες Α, Β, Γ, Δ. Κάποια απ' αυτά τα 16 ζευγάρια συμφωνούν να δοκιμάσουν αν μπορούν να παντρευτούν και κάποια δε συμφωνούν για διάφορους λόγους. Αν με $\alpha_{ij} = 0$ συμβολίσουμε ότι η i γυναίκα δε συμφωνεί με τον j άνδρα και $\alpha_{ij} = 1$ ότι η i γυναίκα συμφωνεί με τον j άνδρα τότε:

(α) Γράψτε έναν πίνακα που να δείχνει ότι:
- Η α γυναίκα συμφωνεί πως μπορεί να παντρευτεί με τον Α ή τον Δ άνδρα.
- Η β γυναίκα με τον Β άνδρα.
- Η γ γυναίκα με τον Α ή τον Γ άνδρα
- Η δ γυναίκα με τον Β ή τον Δ ή τον Α άνδρα.

(β) Με δεδομένο ότι μια γυναίκα μπορεί να παντρευτεί έναν άνδρα και αντίστροφα, ποιά είναι τα δυνατά ζευγάρια του (α) ερωτήματος;

(γ) Βρείτε ένα μέγιστο σύνολο γάμων που παριστάνουν οι επόμενοι πίνακες:

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \Gamma & \Delta & \mathrm{E} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{array} \end{array}, \quad N = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \Gamma & \Delta & \mathrm{E} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{array} \end{array}$$

Λύση

(α) Αν συμβολίσουμε με Κ το ζητούμενο πίνακα τότε έχουμε στις γραμμές του γυναίκες α, β, γ, δ και στις στήλες του άνδρες Α, Β, Γ, Δ:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} Α & Β & Γ & Δ \end{array} \\ K = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} α \\ β \\ γ \\ δ \end{array} \end{array}$$

(β) Τα δυνατά ζευγάρια του (α) ερωτήματος που συμφωνούν να παντρευτούν είναι:
(i) (α, Α), (β, Β), (γ, Γ), (δ, Δ) ή
(ii) (α, Δ), (β, Β), (γ, Γ), (δ, Α)

(γ) 'Ενα μέγιστο σύνολο γάμων για τον πίνακα Μ είναι:

(α, Γ), (β, Α), (γ, Β), (δ, Δ)

και για τον πίνακα Ν είναι:

(α, Β), (β, Δ), (γ, Ε), (δ, Γ), (ε, Α)

και εδώ παρατηρούμε ότι έχουμε ένα καθ' όλα συμπληρωμένο σύνολο γάμων.

§ 1.4 – 1.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & x^2 - 9 \end{bmatrix}$ είναι μηδενικός όταν:

(α) $x = 3$ (β) $x = -3$ (γ) $x = 6$

Κυκλώστε τη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε.

Λύση

Πρέπει $\left.\begin{array}{l} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \text{και}\quad x^2 - 9 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (x-3)^2 = 0 \\ (x-3)(x+3) = 0 \end{array}$

'Αρα για $x = 3$ ο $A = \mathbb{O}$.

'Ασκηση 2

Στις επόμενες περιπτώσεις να υπολογίσετε τους $A + B$ και $A - B$, εφόσον βέβαια ορίζονται:

(α) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&-2\\3&-3\end{bmatrix}$ (β) $A=[\,2\ \ 1\ \ 0\,], B=[\,-2\ \ -1\ \ 0\,]$

(γ) $A=\begin{bmatrix}2\\-4\\2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}$ (δ) $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3&1&3\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

Λύση

(α) $A+B=\begin{bmatrix}1+1&2-1\\2+2&3-2\\3+3&4-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\4&1\\6&1\end{bmatrix}$

$A-B=\begin{bmatrix}1-1&2+1\\2-2&3+2\\3-3&4+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3\\0&5\\0&7\end{bmatrix}$

(β) $A+B=[\,2-2\ \ 1-1\ \ 0+0\,]=[\,0\ \ 0\ \ 0\,]$

$A-B=[\,2+2\ \ 1+1\ \ 0-0\,]=[\,4\ \ 2\ \ 0\,]$

(γ) $A+B=\begin{bmatrix}2+0\\-4+4\\2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix}2-0\\-4-4\\2-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-8\\2\end{bmatrix}$

(δ) Δεν ορίζονται τα $A+B$ και $A-B$ γιατί δεν είναι του ίδιου τύπου οι A, B.

'Ασκηση 3

Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{bmatrix}x^2&x\\y^2&4\\x^2+6&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&y\\1&5y\\5x&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&-y^2\\0&0\end{bmatrix}$$

Λύση

$$\begin{bmatrix}x^2&x\\y^2&4\\x^2+6&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&y\\1&5y\\5x&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&-y^2\\0&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2-3 & x-y \\ y^2-1 & 4-5y \\ x^2+6-5x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -y^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και από την ισότητα των πινάκων παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\quad x^2 = 4 \\ &\text{(ii)}\quad x-y = 1 \\ &\text{(iii)}\quad y^2 = 1 \\ &\text{(iv)}\quad y^2-5y+4 = 0 \\ &\text{(v)}\quad x^2-5x+6 = 0 \end{aligned}$$

(α) Από την πρώτη παίρνουμε $x = 2$ ή $x = -2$ και παρατηρούμε ότι η τελευταία αληθεύει μόνο για $x = 2$, η οποία είναι και η ζητούμενη τιμή για το x.

(β) Από την τρίτη παίρνουμε $y = 1$ ή $y = -1$ και παρατηρούμε ότι η τέταρτη αληθεύει μόνο για $y = 1$, η οποία είναι και η ζητούμενη τιμή για το y.

(γ) Τέλος, για τις τιμές που υπολογίσαμε επαληθεύεται και η δεύτερη.

'Ασκηση 4

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(β) $X + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(δ) $X + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Λύση

(α) $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(β) $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

(γ) $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(δ) $X=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) στους επόμενους ισχυρισμούς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α) Το άθροισμα και η διαφορά δύο διαγώνιων πινάκων τύπου ν×ν είναι διαγώνιος πίνακας ν×ν.

(β) Το άθροισμα και η διαφορά δύο τριγωνικών άνω (ή κάτω) πινάκων είναι τριγωνικός άνω (ή κάτω) πίνακας.

(γ) Ο μηδενικός είναι διαγώνιος πίνακας.

Λύση

(α) **Σωστό** γιατί αν:

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu}\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix}\beta_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \beta_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{\nu\nu}\end{bmatrix}$$

τότε φανερά:

$$A+B=\begin{bmatrix}\alpha_{11}+\beta_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_{22}+\beta_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu}+\beta_{\nu\nu}\end{bmatrix}$$

'Ομοια για τη διαφορά A – B.

(β) **Σωστό** γιατί αν:

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}\\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu}\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1\nu}\\ 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2\nu}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{\nu\nu}\end{bmatrix}$$

τότε φανερά:

$$A+B=\begin{bmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu}+\beta_{1\nu} \\ 0 & \alpha_{22}+\beta_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu}+\beta_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu}+\beta_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

'Ομοια και για τριγωνικούς κάτω πίνακες.

(γ) **Σωστό** γιατί ο διαγώνιος πίνακας πρέπει να έχει όλα τα στοιχεία του, που δε βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο, 0. Αυτό δεν αναιρείται επειδή έχει 0 και τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου. Αν π.χ. αφαιρούσαμε δύο ίσους διαγώνιους πίνακες A και B το αποτέλεσμα θα ήταν ο μηδενικός πίνακας, και όπως αποδείξαμε στο (α) ερώτημα, θα παρέμενε διαγώνιος.

