4.8. Μονοτονία Συνάρτησης

Μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές της παραγώγου είναι ο προσδιορισμός της μονοτονίας μιας συνάρτησης.

Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα (α, β), αν για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς x_1 και x_2 στο (α, β) ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$, εφόσον $x_1 < x_2$, ενώ λέγεται γνησίως φθίνουσα αν $f(x_1) > f(x_2)$, εφόσον $x_1 < x_2$. 'Εχουμε λοιπόν ότι η μονοτονία μιας συνάρτησης εκφράζει αύξηση ή μείωση στις τιμές της, καθώς αυξάνει η ανεξάρτητη μεταβλητή x.

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f με αυστηρά θετικό ρυθμό μεταβολής, καθώς αυξάνουν οι τιμές της μεταβλητής x. Είναι τότε φανερό ότι αντίστοιχα αυξάνουν και οι τιμές της f, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα αν η παράγωγός της είναι αυστηρά θετική, δηλαδή όταν $f'(x) > 0$.

Αντίστοιχα θα έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, αν η παράγωγός της είναι αυστηρά αρνητική, δηλαδή όταν $f'(x) < 0$.

Τέλος, είναι φανερό ότι αν $f'(x) = 0$ τότε η f είναι σταθερά.

Θεώρημα

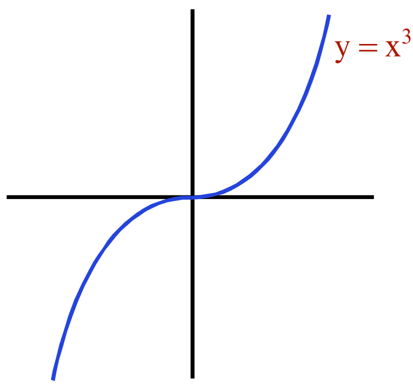
'Εστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$.

(i) Αν $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

(ii) Αν $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β).

Παρατήρηση

Απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στο ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος. Ως αντιπαράδειγμα έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$. Η f είναι γνησίως αύξουσα αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι αν $x_1 < x_2$ τότε και $x_1^3 < x_2^3$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$. 'Ομως η παράγωγος $f'(x) = 3x^2$ δεν είναι αυστηρά θετική, αφού μηδενίζεται για $x = 0$.

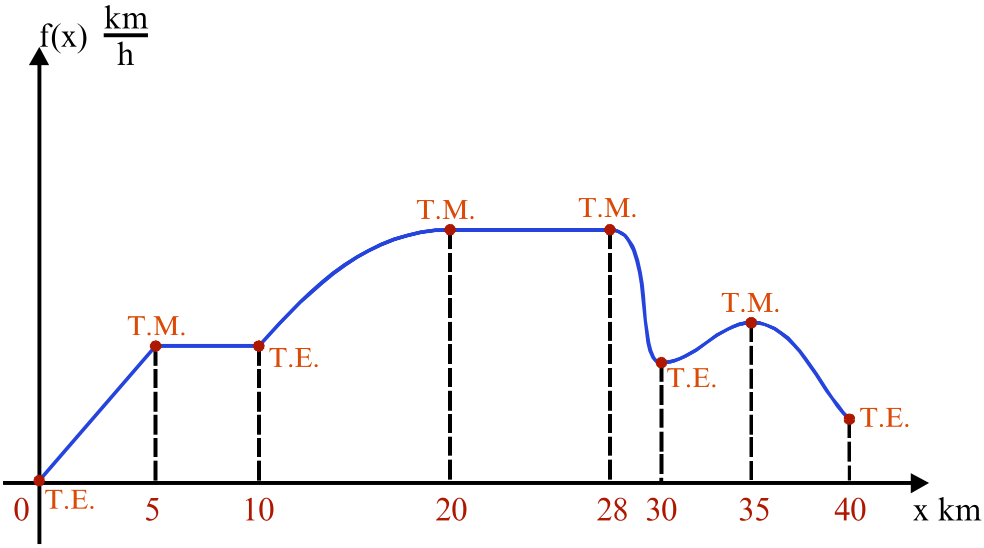


4.9. Ακρότατα Συνάρτησης

Μια δεύτερη πολύ σημαντική εφαρμογή της παραγώγου, είναι ο προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης, δηλαδή των τοπικών μεγίστων και ελαχίστων της συνάρτησης.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση ταχύτητας f ενός αθλητή που τρέχει στον μαραθώνιο στον οποίο καλύπτει συνολικά 40 km.



Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0, 5), δηλαδή ο αθλητής αυξάνει διαρκώς την ταχύτητά του κατά τα 5 πρώτα km, κατόπιν η f είναι σταθερή στο διάστημα (5, 10), δηλαδή ο αθλητής κάνει συντήρηση δυνάμεων διατηρώντας σταθερή την ταχύτητά του στο διάστημα αυτό. Ανάλογα, αυξάνει διαρκώς την ταχύτητά του στο διάστημα (10, 20) και τη διατηρεί σταθερή στο διάστημα (20, 28). Λόγω κόπωσης, η απόδοσή του πέφτει και η ταχύτητά του μειώνεται στο διάστημα (28, 30), κατόπιν όμως ξαναπροσπαθεί αυξάνοντας την ταχύτητά του στο διάστημα (30, 35). Τέλος, η ταχύτητά του είναι γνησίως φθίνουσα έως ότου τερματίσει.

Η προηγούμενη περιγραφή της μονοτονίας της συνάρτησης f δεν περικλείει τα σημεία $x_0 = 0, 5, 10, 20, 28, 30, 35, 40$. Στα σημεία αυτά έχουμε πιθανές θέσεις ακροτάτων καθώς είτε δεν ορίζεται η παράγωγος, είτε όταν ορίζεται είναι ίση με μηδέν, αφού αλλάζει η μονοτονία.

Με απλή λογική μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα στα σημεία $x_0 = 0, 10, 30, 40$ και τοπικά μέγιστα στα σημεία $x_0 = 5, 20, 28, 35$.

Ορισμός: (α) Μια συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = x_0$, αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0, τέτοιο ώστε $f(x) \leqslant f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

(β) Μια συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = x_0$, αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0, τέτοιο ώστε $f(x) \geqslant f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Επίσης, όπως είδαμε και στο παράδειγμα, ισχύει το εξής γενικό συμπέρασμα για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση:

Θεώρημα *(Fermat)*

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

- **Πιθανές Θέσεις Τοπικών Ακροτάτων Συνάρτησης**

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα και το θεώρημα Fermat, καταλήγουμε ότι υπάρχουν τρεις κατηγορίες σημείων για μια συνεχή συνάρτηση f, που μπορεί να θεωρηθούν ως πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων:

(i) Τα άκρα διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού της f.

(ii) Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος της f. Τα σημεία αυτά καλούνται γωνιακά σημεία της f.

(iii) Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία υπάρχει η παράγωγος της f και είναι ίση με μηδέν. Τα σημεία αυτά καλούνται στάσιμα σημεία της f.

Τα γωνιακά και στάσιμα σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f.

- **Μελέτη Τοπικών Ακροτάτων Συνάρτησης**

Για να καταλήξουμε ότι ένα πιθανό ακρότατο είναι τελικά ακρότατο και για να προσδιορίσουμε το είδος του (τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο) χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα δύο κριτήρια:

Κριτήριο 1ης Παραγώγου

Έστω συνεχής συνάρτηση f: (α, β)→ℝ και x_0 ένα κρίσιμο σημείο της.

(i) Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

(ii) Αν $f'(x) < 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) > 0$ στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

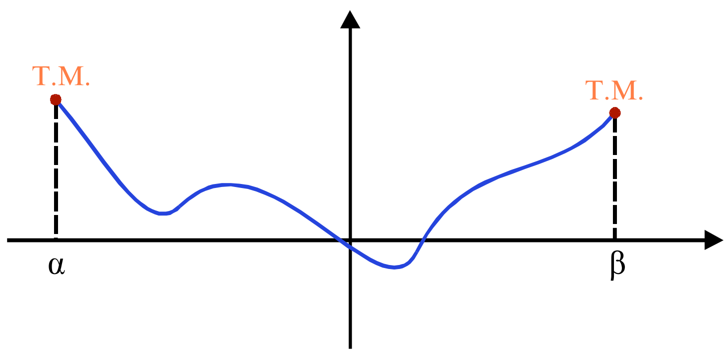
(iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(α, x_0)$ και $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Παρατήρηση

Το κριτήριο της 1ης Παραγώγου μας καλύπτει για τη μελέτη ακροτάτων στα άκρα ενός διαστήματος.

Στο παράδειγμα με το δρομέα είδαμε ότι στο $x_0 = 0$ έχουμε θέση τοπικού ελαχίστου αφού στο διάστημα (0, 5) η f είναι γνησίως αύξουσα ($f' > 0$) και στο $x_0 = 40$ έχουμε πάλι θέση τοπικού ελαχίστου αφού στο διάστημα (35, 40) η f είναι γνησίως φθίνουσα ($f' < 0$).

Αντίστοιχα, αν η f ξεκινά από αριστερό άκρο διαστήματος του πεδίου ορισμού της και είναι γνησίως φθίνουσα, τότε στο άκρο αυτό παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Αν η f καταλήγει σε δεξιό άκρο διαστήματος του πεδίου ορισμού της και είναι γνησίως αύξουσα, τότε πάλι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (βλ. Σχήμα).



Το δεύτερο κριτήριο μελέτης τοπικών ακροτάτων είναι περισσότερο εύχρηστο και χρησιμοποιείται για συναρτήσεις που είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες. Συνεπώς, με το κριτήριο αυτό μπορούμε να μελετήσουμε μόνο αν τα στάσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Κριτήριο 2ης Παραγώγου

'Εστω συνεχής συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα στάσιμο σημείο της f. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0, τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 αν $f''(x_0) < 0$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 αν $f''(x_0) > 0$.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση κέρδους P, η οποία, όπως είδαμε, δίνεται ως η διαφορά της συνάρτησης εσόδων E και της συνάρτησης κόστους K, δηλαδή:

$$P(x) = E(x) - K(x), \quad x \geqslant 0$$

όπου x είναι η ποσότητα προϊόντος που παράγεται και πωλείται.

(α) Ποιά θα είναι η μονοτονία της συνάρτησης κέρδους όταν:
  (i) Η E είναι γνησίως φθίνουσα και η K γνησίως αύξουσα.
  (ii) Η E είναι γνησίως αύξουσα και η K γνησίως φθίνουσα.

(β) Εξάγονται συμπεράσματα για τη μονοτονία της συνάρτησης κέρδους, αν οι συναρτήσεις E και K έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας;

(γ) Εξηγήστε με οικονομικούς όρους τα (α) και (β).

Λύση

(α) Είναι $P'(x) = E'(x) - K'(x)$. Επομένως:
Αν $E'(x) < 0$ και $K'(x) > 0$ θα έχουμε ότι $P'(x) < 0$, δηλαδή η συνάρτηση κέρδους θα είναι γνησίως φθίνουσα.
Αν είναι $E'(x) > 0$ και $K'(x) < 0$, τότε θα έχουμε ότι $P'(x) > 0$, δηλαδή η P θα είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Δεν εξάγονται συμπεράσματα.

(γ) Το (α) μας εκφράζει δύο απλά πράγματα:
  (i) Αν τα έσοδα φθίνουν και το κόστος αυξάνει τότε σίγουρα το κέρδος μικραίνει.
  (ii) Αν τα έσοδα αυξάνουν και το κόστος μικραίνει τότε σίγουρα το κέρδος αυξάνει.

Εφαρμογή 2

'Εστω η συνάρτηση κόστους K(x), κατασκευής x μονάδων προϊόντος και η συνάρτηση μέσου κόστους:

$$K_{\mu}(x) = \frac{K(x)}{x}, \quad x > 0$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$K'_{\mu}(x) = \frac{K'(x) - K_{\mu}(x)}{x}, \quad x > 0$$

(β) Να αποδείξετε ότι η K_{μ} είναι γνησίως φθίνουσα για όλες τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $K'(x) < K_{\mu}(x)$.