'Ασκηση 2

Δίνονται οι πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Να υπολογίσετε τον πίνακα $3A-2B$.

(β) Να βρείτε πίνακα X τέτοιο ώστε $3A-2X=2B+5X$.

Λύση

(α) $3A-2B=3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -3 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -7 \\ 6 & -14 \end{bmatrix}$$

(β) Από την εξίσωση $3A-2X=2B+5X$ παίρνουμε:

$7X=3A-2B \Leftrightarrow X=\frac{1}{7}(3A-2B) \Leftrightarrow$

$$X=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -7 \\ 6 & -14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & -1 \\ \frac{6}{7} & -2 \end{bmatrix}$$

'Ασκηση 3

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε πίνακες Χ και Ψ για τους οποίους ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{c} 2X - A = \Psi - 2B \\ X - 2B = A - \Psi \end{array}\right\}$$

Λύση

$$\left.\begin{array}{c} 2X - A = \Psi - 2B \\ X - 2B = A - \Psi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2X - \Psi = A - 2B \\ X + \Psi = A + 2B \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 3X = 2A \\ X + \Psi = A + 2B \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} X = \frac{2}{3}A \\ \Psi = A + 2B - \frac{2}{3}A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} X = \frac{2}{3}A \\ \Psi = \frac{1}{3}A + 2B \end{array}\right\}$$

'Αρα $X = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ και

$$\Psi = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Οι ημερήσιες πωλήσεις εφημεριδών από το περίπτερο μιας συνοικίας αριθμούν σε φύλλα όπως δείχνουν οι επόμενοι πίνακες:

1^{η} ημέρα

	Αθλητικές	Πολιτικές	Οικονομικές
Πρωί	25	20	20
Απόγευμα	5	60	4

2^{η} ημέρα

	Αθλητικές	Πολιτικές	Οικονομικές
Πρωί	20	22	25
Απόγευμα	4	65	8

Αν ονομάσουμε Μ τον πίνακα πωλήσεων της $1^{\eta\varsigma}$ ημέρας και Ν τον πίνακα πωλήσεων της $2^{\eta\varsigma}$ ημέρας, υπολογίστε τον Μ + Ν. Ποιά είναι η ερμηνεία που δίνετε για τον πίνακα Μ + Ν;

Λύση

$$M=\begin{bmatrix} 25 & 20 & 20 \\ 5 & 60 & 4 \end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix} 20 & 22 & 25 \\ 4 & 65 & 8 \end{bmatrix}, M+N=\begin{bmatrix} 45 & 42 & 45 \\ 9 & 125 & 12 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $M + N$ εκφράζει τις πωλήσεις σε φύλλα του περιπτέρου τις δύο ημέρες.

'Ασκηση 2

Τα τρίποντα, δίποντα και οι ελεύθερες βολές που πέτυχαν, εντός και εκτός έδρας, στις τέσσερεις πρώτες αγωνιστικές του πρωταθλήματος μπάσκετ τρεις ομάδες δίνονται παρακάτω:

ΠΟΝΤΟΙ / ΟΜΑΔΕΣ	ΤΡΙΠΟΝΤΑ		ΔΙΠΟΝΤΑ		ΕΛ. ΒΟΛΕΣ	
	Εντός	Εκτός	Εντός	Εκτός	Εντός	Εκτός
1η Ομάδα	28	16	60	48	40	36
2η Ομάδα	24	20	68	56	52	44
3η Ομάδα	32	12	84	76	44	68

(α) Να γραφούν τα δεδομένα με μορφή τριών πινάκων Α, Β, Γ που να περιέχουν αντίστοιχα τα τρίποντα, δίποντα και τις ελεύθερες βολές της κάθε ομάδας.

(β) Να βρεθεί ένας πίνακας ο οποίος δίνει τους συνολικούς πόντους κάθε ομάδας, εντός και εκτός έδρας.

Λύση

(α) Ας θεωρήσουμε Α, Β, Γ τους πίνακες που δίνουν αντίστοιχα τα τρίποντα, δίποντα και τις ελεύθερες βολές. Τότε:

$$A=\begin{bmatrix} 28 & 16 \\ 24 & 20 \\ 32 & 12 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 60 & 48 \\ 68 & 56 \\ 84 & 76 \end{bmatrix}, \Gamma=\begin{bmatrix} 40 & 36 \\ 52 & 44 \\ 44 & 68 \end{bmatrix}$$

(β) Ο πίνακας που θα δίνει τους συνολικούς πόντους κάθε ομάδας είναι:

$$X = 3A + 2B + \Gamma = 3\begin{bmatrix} 28 & 16 \\ 24 & 20 \\ 32 & 12 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 60 & 48 \\ 68 & 56 \\ 84 & 76 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 & 36 \\ 52 & 44 \\ 44 & 68 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} 244 & 180 \\ 260 & 216 \\ 308 & 256 \end{bmatrix}$$

'Ασκηση 3

Η κατανάλωση ρεύματος σε κιλοβατώρες, δύο οικογενειών ανά τετράμηνο δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	Α′ ΤΕΤΡ.	Β′ ΤΕΤΡ.	Γ′ ΤΕΤΡ.
1η Οικογένεια	1828	1700	1560
2η Οικογένεια	2230	1920	1870

Αν η κιλοβατώρα κοστίζει 35 δρχ. και το πάγιο κάθε τετραμήνου είναι 4450 δρχ:

(α) Να παραστήσετε μ' έναν πίνακα Χ τα ποσά που θα πληρώνει κάθε οικογένεια ανά τετράμηνο.

(β) Να βρείτε πόσα χρήματα θα πλήρωναν οι ίδιες οικογένειες, αν μείωναν την κατανάλωση ρεύματος κατά 10%.

Λύση

(α) Ας θεωρήσουμε Α τον πίνακα της κατανάλωσης σε κιλοβατώρες κάθε οικογένειας, ανά τετράμηνο:

$$A=\begin{bmatrix} 1828 & 1700 & 1560 \\ 2230 & 1920 & 1870 \end{bmatrix}$$

Τα ποσά που θα πληρώνει κάθε οικογένεια ανά τετράμηνο μας δίνει ο πίνακας:

$$X = 35\cdot A + 4450\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 63980 & 59500 & 54600 \\ 78050 & 67200 & 65450 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4450 & 4450 & 4450 \\ 4450 & 4450 & 4450 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 68430 & 63950 & 59050 \\ 82500 & 71650 & 69900 \end{bmatrix}$$

(β) Τα χρήματα που θα πλήρωναν οι οικογένειες ανά τετράμηνο αν μείωναν κατά 10% την κατανάλωση ρεύματος μας δίνει ο πίνακας:

$$\Psi = 35\cdot(0{,}90\cdot A) + 4450\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$35\begin{bmatrix} 1645{,}2 & 1530 & 1404 \\ 2007 & 1728 & 1683 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4450 & 4450 & 4450 \\ 4450 & 4450 & 4450 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 62032 & 58000 & 53590 \\ 74695 & 64930 & 63355 \end{bmatrix}$$

§ 1.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων, όπου αυτά ορίζονται:

(α) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(ε) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (στ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Λύση

(α) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

(β) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(δ) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}$

(ε) $\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(στ)Δεν ορίζεται γιατί έχουμε γινόμενο πινάκων 2×2 με 3×3.