(γ) Εξηγήστε το αποτέλεσμα του (β) με οικονομικούς όρους.

Λύση

(α) 'Εχουμε ότι:

$$K'_{\mu}(x) = \frac{x\,K'(x) - K(x)}{x^2} = \frac{K'(x) - \dfrac{K(x)}{x}}{x} = \frac{K'(x) - K_{\mu}(x)}{x}$$

(β) Αν $K'(x) < K_{\mu}(x)$ τότε και $K'_{\mu}(x) < 0$, οπότε η K_{μ} είναι γνησίως φθίνουσα.

(γ) Το αποτέλεσμα του (β) εκφράζει ότι το μέσο κόστος φθίνει, αν καταφέρουμε το οριακό κόστος να διατηρεί τιμές μικρότερες του μέσου κόστους.

Εφαρμογή 3

Να εξετασθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

(α) $f_1(x) = e^x$

(β) $f_2(x) = \alpha^x,\ 0 < \alpha \neq 1$

(γ) $f_3(x) = \ln x,\ x > 0$

(δ) $f_4(x) = \log_{\alpha} x,\ x > 0$ και $0 < \alpha \neq 1$.

Λύση

(α) Είναι $f'_1(x) = e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f_1 είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

(β) Είναι $f'_2(x) = \alpha^x \ln\alpha$, οπότε αν $\alpha > 1$ η f_2 είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, ενώ αν $0 < \alpha < 1$ η f_2 είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

(γ) Είναι $f_3'(x) = \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$, οπότε η f_3 είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(δ) Είναι $f_4'(x) = \frac{1}{x\ln\alpha}$, για $x > 0$, οπότε η f_4 είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ αν $\alpha > 1$, ενώ αν $0 < \alpha < 1$ η f_4 είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Εφαρμογή 4

Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα το τριώνυμο:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \text{με } \alpha \neq 0$$

Λύση

Είναι $f'(x) = 2\alpha x + \beta = 2\alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)$. Μοναδική θέση πιθανού ακροτάτου παρουσιάζει στο στάσιμο σημείο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Αν $\alpha < 0$ έχουμε τον πίνακα τιμών:

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

οπότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Αν $\alpha > 0$ τότε ο πίνακας τιμών γίνεται:

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

και η f παρουσιάζει στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ θέση τοπικού ελαχίστου.

Σημείωση: *Αν η εφαρμογή ζητούσε μόνο τη μελέτη των ακροτάτων της f, τότε θα χρησιμοποιούσαμε απλούστερα το κριτήριο της $2^{ης}$ παραγώγου: $f''(x) = 2\alpha$, οπότε $f''\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) > 0$ αν $\alpha > 0$ και στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ έχουμε τοπικό ελάχιστο, ενώ $f''\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) < 0$ αν $\alpha < 0$, οπότε στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ έχουμε τοπικό μέγιστο.*

Εφαρμογή 5

Έστω ότι μια μεταβλητή ενός πληθυσμού x παίρνει τις τιμές x_1, x_2, …, x_ν. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων της μέτρησης:

$$(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_\nu)^2$$

γίνεται ελάχιστο στη μέση τιμή, δηλαδή όταν $x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_\nu)^2$$

Τότε έχουμε ότι:

$$f'(x) = 2[(x - x_1) + (x - x_2) + \cdots + (x - x_\nu)] = 2\nu\left(x - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu}\right)$$

Από τον πίνακα μεταβολών βρίσκουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu}$.

x	$-\infty$	$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu}$	$+\infty$
f′	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Εφαρμογή 6

Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$e^x \geqslant \kappa x^2, \text{ για κάθε } x > 0$$

Λύση

Η δοσμένη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{e^x}{x^2} \geqslant \kappa, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, η οποία έχει παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^3}(x-2)$$

Η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 2$, οπότε ισχύει ότι:

$$f(x) \geqslant f(2), \text{ για κάθε } x > 0.$$

Επομένως $\kappa = f(2) = \frac{e^2}{4}$.

Εφαρμογή 7

Να βρείτε όλα τα ζεύγη των αριθμών, που έχουν σταθερό άθροισμα c και δίνουν μέγιστο γινόμενο.

Λύση

'Εστω x, z δύο αριθμοί με σταθερό άθροισμα c, δηλαδή:

$$x + z = c \quad \text{ή} \quad z = c - x.$$

Το γινόμενό τους είναι:

$$x \cdot z = x(c - x) = -x^2 + cx.$$

Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = -x^2 + cx$. 'Εχουμε ότι:

$$f'(x) = -2x + c$$

οπότε η f έχει στάσιμο σημείο στο $x_0 = \frac{c}{2}$. Αφού $f''\left(\frac{c}{2}\right) = -2 < 0$, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{c}{2}$. Δηλαδή, τα ζεύγη ίσων αριθμών παρουσιάζουν μέγιστο γινόμενο.

Εφαρμογή 8

Ας θεωρήσουμε τη γνωστή έκφραση της κατανομής Maxwell – Boltzmann για την ταχύτητα C:

$$y = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} C^2\, e^{-\frac{mC^2}{2KT}}$$

που μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής:

$$y = f(C) = K_1 C^2 e^{-K_2 C^2}$$

Η εξίσωση αυτή αναπαριστά την κατανομή της ταχύτητας των μορίων ενός αερίου σε έναν κλειστό χώρο. Να αποδείξετε ότι παρουσιάζει μέγιστο. Το μέγιστο αυτό αντιστοιχεί στην πιο πιθανή ταχύτητα των μορίων.

Λύση

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$y' = f'(C) = 2K_1Ce^{-K_2C^2} + K_1C^2e^{-K_2C^2}(-2K_2C) \quad \text{ή}$$

$$f'(C) = 2K_1Ce^{-K_2C^2}(1 - K_2C^2)$$

Πιθανό ακρότατο παρουσιάζει στο στάσιμο σημείο $C = \dfrac{1}{\sqrt{K_2}}$.

Ας υπολογίσουμε κατόπιν τη δεύτερη παράγωγο της f:

$$f''(C) = 2K_1e^{-K_2C^2}(2K_2^2C^4 - 5K_2C^2 + 1)$$

Στο στάσιμο σημείο $C = \dfrac{1}{\sqrt{K_2}}$ ή $C^2K_2 = 1$ έχουμε ότι:

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{K_2}}\right) = -\frac{4K_1}{e} < 0$$

οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να αποδείξετε ότι η γραμμική συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι:

(α) Γνησίως αύξουσα αν $\alpha > 0$.
(β) Γνησίως φθίνουσα αν $\alpha < 0$.
(γ) Σταθερή αν $\alpha = 0$.

'Ασκηση 2

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x}$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

'Ασκηση 3

Δίνεται μια συνάρτηση $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

(ii) Υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = 0$.

Τι ισχύει για το σημείο $(\gamma, f(\gamma))$; Τι θα ισχύει αν αντί της (i) είχαμε ότι $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$;

'Ασκηση 4

Να αποδείξετε ότι η κυβική συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \ \ \alpha \neq 0$$

δεν έχει τοπικά ακρότατα αν $\beta^2 - 3\alpha\gamma \leqslant 0$.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\}$, με

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \ \ \text{όπου } \alpha, \gamma \neq 0$$

δεν έχει τοπικά ακρότατα αν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Τι συμβαίνει όταν $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$;

'Ασκηση 2

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f\colon [0, 5] \to \mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = (x - 1)^3(x - 2)^2(x - 3)$$

'Ασκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να συγκριθούν οι τιμές $f(\pi)$ και $f(e)$.

(γ) Να συγκριθούν οι αριθμοί e^{π} και π^{e}.

'Ασκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $(0, +\infty)\to\mathbb{R}$, με:

$$f(x) = \frac{x - e^x}{x + e^x} \quad \text{και} \quad g(x) = x - x\ln x$$

(i) Να αποδείξετε ότι παρουσιάζουν μέγιστο σε σημείο με κοινή τετμημένη.

(ii) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$.

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Το ύψος ενός πυραύλου (σε m) μετά από t sec πτήσης, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 8t^2 + \frac{33}{2}t + 5, \quad t \geqslant 0$$

Να εξετάσετε πότε ο πύραυλος αυτός ανεβαίνει και πότε κατεβαίνει.