'Ασκηση 2

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τα γινόμενα $A\cdot B$ και $B\cdot A$. Ποιό γενικότερο συμπέρασμα εξάγεται;

Λύση

- $A\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
- $B\cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

'Οταν $AB = I$ τότε ισχύει και $BA = I$. Δηλαδή $AB = BA = I$.

'Ασκηση 3

Αν α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου ΑΒΓ και για τους πίνακες:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad M = \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & -\beta \end{bmatrix}$$

ισχύει $\Lambda^2 = M^2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Λύση

$$\Lambda^2 = M^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^2+\gamma^2 & 0 \\ 0 & \beta^2+\gamma^2 \end{bmatrix}$$

'Αρα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ και αφού ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

'Ασκηση 4

Θεωρούμε τους 3×3 διαγώνιους πίνακες Α και Β.

(α) Δείξτε ότι:

(i) ΑΒ διαγώνιος (ii) ΑΒ = ΒΑ

(β) Ισχύουν τα ίδια αν οι πίνακες είναι 3×3 τριγωνικοί άνω (ή κάτω);

Λύση

(α) 'Εστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{bmatrix}$. Τότε:

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22}\beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}\beta_{33} \end{bmatrix} \text{ και } BA = \begin{bmatrix} \beta_{11}\alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22}\alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33}\alpha_{33} \end{bmatrix}$$

'Αρα ο ΑΒ είναι διαγώνιος και ισχύει ΑΒ = ΒΑ.

(β) 'Εστω $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{bmatrix}$. Τότε:

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} & \alpha_{11}\beta_{13} + \alpha_{12}\beta_{23} + \alpha_{13}\beta_{33} \\ 0 & \alpha_{22}\beta_{22} & \alpha_{22}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{33} \\ 0 & 0 & \alpha_{33}\beta_{33} \end{bmatrix}$$

'Αρα τριγωνικός άνω.

Το στοιχείο $1^{ης}$ γραμμής και $3^{ης}$ στήλης του πίνακα ΒΑ είναι το $\beta_{11}\alpha_{13} + \beta_{12}\alpha_{23} + \beta_{13}\alpha_{33}$ και είναι διάφορο του στοιχείου $1^{ης}$ γραμμής και $3^{ης}$ στήλης του πίνακα ΑΒ. 'Αρα **δεν ισχύει** ΑΒ = ΒΑ.

'Ασκηση 5

Ποιοί από τους επόμενους πίνακες είναι σίγουρα ίσοι με τον πίνακα $(A + B)^2$;

(i) $(B + A)^2$

(ii) $A^2 + 2AB + B^2$

(iii) $A(A + B) + B(A + B)$

(iv) $A^2 + AB + BA + B^2$

Για κάθε έναν που νομίζετε ότι είναι ίσος με τον $(A + B)^2$, δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

(α) $(B + A)^2 = (A + B)^2$ αφού ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση.

(β) $A^2 + 2AB + B^2 \neq (A + B)^2$ αφού δεν ισχύει πάντα η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό των πινάκων.

(γ) $A(A + B) + B(A + B) = (A + B)(A + B) = (A + B)^2$ αφού ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

(δ) $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$ αφού ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

'Ασκηση 6

Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ όπου $\alpha, \beta \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι $A^2 = \alpha \cdot A$.

(β) Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι από την ισότητα $A^2 = \alpha \cdot A$ προκύπτει η ισότητα $A = \alpha \cdot I$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

(α) $A^2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ \alpha\beta & 0 \end{bmatrix}$

$\alpha A = \alpha\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ \alpha\beta & 0 \end{bmatrix}$

'Αρα $A^2 = \alpha A$.

(β) Αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα διαγραφής του πίνακα A τότε από την ισότητα $A^2 = \alpha A$ παίρνουμε:

$$A = \alpha I = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

που είναι αδύνατο αφού α και $\beta \neq 0$.

'Ασκηση 7

Θεωρούμε δύο πίνακες 3×3 A και B. Σημειώστε ποιους από τους επόμενους ισχυρισμούς θεωρείτε σωστούς (Σ) ή λάθος (Λ). Δικαιολογήστε την απάντησή σας στους σωστούς ισχυρισμούς και δώστε ένα αριθμητικό αντιπαράδειγμα στους λάθος ισχυρισμούς.

(α) Αν η πρώτη και η τρίτη στήλη του B είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη στήλη του AB είναι ίδιες.

(β) Αν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του B είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη γραμμή του AB είναι ίδιες.

(γ) Αν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του A είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη γραμμή του AB είναι ίδιες.

Λύση

'Εστω ότι $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ με $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$.

(α) **Σωστό** γιατί αν:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \kappa & \beta_{12} & \kappa \\ \lambda & \beta_{22} & \lambda \\ \mu & \beta_{32} & \mu \end{bmatrix}$$

τότε η πρώτη στήλη του AB προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις γραμμές του A με την πρώτη στήλη του B. Δηλαδή:

1^{η} στήλη AB

$$\begin{gathered} \alpha_{11}\kappa + \alpha_{12}\lambda + \alpha_{13}\mu \\ \alpha_{21}\kappa + \alpha_{22}\lambda + \alpha_{23}\mu \\ \alpha_{31}\kappa + \alpha_{32}\lambda + \alpha_{33}\mu \end{gathered}$$

'Ομοια, η τρίτη στήλη του AB προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις γραμμές του A με την τρίτη στήλη του B. Δηλαδή:

3^{η} στήλη AB

$$\begin{gathered} \alpha_{11}\kappa + \alpha_{12}\lambda + \alpha_{13}\mu \\ \alpha_{21}\kappa + \alpha_{22}\lambda + \alpha_{23}\mu \\ \alpha_{31}\kappa + \alpha_{32}\lambda + \alpha_{33}\mu \end{gathered}$$

(β) **Λάθος**. Π.χ. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε η πρώτη γραμμή του AB αποτελείται από τα στοιχεία: $-2 \;\; 4 \;\; 8$ και η τρίτη γραμμή του AB από τα στοιχεία: $-8 \;\; 4 \;\; 4$.

(γ) **Σωστό**. Η δικαιολογία είναι όμοια με του (α) ερωτήματος.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Αν ο A είναι πίνακας τύπου $\mu\times 1999$, ο B είναι πίνακας τύπου $\kappa\times\lambda$ και ισχύει $AB = BA$, να βρείτε τους κ, λ, μ.

Λύση

- Για να ορίζεται ο πίνακας AB πρέπει $\kappa = 1999$. Τότε ο AB είναι τύπου $\mu\times\lambda$.
- 'Ομοια, για να ορίζεται ο πίνακας BA πρέπει $\lambda = \mu$. Τότε ο BA είναι τύπου $\kappa\times 1999$.
- Αφού $AB = BA$ πρέπει οι τύποι τους να είναι ίδιοι, άρα $\lambda = 1999$ και $\mu = \kappa$, επομένως $\kappa = \lambda = \mu = 1999$.

'Ασκηση 2

Βρείτε, με δοκιμές, πίνακες 2×2 τέτοιους ώστε:

(α) $A^2 = -I$, με στοιχεία του A πραγματικούς αριθμούς.

(β) $B^2 = \mathbb{O}$, με κάποια στοιχεία του B διάφορα του μηδενός.

(γ) $\Gamma\Delta = -\Delta\Gamma$, εκτός της περίπτωσης όπου $\Gamma\Delta = \mathbb{O}$.

(δ) $EZ = \mathbb{O}$, με όλα τα στοιχεία των E και Z μη μηδενικά.

Λύση

(α) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(β) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(γ) $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(δ) $E = Z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

'Ασκηση 3

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix}$.

(α) Δείξτε ότι $A^2 + A - (2 + \beta\gamma)I = \mathbb{O}$.

(β) Ισχύει $AB = BA$ τότε και μόνο τότε αν $A^2B = BA^2$.

Λύση

(α) $A^2 + A - (2+\beta\gamma)I = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix} - (2+\beta\gamma)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 1+\beta\gamma & -\beta \\ -\gamma & \beta\gamma+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2+\beta\gamma & 0 \\ 0 & 2+\beta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(β) Πολλαπλασιάζουμε την (α) δεξιά και αριστερά με B, οπότε:

- $A^2B + AB - (2+\beta\gamma)B = \mathbb{O}$
- $BA^2 + BA - (2+\beta\gamma)B = \mathbb{O}$

'Αρα $A^2B + AB = BA^2 + BA$ απ' όπου προκύπτει και η ισοδυναμία του ερωτήματος (β).

'Ασκηση 4

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε πραγματικούς αριθμούς x, y ώστε να ισχύει $A^2 = xA + yI$. Κατόπιν υπολογίστε τον πίνακα A^3 ως συνάρτηση των A και I.

Λύση

- $A^2 = xA + yI \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$
  $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+y & x \\ -x & 2x+y \end{bmatrix}$

  Επομένως:

  $$\left.\begin{array}{r} 3x+y=8 \\ x=5 \\ 2x+y=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=5 \\ y=-7 \end{array}\right\}$$

  'Αρα $A^2 = 5A - 7I$.

- $A^3 = A^2A = (5A-7I)A = 5A^2 - 7A = 5(5A-7I) - 7A = 18A - 35I$

'Ασκηση 5

Αν για τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2+3 & -\lambda \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ισχύει $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ υπολογίστε τον αριθμό λ. Για ποιές τιμές του λ ισχύει $AB + BA = \mathbb{O}$;

Λύση

- $(A+B)^2 = A^2 + B^2 \Leftrightarrow$
  $\begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 \\ \lambda^2+6 & -(\lambda+2) \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2+3 & -\lambda \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^2 \Leftrightarrow$
  $\begin{bmatrix} (\lambda+2)^2+(\lambda+2)(\lambda^2+6) & 0 \\ 0 & (\lambda+2)(\lambda^2+6)+(\lambda+2)^2 \end{bmatrix} =$
  $= \begin{bmatrix} \lambda^2+(\lambda+1)(\lambda^2+3) & 0 \\ 0 & \lambda^2+(\lambda+1)(\lambda^2+3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda^2+7\lambda+6=0$
  απ' όπου $\lambda=-1$ ή $\lambda=-6$.
- Από τη σχέση $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ παίρνουμε:
  $$A^2+AB+BA+B^2 = A^2+B^2 \Leftrightarrow AB+BA=\mathbb{O}$$
  (Θυμηθείτε ότι δεν ισχύουν οι ταυτότητες στους πίνακες εκτός αν $AB=BA$)
  'Αρα για τις ίδιες τιμές του λ που βρήκαμε παραπάνω ισχύει $AB+BA=\mathbb{O}$.

'Ασκηση 6

Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ -\frac{2}{\lambda} & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $A^2=-I$, $A^3=-A$, $A^4=I$
(β) $A^{99}+A^{100}+A^{101}=I$

Λύση

(α) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ -\frac{2}{\lambda} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ -\frac{2}{\lambda} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$

$A^3 = A^2A = (-I)A = -A$

$A^4 = A^2A^2 = (-I)(-I) = I^2 = I$

(β) Για τον υπολογισμό των μεγάλων δυνάμεων του A διαιρούμε τους εκθέτες δια 4 αφού $A^4=I$. 'Αρα:
$$A^{99}+A^{100}+A^{101} = A^{4\cdot24+3}+A^{4\cdot25}+A^{4\cdot25+1} = -A+I+A=I$$

§ 1.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}(2\lambda-1)x+\mu y=7\\(\lambda-2)x+(\mu-1)y=2\end{aligned}\right\}$$

Βρείτε τις τιμές των λ, μ ∈ ℝ ώστε το σύστημα να έχει λύση $(x, y) = (2, 2)$.

Λύση

Αφού $x = 2$, $y = 2$ λύση του συστήματος τότε έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}2(2\lambda-1)+2\mu=7\\2(\lambda-2)+2(\mu-1)=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}4\lambda+2\mu=9\\2\lambda+2\mu=8\end{aligned}\right\}$$

απ' όπου εύκολα βρίσκουμε $\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{7}{2}$.

'Ασκηση 2

Να επιλυθούν τα γραμμικά συστήματα:

(α) $\left.\begin{aligned}-y+\omega=4\\2x+2y+6\omega=4\\3x+6y+15\omega=9\end{aligned}\right\}$ (β) $\left.\begin{aligned}x+4y-2\omega=4\\-x-4y+5\omega=13\\2x+8y-2\omega=-2\end{aligned}\right\}$ (γ) $\left.\begin{aligned}-2x+2y-2\omega=-18\\x-y-\omega=1\\2x-2y+5\omega=33\end{aligned}\right\}$

Λύση

(α) $$E=\left[\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&4\\2&2&6&4\\3&6&15&9\end{array}\right]\overset{\gamma_1\leftrightarrow\gamma_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&6&4\\0&-1&1&4\\3&6&15&9\end{array}\right]\underset{\gamma_3\to\frac{1}{3}\gamma_3}{\overset{\gamma_1\to\frac{1}{2}\gamma_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&2\\0&-1&1&4\\1&2&5&3\end{array}\right]\overset{\gamma_3\to\gamma_3+(-1)\gamma_1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&2\\0&-1&1&4\\0&1&2&1\end{array}\right]\overset{\gamma_3\to\gamma_3+\gamma_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&2\\0&-1&1&4\\0&0&3&5\end{array}\right]\underset{\gamma_3\to\frac{1}{3}\gamma_3}{\overset{\gamma_2\to(-1)\gamma_2}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&2\\0&1&-1&-4\\0&0&1&\frac{5}{3}\end{array}\right]\underset{\gamma_2\to\gamma_2+\gamma_3}{\overset{\gamma_1\to\gamma_1+(-3)\gamma_3}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \overset{\gamma_1 \to \gamma_1 + (-1)\gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

'Αρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y, \omega) = (-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{5}{3})$.

(β) Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε σε ισοδύναμο σύστημα με εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} x + 4y = 2 \\ \omega = 3 \end{aligned}\right\}$$

και αν θέσουμε $y = t \in \mathbb{R}$ έχουμε άπειρες λύσεις:

$$(x, y, \omega) = (2 - 4t, t, 3) \text{ με } t \in \mathbb{R}$$

(γ) Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε σε αδύνατο σύστημα μορφής:

$$\left.\begin{aligned} x - y = 0 \\ \omega = 0 \\ 0 = 1 \end{aligned}\right\}$$

'Ασκηση 3

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(α) Υπολογίστε το γινόμενο $A \cdot B$.