'Ασκηση 2

Το πλήθος των εγκλημάτων τα τελευταία 10 χρόνια σε μία πόλη (1989 – 1999) δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 0{,}03t^3 + \frac{368{,}64}{t} \text{ δεκάδες εγκλήματα}, \quad 0 < t \leqslant 10$$

Να εξετάσετε ποια χρονιά είχαμε την ελάχιστη εγκληματικότητα.

'Ασκηση 3

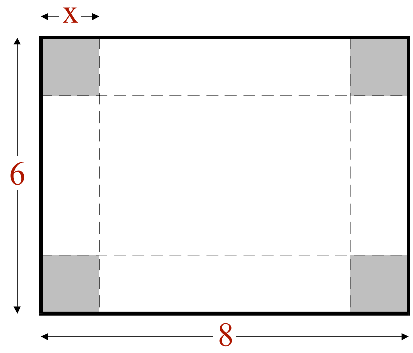
Η πιθανότητα P να βρεθεί ένα ηλεκτρόνιο σε απόσταση r από τον πυρήνα ενός ατόμου υδρογόνου δίνεται από την εξίσωση:

$$P = \frac{4r^2}{\alpha_0^3} e^{-\frac{2r}{\alpha_0}}, \text{ όπου } \alpha_0 \text{ σταθερά.}$$

Αφού βρείτε την παράγωγο του P ως προς r, υπολογίστε την τιμή του r όταν η πιθανότητα είναι μέγιστη, δηλαδή την πιο πιθανή τιμή του r.

'Ασκηση 4

Από ένα κομμάτι χαρτόνι ορθογώνιου σχήματος, με πλευρές 6 cm και 8 cm, να κατασκευασθεί ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοιχτό στο πάνω μέρος, έτσι ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό όγκο.



'Ασκηση 5

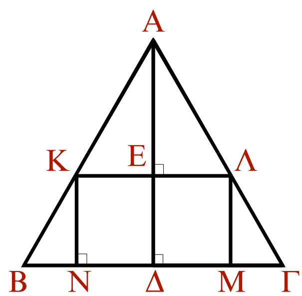
Μια τουριστική επιχείρηση οργανώνει εκδρομές με λεωφορεία. Κάθε τουριστικό λεωφορείο έχει 50 θέσεις. 'Οταν οι επιβάτες του λεωφορείου είναι ακριβώς 30, τότε η εταιρεία ζητά 5000 δρχ. κατά άτομο. Για να αυξήσει τους επιβάτες, η εταιρεία κάνει την εξής προσφορά:

«*Κάθε επιπλέον επιβάτης θα μειώνει κατά 100 δρχ. τη χρέωση κάθε άλλου επιβάτη*»

Να βρεθεί το πλήθος των επιπλέον επιβατών που πρέπει να έχει κάθε λεωφορείο, ώστε η επιχείρηση να έχει μεγιστοποιήσει τα έσοδά της.

'Ασκηση 6

Να προσδιορισθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου μέγιστου εμβαδού, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 cm, αν η μια πλευρά του ορθογωνίου περιέχεται σε μια πλευρά του τριγώνου (βλ. Σχήμα).



Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

'Ασκηση 1

Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο x_0. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x_0+h)-f^2(x_0)}{h}=2f(x_0)f'(x_0)$

(ii) $\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)f(x_0) - x_0 f(x_0+h)}{h} = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$

'Ασκηση 2

Ο όγκος V του χωρίου μεταξύ δύο ομόκεντρων σφαιρών μεγαλώνει ως προς το χρόνο. Η ακτίνα της εξωτερικής σφαίρας αυξάνει με σταθερό ρυθμό 2 m/h, ενώ η ακτίνα της εσωτερικής σφαίρας αυξάνει με σταθερό ρυθμό $\frac{1}{2}$ m/h. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου V, όταν η εξωτερική ακτίνα γίνει ίση με 3 m και η εσωτερική με 1 m.