(β) Αν $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ γράψτε το σύστημα που εκφράζει η εξίσωση πινάκων $A \cdot X = \mathbb{O}$ και διαπιστώστε ότι ο πίνακας B είναι μια λύση αυτού του συστήματος. Μπορείτε να βρείτε και άλλες λύσεις αυτού του συστήματος;

Λύση

(α) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(β) $A \cdot X = \mathbb{O} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 3x-6y=0 \\ 2y-2z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$

και είναι ένα ομογενές σύστημα.

Ο πίνακας B είναι μια λύση του συστήματος, αφού το επαληθεύει.

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\gamma_3 \to \gamma_3 + (-3)\gamma_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{\gamma_2 \to \frac{1}{2}\gamma_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{\gamma_3 \to \gamma_3 + 3\gamma_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\gamma_1 \to \gamma_1 + \gamma_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

'Αρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\left.\begin{array}{c} x-2z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\}$$

και αν θέσουμε $z = t \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε άπειρες λύσεις:

$$(x, y, z) = (2t, t, t)$$

με t ελεύθερο άγνωστο.

'Ασκηση 4

Δίνεται ο πίνακας A τύπου $(\kappa+\lambda) \times (2\kappa+\lambda-1)$ και ο πίνακας B τύπου $(2\lambda-\kappa) \times (3\kappa-\lambda+2)$. Να βρείτε τους ακέραιους κ, λ ώστε να ορίζεται το άθροισμα A + B και το γινόμενο A·B.

Λύση

- Για να ορίζεται το άθροισμα A + B πρέπει οι πίνακες A, B να είναι του ίδιου τύπου, άρα:

$$\left.\begin{array}{r} \kappa+\lambda = 2\lambda-\kappa \\ 2\kappa+\lambda-1 = 3\kappa-\lambda+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} 2\kappa-\lambda=0 & (1) \\ -\kappa+2\lambda=3 & (2) \end{array}$$

- Για να ορίζεται το γινόμενο A·B πρέπει:
  $2\kappa+\lambda-1 = 2\lambda-\kappa \Leftrightarrow 3\kappa-\lambda=1$ (3)

Αν επιλύσουμε το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\kappa = 1$, $\lambda = 2$ οι τιμές των οποίων επαληθεύουν και την (3). Τότε οι πίνακες A, B θα είναι τύπου 3×3.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να επιλυθούν τα γραμμικά συστήματα:

(α) $\left.\begin{array}{c} 3x+2y=-1 \\ 2x+y=1 \\ 5x+4y=-5 \end{array}\right\}$ (β) $\left.\begin{array}{c} \lambda x+y=1 \\ x+y=1 \\ x+\lambda y=1 \end{array}\right\}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$

Λύση

(α) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$E=\begin{bmatrix} 3 & 2 & | & -1 \\ 2 & 1 & | & 1 \\ 5 & 4 & | & -5 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\gamma_1\to\frac{1}{3}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & | & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 & | & 1 \\ 5 & 4 & | & -5 \end{bmatrix} \underset{\gamma_3\to\gamma_3+(-5)\gamma_1}{\overset{\gamma_2\to\gamma_2+(-2)\gamma_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & | & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & | & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & | & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \underset{\sim}{\gamma_3\to\gamma_3+2\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & | & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & | & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\gamma_2\to(-1)\gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & | & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & | & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \underset{\sim}{\gamma_1\to\gamma_1+(-2)\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & | & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \underset{\sim}{\gamma_2\to 3\gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -5 \end{bmatrix}$$

'Αρα έχουμε μοναδική λύση $(x, y)=(3, -5)$.

(β) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$E=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & \lambda & | & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\gamma_1\leftrightarrow\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ \lambda & 1 & | & 1 \\ 1 & \lambda & | & 1 \end{bmatrix} \underset{\gamma_3\to\gamma_3+(-1)\gamma_1}{\overset{\gamma_2\to\gamma_2+(-\lambda)\gamma_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1-\lambda & | & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

- Αν $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x + y = 1$ και έχει άπειρες λύσεις $(x, y) = (t, 1 - t)$ όπου $x = t \in \mathbb{R}$.
- Αν $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

  που είναι αδύνατο.

'Ασκηση 2

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} [\,x \;\; y \;\; \omega\,]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = [\,y \;\; -2\omega \;\; -x\,] \\ x + y - 3\omega = 2\lambda \end{array}\right\}$$

είναι συμβιβαστό.

Λύση

Από την πρώτη ισότητα παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 2\omega &= y \\ 2x + 2y - \omega &= -2\omega \\ y + 2\omega &= -x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x + y - 2\omega &= 0 \\ 2x + 2y + \omega &= 0 \\ x + y + 2\omega &= 0 \end{aligned}\right\}$$

που είναι ομογενές σύστημα. Για την επίλυσή του παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{\gamma_3 \to \gamma_3 + (-1)\gamma_1}{\overset{\gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

απ' όπου εύκολα καταλαβαίνουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ \omega &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Αν θέσουμε $x = t$ τότε έχουμε άπειρες λύσεις $(x, y, \omega) = (t, -t, 0)$.
Για να επαληθεύεται και η εξίσωση $x + y - 3\omega = 2\lambda$ πρέπει:
$t - t - 3 \cdot 0 = 2\lambda$, άρα $\lambda = 0$.

Σημείωση: *Μπορούμε να πάρουμε και τις τέσσερις εξισώσεις του συστήματος και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο διαδοχικών απαλειφών, οπότε στην τελευταία γραμμή θα παρουσιαστεί: $0 \quad 0 \quad 0 \;|\; 2\lambda$. 'Αρα για να είναι συμβιβαστό το σύστημα, πρέπει $\lambda = 0$.*

'Ασκηση 3

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda+1 \\ \lambda^2+1 \end{bmatrix}$$

έχει λύση. Γι' αυτές τις τιμές του λ να υπολογίσετε τον πίνακα $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Λύση

Η εξίσωση καταλήγει σε ισοδύναμο σύστημα όπως φαίνεται στα επόμενα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda+1 \\ \lambda^2+1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x-\lambda y \\ \lambda x-\lambda y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda+1 \\ \lambda^2+1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x-\lambda y=\lambda+1 \\ \lambda x-\lambda y=\lambda^2+1 \end{array}\right\}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$E=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & \lambda+1 \\ \lambda & -\lambda & \lambda^2+1 \end{array}\right] \overset{\gamma_2 \to \gamma_2+(-\lambda)\gamma_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & \lambda+1 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & 1-\lambda \end{array}\right]$$

- Αν $\lambda^2-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=1$, τότε έχουμε:

  (i) Για $\lambda=0$, $E=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ αδύνατο σύστημα

  (ii) Για $\lambda=1$, $E=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

  άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x-y=2$ που έχει άπειρες λύσεις $(x, y)=(t+2, t)$ με $y=t$ "ελεύθερο άγνωστο" $t \in \mathbb{R}$. 'Αρα για $\lambda=1$ ο πίνακας είναι $X=\begin{bmatrix} t+2 \\ t \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

- Αν $\lambda^2-\lambda \neq 0$ δηλαδή $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$, τότε έχουμε:

$$E=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & \lambda+1 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & 1-\lambda \end{array}\right] \overset{\gamma_3 \to \frac{1}{\lambda^2-\lambda}\gamma_3}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & \lambda+1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda} \end{array}\right] \overset{\gamma_1 \to \gamma_1+\lambda\gamma_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda} \end{array}\right]$$

'Αρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (\lambda, -\frac{1}{\lambda})$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$

και ο πίνακας $X = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$ με $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$.

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ μία γωνία του είναι $10°$ μεγαλύτερη από τη δεύτερη και η δεύτερη διπλάσια από την τρίτη. Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου.

Λύση

Αν θεωρήσουμε x, y, ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου (σε μοίρες) τότε:

$$\left.\begin{aligned} x + y + \omega = 180 \\ x = y + 10 \\ y = 2\omega \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x - y = 10 \\ x + y + \omega = 180 \\ y - 2\omega = 0 \end{aligned}\right\}$$

Αν Ε είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος τότε:

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{\gamma_2 \to \gamma_2 + (-1)\gamma_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 170 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 170 \end{array}\right] \overset{\gamma_3 \to \gamma_3 + (-2)\gamma_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 170 \end{array}\right] \overset{\gamma_3 \to \frac{1}{5}\gamma_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 34 \end{array}\right] \overset{\gamma_2 \to \gamma_2 + 2\gamma_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 68 \\ 0 & 0 & 1 & 34 \end{array}\right] \overset{\gamma_1 \to \gamma_1 + \gamma_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 78 \\ 0 & 1 & 0 & 68 \\ 0 & 0 & 1 & 34 \end{array}\right]$$

'Αρα οι γωνίες είναι $x = 78°$, $y = 68°$ και $\omega = 34°$.

'Ασκηση 2

Ο ανοξείδωτος χάλυβας περιέχει σίδηρο (Fe), άνθρακα (C), νικέλιο (Ni) και χρώμιο (Cr). Η ανάλυση έδειξε ότι το 80% του χάλυβα αποτελείται από σίδηρο και νικέλιο, υπάρχει 5% χρώμιο και η ποσότητα του Fe είναι τετραπλάσια της ποσότητας του C. Να βρεθεί η % κατά βάρος σύσταση του χάλυβα σε Fe, C, Ni, Cr.

Λύση

'Εστω x%, y%, z% η κατά βάρος σύσταση του χάλυβα σε Fe, C και Ni αντίστοιχα. Ακόμα γνωρίζουμε ότι 5% είναι η σύσταση κατά βάρος του Cr στο χάλυβα. Τότε:

$$\frac{x}{100}+\frac{y}{100}+\frac{z}{100}+\frac{5}{100}=1 \quad \text{ή} \quad x+y+z+5=100 \quad (1)$$

Επίσης:

$$x+z=80 \quad (2)$$

$$x=4y \quad (3)$$

Το σύστημα των (1), (2), (3) είναι γραμμικό και η επίλυσή του μας δίνει: $x=60$, $y=15$, $z=20$.

'Ασκηση 3

'Ενα ξενοδοχείο έχει x μονόκλινα, y δίκλινα και ω τρίκλινα δωμάτια.

(α) Να εκφράσετε το πλήθος των δωματίων και κλινών με τη βοήθεια των x, y, ω.

(β) Αν το πλήθος όλων των δωματίων είναι 18, το πλήθος των κλινών 33 και το πλήθος των δίκλινων δωματίων όσο των μονόκλινων και τρίκλινων μαζί, να βρείτε πόσα είναι τα μονόκλινα, δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια.

Λύση

(α) Πλήθος δωματίων του ξενοδοχείου: $x+y+\omega$
Πλήθος κλινών του ξενοδοχείου: $x+2y+3\omega$

(β) 'Εχουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\omega=18 \\ x+2y+3\omega=33 \\ y=x+\omega \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+\omega=18 \\ x+2y+3\omega=33 \\ -x+y-\omega=0 \end{array}\right\}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$E=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 1 & 2 & 3 & 33 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\gamma_3 \to \gamma_3+\gamma_1}{\overset{\gamma_2 \to \gamma_2+(-1)\gamma_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 18 \\ 0 & 1 & 2 & | & 15 \\ 0 & 2 & 0 & | & 18 \end{bmatrix} \overset{\gamma_3 \to \gamma_3 + (-2)\gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 18 \\ 0 & 1 & 2 & | & 15 \\ 0 & 0 & -4 & | & -12 \end{bmatrix} \overset{\gamma_3 \to -\frac{1}{4}\gamma_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 18 \\ 0 & 1 & 2 & | & 15 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \underset{\gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_3}{\overset{\gamma_2 \to \gamma_2 + (-1)\gamma_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 15 \\ 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \overset{\gamma_1 \to \gamma_1 + (-1)\gamma_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

'Αρα το ξενοδοχείο έχει 6 μονόκλινα, 9 δίκλινα και 3 τρίκλινα δωμάτια.

'Ασκηση 4

Ο μπρούτζος είναι κράμα χαλκού (Cu) και κασσίτερου (Sn). 'Ενα κομμάτι μπρούτζου ζυγίζει 81,877 gr και έχει όγκο 10 cm^3. Αν η πυκνότητα του Cu είναι 8,92 gr/cm^3 και του Sn είναι 7,29 gr/cm^3, να βρεθεί η % κατά βάρος σύσταση του μπρούτζου σε χαλκό και κασσίτερο. (Θυμίζουμε ότι: πυκνότητα $= \frac{\text{μάζα}}{\text{όγκος}}$, $\rho = \frac{m}{V}$).

Λύση

- 'Εστω x% σε Cu και y% Sn η κατά βάρος σύσταση του μπρούτζου. Τότε:

$$\frac{x}{100} + \frac{y}{100} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{x + y = 100} \tag{1}$$

Η βασική σχέση του μπρούτζου με τα συστατικά του είναι η ισότητα των όγκων τους, δηλ.

$$V_{\text{μπρούτζου}} = V_{\text{χαλκού}} + V_{\text{κασσιτ.}} \Leftrightarrow \frac{m}{p} = \frac{m_1}{p_1} + \frac{m_2}{p_2} \tag{2}$$

όπου m, m_1, m_2 είναι οι μάζες και p, p_1, p_2 είναι αντίστοιχα οι πυκνότητες του μπρούτζου, Cu και Sn.

- 'Ομως $m_1 = x\%\cdot m$ και $m_2 = y\%\cdot m$. 'Αρα η (2) γράφεται:

$$\frac{m}{p} = \frac{x\%\cdot m}{p_1} + \frac{y\%\cdot m}{p_2} \Leftrightarrow \frac{1}{p} = \frac{x\%}{p_1} + \frac{y\%}{p_2} \Leftrightarrow \frac{10}{81{,}877} = \frac{x}{892} + \frac{y}{729}$$

απ' όπου με απαλοιφή παρονομαστών παίρνουμε:

$$\mathbf{729x + 892y = 79420} \text{ περίπου} \tag{3}$$

Το σύστημα (1) και (3):

$$\left\{\begin{array}{r} x + y = 100 \\ 729x + 892y = 79420 \end{array}\right\}$$

δίνει $y = 40$ και $x = 60$.

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

'Ασκηση 1

Θεωρούμε ένα ν×μ πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ ώστε για το κάθε στοιχείο του πίνακα να ισχύει $\alpha_{ij} = i \cdot j$. Αν το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της i στήλης, δείξτε ότι ο πίνακας είναι τετραγωνικός.