'Ασκηση 3

Ο αριθμός βακτηρίων N(t) σε μια συγκεκριμένη καλλιέργεια μεταβάλλεται μετά τη χρήση ενός βακτηριοκτόνου ως εξής:

$$N(t) = \frac{10000}{1+t^2} + 2000$$

όπου ο χρόνος t εκφράζεται σε min. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής και το πλήθος των βακτηρίων 1 και 2 min μετά τη χρήση του βακτηριοκτόνου.

'Ασκηση 4

Στη φυσική χρησιμοποιείται ευρέως η έννοια της ειδικής θερμότητας υπό σταθερή πίεση C_P, η οποία ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της θερμότητας q ως προς τη θερμοκρασία T, δηλαδή:

$$C_P = q'(T)$$

Αν από πειραματικά δεδομένα είναι γνωστό ότι $C_P = A + BT$, όπου A, B σταθερές, να υπολογίσετε τη συνάρτηση q ως προς T. Πώς απλοποιείται η συνάρτηση αυτή αν η C_P είναι σταθερά, δηλαδή ανεξάρτητη της θερμοκρασίας;

'Ασκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$, με $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y' + y = \kappa$, όπου κ σταθερά, πολλαπλασιάζοντας με e^x και τα δύο μέλη της εξίσωσης.

(ii) $y' - y = \kappa$, όπου κ σταθερά, πολλαπλασιάζοντας με e^{-x} και τα δύο μέλη της εξίσωσης.

(iii) $y'' = y$, προσθέτοντας την y' στα δύο μέλη της εξίσωσης.

'Ασκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$, με την f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $xy' = (x + 1)y$, για $x > 0$ και $f(1) = e$.

'Ασκηση 7

Να μελετηθεί η κυβική συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \text{ με } \alpha > 0$$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, όταν $\beta^2 - 3\alpha\gamma > 0$.

'Ασκηση 8

Να βρείτε τα ζεύγη των θετικών αριθμών που έχουν σταθερό άθροισμα c και μέγιστο γινόμενο της τρίτης δύναμης του ενός και της δεύτερης του άλλου.

'Ασκηση 9

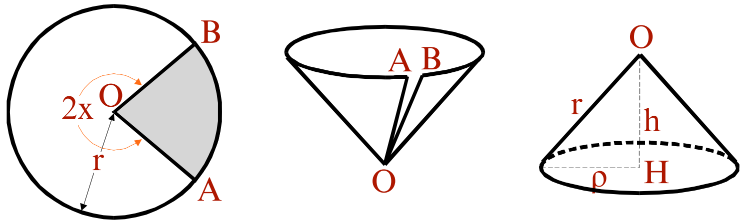
Σε δοσμένη σφαίρα:

(α) Να εγγραφεί κύλινδρος με μέγιστο όγκο.

(β) Να εγγραφεί ορθός κώνος με μέγιστο όγκο.

'Ασκηση 10

Δίνεται ένας κυκλικός χάρτινος δίσκος και θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα φίλτρο καφέ σε σχήμα κώνου, έτσι ώστε να έχει μέγιστο όγκο.



'Ασκηση 11

Οι μπογιές είναι μίγματα ενός πολυμερούς (όπως τα πλαστικά), ενός διαλύτη (όπως νερό ή αλκοόλη) και μιας χρωστικής ουσίας. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι το πολυμερές να αναμειγνύεται πλήρως με το διαλύτη. Θερμοδυναμικά, το πρόβλημα αυτό μελετάται με συναρτήσεις του λεγόμενου συντελεστή ενεργότητας α ως προς τη συγκέντρωση x. 'Ενα τέτοιο γνωστό και σήμερα κλασικό μοντέλο προτάθηκε το 1940 από τους Flory και Huggins:

$$\ln\alpha_1 = \ln(1-\varphi_2) + \left(1-\frac{1}{V}\right)\varphi_2 + \lambda\varphi_2^2$$

όπου ο δείκτης 1 αντιστοιχεί στον διαλύτη και ο δείκτης 2 στο πολυμερές, ενώ:

$$\varphi_2 = \frac{x_2V_2}{x_1V_1 + x_2V_2},\ \ V_1,\ V_2 \text{ όγκοι και } V = \frac{V_2}{V_1}$$