Λύση

Το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής είναι: $\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \cdots + \alpha_{i\mu}$.
Το άθροισμα των στοιχείων της i στήλης είναι: $\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \cdots + \alpha_{\nu i}$.
'Εχουμε $\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \cdots + \alpha_{i\mu} = \alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \cdots + \alpha_{\nu i}$, οπότε από τον ορισμό κάθε στοιχείου του πίνακα A η προηγούμενη ισότητα γράφεται:

$$i + 2i + \cdots + \mu i = i + 2i + \cdots + \nu i \Leftrightarrow$$

$$(1 + 2 + \cdots + \mu)i = (1 + 2 + \cdots + \nu)i \Leftrightarrow \frac{(1+\mu)\mu}{2} = \frac{(1+\nu)\nu}{2} \Leftrightarrow$$

$$\mu^2 - \nu^2 + \mu - \nu = 0 \Leftrightarrow (\mu - \nu)(\mu + \nu + 1) = 0$$

'Αρα $\mu = \nu$ αφού $\mu + \nu + 1 \neq 0$ διότι οι μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι.

'Ασκηση 2

Σ' έναν πίνακα 6×6 τοποθετούμε τους αριθμούς 1, 2, 3, …, 36 κατά σειρά, ξεκινώντας από την πρώτη γραμμή και γράφοντας διαδοχικά τους παραπάνω αριθμούς. Μπορείτε να τοποθετήσετε τους αριθμούς αυτούς έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης να είναι περιττός αριθμός;

Λύση

Ο πίνακας είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \end{bmatrix}$$

Το άθροισμα των έξι στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης είναι περιττός αριθμός όταν το πλήθος των περιττών προσθέσεων είναι περιττό. Επομένως σε κάθε γραμμή και στήλη μπορούμε να έχουμε τρεις περιττούς προσθετέους αν για οποιοδήποτε στοιχείο του πίνακα θέσουμε:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \text{περιττός} & \text{όταν} \quad i + j = \text{περιττός} \\ \text{άρτιος} & \text{όταν} \quad i + j = \text{άρτιος} \end{cases}$$

'Ενα τέτοιο παράδειγμα είναι ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 13 & 16 & 15 & 18 & 17 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 26 & 25 & 28 & 27 & 30 & 29 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \end{bmatrix}$$

'Ασκηση 3

Αν ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 - \beta\gamma & \beta^2 - \alpha\gamma \\ \beta^3 - \gamma^2\alpha & \alpha\beta\gamma & \gamma^2 - \alpha\beta \\ \gamma^3 - \alpha^2\beta & \alpha^3 - \beta^2\gamma & \beta\gamma^2 \end{bmatrix}$$

με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι τριγωνικός κάτω, να δείξετε ότι είναι και διαγώνιος.

Λύση

Τριγωνικός κάτω σημαίνει ότι τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0, άρα $\alpha^2 - \beta\gamma = 0$, $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, $\gamma^2 - \alpha\beta = 0$. Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων έχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \alpha\gamma - \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma - 2\alpha\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]=0$$

'Αρα: $\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta=0\\ \beta-\gamma=0\\ \gamma-\alpha=0\end{array}\right\}$ απ' όπου $\alpha=\beta=\gamma$.

Τότε για τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο έχουμε:

$$\beta^3-\gamma^2\alpha=\beta^3-\beta^3=0$$
$$\gamma^3-\alpha^2\beta=\gamma^3-\gamma^3=0$$
$$\alpha^3-\beta^2\gamma=\alpha^3-\alpha^3=0$$

'Αρα ο πίνακας Α είναι διαγώνιος.

'Ασκηση 4

Θεωρούμε έναν πίνακα Α τύπου 2×3 και έναν πίνακα Β τύπου 3×4. Πόσους πολλαπλασιασμούς και πόσες προσθέσεις πρέπει να κάνουμε για να υπολογίσουμε το γινόμενο Α·Β;

Λύση

'Εστω $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24}\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34}\end{bmatrix}$.

- Τα 3 στοιχεία της πρώτης γραμμής του Α πολλαπλασιάζονται με τα αντίστοιχα 3 στοιχεία της πρώτης στήλης του Β ώστε να πάρουμε το στοιχείο της πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης του ΑΒ. 'Αρα έχουμε 3 πολλαπλασιασμούς.

  Αυτό γίνεται για όλα τα στοιχεία του γινομένου ΑΒ, άρα έχουμε 3·4 πολλαπλασιασμούς της πρώτης γραμμής του Α με όλες τις στήλες του Β και αντίστοιχα άλλους 3·4 πολλαπλασιασμούς της δεύτερης γραμμής του Α με όλες τις στήλες του Β. Συνολικά, έχουμε 2·3·4 πολλαπλασιασμούς.

- Για να βρούμε το στοιχείο της πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης του ΑΒ προσθέτουμε μεταξύ τους τα 3 γινόμενα που βρήκαμε αρχικά. 'Αρα κάνουμε 2 προσθέσεις.

  Επομένως, για όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του ΑΒ έχουμε 2·4 προσθέσεις. 'Ομοια, για τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής του ΑΒ έχουμε 2·4 προσθέσεις. Συνολικά 2·2·4 προσθέσεις.

Μπορείτε να γενικεύσετε για πίνακες $A_{\mu\times\nu}$ και $B_{\nu\times\kappa}$;

'Ασκηση 5

Θεωρούμε έναν 2×2 πίνακα $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

(α) Βρείτε τον τύπο του πίνακα X για τον οποίο έχει έννοια η εξίσωση $AX - XA = I$ (1).

(β) Δείξτε ότι δεν υπάρχει πίνακας X για τον οποίο αληθεύει η (1).

Λύση

(α) Για να ορίζεται ο πίνακας AX πρέπει οι γραμμές του X να είναι 2 και για να ορίζεται ο πίνακας XA πρέπει οι στήλες του X να είναι 2. 'Αρα ο X είναι 2×2.

(β) 'Εστω ότι υπάρχει τέτοιος πίνακας $X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$ για τον οποίο ισχύει: $AX - XA = I \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha x+\beta z & \alpha y+\beta\omega \\ \gamma x+\delta z & \gamma y+\delta\omega \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \alpha x+\gamma y & \beta x+\delta y \\ \alpha z+\gamma\omega & \beta z+\delta\omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{lr} \beta z-\gamma y=1 & (1) \\ \alpha y+\beta\omega-\beta x-\delta y=0 & (2) \\ \gamma x+\delta z-\alpha z-\gamma\omega=0 & (3) \\ \gamma y-\beta z=1 & (4) \end{array}\right\}$$

απ' όπου με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (4) παίρνουμε 0 = 2 αδύνατο.

'Αρα δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας X και η εξίσωση $AX - XA = I$ είναι αδύνατη.

Σημείωση: *Γενικά είναι αδύνατη η εξίσωση $AX - XA = I_\nu$ για κάθε πίνακα A τύπου ν×ν.*

'Ασκηση 6

Θεωρούμε δύο ν×ν πίνακες A, B και τον τύπου ν×1 πίνακα στήλη:

$$X=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(α) Ποιά στοιχεία του γινομένου AB είναι αποτέλεσμα της πράξης (AB)X;

(β) Γνωρίζοντας ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων, ποιά στοιχεία του γινομένου AB εκφράζει το γινόμενο A(BX);

Λύση

(α) Το γινόμενο AB είναι ένας $\nu\times\nu$ πίνακας και ο X είναι ένας $\nu\times 1$ πίνακας με πρώτο στοιχείο 1 και τα υπόλοιπα 0. 'Αρα (AB)X είναι ένας $\nu\times 1$ πίνακας και εκφράζει την πρώτη στήλη του AB, αφού μόνο τα στοιχεία της πρώτης στήλης πολλαπλασιάζονται με το 1, ενώ τα υπόλοιπα μηδενίζονται.

(β) Αφού $A(BX) = (AB)X$, προφανώς πάλι τα στοιχεία της πρώτης στήλης του AB εκφράζει το γινόμενο A(BX).

'Ασκηση 7

Θεωρούμε τους $\nu\times\nu$ πίνακες A, B για τους οποίους ισχύει $A - B = 2I$ και $A^2 + B^2 = 6I$.

(α) Δείξτε ότι $AB = BA = I$.

(β) Υπολογίστε τον πίνακα $A^3 - B^2 - A^2 - B^2$.

Λύση

(α) $A - B = 2I \Leftrightarrow A = B + 2I$. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} AB &= (B + 2I)B = B^2 + 2B \\ BA &= B(B + 2I) = B^2 + 2B \end{aligned}\right\}$$

'Αρα $AB = BA$. Επίσης, αφού $A - B = 2I$,τότε:

$$(A - B)^2 = (2I)^2 \Leftrightarrow A^2 - 2AB + B^2 = 4I \Leftrightarrow 6I - 2AB = 4I \Leftrightarrow AB = I$$

(β) $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) = (2I)(6I + I) = (2I)(7I) = 14I$

'Αρα $A^3 - B^3 - (A^2 + B^2) = 14I - 6I = 8I$.

'Ασκηση 8

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ισοδύναμα τα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\quad \left.\begin{aligned} -x + 2y &= 4 \\ 2x + \lambda^2 y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\Sigma_2)\quad \left.\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ x + \mu y &= \lambda + \mu \end{aligned}\right\}$$

Λύση

- Ο επαυξημένος πίνακας του πρώτου συστήματος είναι:

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 4 \\ 2 & \lambda^2 & | & 0 \end{bmatrix} \overset{\gamma_1 \to (-1)\gamma_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & -4 \\ 2 & \lambda^2 & | & 0 \end{bmatrix} \overset{\gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_1}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & | & -4 \\ 0 & \lambda^2+4 & | & 8 \end{bmatrix} \overset{\gamma_2 \to \frac{1}{\lambda^2+4}\gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & -4 \\ 0 & 1 & | & \dfrac{8}{\lambda^2+4} \end{bmatrix} \overset{\gamma_1 \to \gamma_1 + 2\gamma_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \dfrac{-4\lambda^2}{\lambda^2+4} \\ 0 & 1 & | & \dfrac{8}{\lambda^2+4} \end{bmatrix}$$

'Αρα το (Σ_1) έχει μοναδική λύση $(x, y) = (\frac{-4\lambda^2}{\lambda^2+4}, \frac{8}{\lambda^2+4})$.

- Ο επαυξημένος πίνακας του δεύτερου συστήματος είναι:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & \mu & | & \lambda+\mu \end{bmatrix} \overset{\gamma_2 \to \gamma_2 + (-1)\gamma_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & \mu-2 & | & \lambda+\mu \end{bmatrix} \underset{\gamma_2 \to \frac{1}{\mu-2}\gamma_2}{\overset{(*)}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & \dfrac{\lambda+\mu}{\mu-2} \end{bmatrix} \overset{\gamma_1 \to \gamma_1 + (-2)\gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \dfrac{-2(\lambda+\mu)}{\mu-2} \\ 0 & 1 & | & \dfrac{\lambda+\mu}{\mu-2} \end{bmatrix}$$

'Αρα το (Σ_2) έχει μοναδική λύση: $(x, y) = (\frac{-2(\lambda+\mu)}{\mu-2}, \frac{\lambda+\mu}{\mu-2})$.

Θα πρέπει:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{-4\lambda^2}{\lambda^2+4} = \dfrac{-2(\lambda+\mu)}{\mu-2} \\ \dfrac{8}{\lambda^2+4} = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{-4\lambda^2}{\lambda^2+4} = \dfrac{-16}{\lambda^2+4} \\ \dfrac{8}{\lambda^2+4} = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu-2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2 \\ \dfrac{8}{\lambda^2+4} = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu-2} \end{array}\right\}$$

- Αν $\lambda = 2$ τότε από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε $1 = \frac{2+\mu}{\mu-2} \Leftrightarrow -2 = 2$ αδύνατο.

(*) Αφού τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι ισοδύναμα τότε κατ' ανάγκη το (Σ_2) έχει μοναδική λύση γι' αυτό $\mu \neq 2$.

- Αν $\lambda = -2$ τότε έχουμε $1 = \dfrac{-2+\mu}{\mu-2} \Leftrightarrow \mu - 2 = \mu - 2$ που αληθεύει για οποιαδήποτε τιμή του $\mu \neq 2$.

'Αρα για $\lambda = -2$ και $\mu \in \mathbb{R} - \{2\}$ τα (Σ_1), (Σ_2) είναι ισοδύναμα.

'Ασκηση 9

Μια βιομηχανία, χρησιμοποιεί τρεις μηχανές, με τις οποίες κατασκευάζει τέσσερα βιομηχανικά είδη. Κάθε μηχανή δουλεύει 8 ώρες την ημέρα και ο αριθμός των ωρών που χρησιμοποιείται κάθε μηχανή για την παραγωγή μιας μονάδας από κάθε είδος δίνεται από τον πίνακα:

Μηχανή \ Είδη	1ο	2ο	3ο	4ο
1η	1	2	1	2
2η	2	0	1	1
3η	1	2	3	0

Να βρείτε πόσες μονάδες από κάθε είδος θα κατασκευαστούν μέσα σε μια ημέρα.

Λύση

'Εστω x_1, x_2, x_3, x_4 ο αριθμός των μονάδων που παράγονται από κάθε είδος σε μια μέρα. Τότε έχουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{aligned}\right\}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$E = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right] \underset{\gamma_3 \to \gamma_3 + (-1)\gamma_1}{\overset{\gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\gamma_3 \to \frac{1}{2}\gamma_3}{\overset{\gamma_2 \to -\frac{1}{4}\gamma_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{\gamma_2 \to \gamma_2 + \left(-\frac{1}{4}\right)\gamma_3}{\overset{\gamma_1 \to \gamma_1 + (-1)\gamma_3}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \overset{\gamma_1 \to \gamma_1 + (-2)\gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

'Αρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

και αν θέσουμε $x_4 = t$ τότε έχουμε άπειρες λύσεις:

$$(x_1, x_3, x_3, x_4) = (4 - t, 2 - t, t, t)$$

με t ελεύθερο άγνωστο.

Επειδή $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$ θα είναι:

$$\left.\begin{array}{r} 4 - t \geqslant 0 \\ 2 - t \geqslant 0 \\ t \geqslant 0 \end{array}\right\}$$

άρα $0 \leqslant t \leqslant 2$.

Αν δεχτούμε ότι παράγονται μόνο ακέραιες μονάδες από κάθε είδος, τότε θα είναι $t = 0$ ή $t = 1$ ή $t = 2$ και οι λύσεις του συστήματος θα είναι:

1η λύση : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 2, 0, 0)$ για $t = 0$

2η λύση : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 1, 1, 1)$ για $t = 1$

3η λύση : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 2, 2)$ για $t = 2$