και λ η παράμετρος του μοντέλου που υπολογίζεται από πειραματικά δεδομένα. Η θερμοδυναμική ορίζει ότι μια υγρή φάση υπάρχει όταν $\lambda < \lambda_{\text{κρισ.}}$, όπου η κρίσιμη τιμή $\lambda_{\text{κρισ.}}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(\ln[\alpha_1(\varphi_2)])' = (\ln[\alpha_1(\varphi_2)])'' = 0.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια υγρή φάση όταν:

$$\lambda \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^2.$$

Τι συμβαίνει για πολύ μεγάλου μοριακού βάρους ($V_2 >> V_1$) πολυμερή;

Ανακεφαλαίωση

- Παράγωγος ως Ρυθμός Μεταβολής:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων:

Συνάρτηση f	**Παράγωγος f′**
c (σταθερά)	0
x	1
$x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}^*,\ x > 0$	$\alpha x^{\alpha - 1}$
ημx	συνx
συνx	−ημx
e^x	e^x
$\ln x,\ x > 0$	$\frac{1}{x}$

- Κανόνες Παραγώγισης:

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
$(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$
$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$
$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$

- Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης:

$$f''(x) = (f'(x))',\ f^{(3)}(x) = (f''(x))',\ \ldots,\ \text{κ.ο.κ.}$$

- Παράγουσα Συνάρτηση – Αντίστροφη διαδικασία Παραγώγισης:

$$F'(x) = f(x)$$

Πίνακας Παραγουσών Βασικών Συναρτήσεων

Συνάρτηση f	**Παράγουσα F**
0	c
1	$x + c$
$x^{\alpha},\ \alpha \neq -1,\ x > 0$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c$
$\dfrac{1}{x},\ x > 0$	$\ln x + c$
e^{x}	$e^{x} + c$
$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x + c$
$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x + c$
$\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2} x},\ x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$	$\varepsilon\varphi x + c$
$\dfrac{1}{\eta\mu^{2} x},\ x \neq \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$	$-\sigma\varphi x + c$

Πίνακας Παραγουσών Σύνθετων Συναρτήσεων

Συνάρτηση f	**Παράγουσα F**
$\dfrac{g'(x)}{g^{2}(x)},\ g(x) \neq 0$	$-\dfrac{1}{g(x)} + c$
$\dfrac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}},\ g(x) > 0$	$2\sqrt{g(x)} + c$
$\dfrac{g'(x)}{g(x)},\ g(x) > 0$	$\ln(g(x)) + c$
$g^{\alpha}(x)\, g'(x),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1,\ g(x) > 0$	$\dfrac{(g(x))^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c$
$e^{g(x)} \cdot g'(x)$	$e^{g(x)} + c$

- Διαφορικές Εξισώσεις:

  Περιέχουν τις παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης $y = f(x)$.

  – **Τάξη:**
  Η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου στη διαφορική εξίσωση.

  – **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:**
  Η διαφορική εξίσωση και μια ή περισσότερες αρχικές τιμές για τη συνάρτηση.

- Μονοτονία Συνάρτησης:

  – Αν $f' > 0$ τότε f γνησίως αύξουσα.
  – Αν $f' < 0$ τότε f γνησίως φθίνουσα.

- Πιθανές θέσεις Ακροτάτων:

  – 'Ακρα Διαστήματος.
  – Γωνιακά σημεία
  – Στάσιμα σημεία

  $\left.\begin{array}{l}\text{– Γωνιακά σημεία}\\ \text{– Στάσιμα σημεία}\end{array}\right\}$ Κρίσιμα σημεία.

- Μελέτη Ακροτάτων:

  – **Κριτήριο 1ης Παραγώγου:**
  Μεταβολή προσήμου f' αριστερά και δεξιά του ακροτάτου.

  – **Κριτήριο 2ης Παραγώγου** (Μόνο για στάσ. σημείο $f'(x_0) = 0$):

  ◆ Αν $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ Τοπικό Μέγιστο
  ◆ Αν $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ Τοπικό Ελάχιστο

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Τι σημαίνει ρυθμός μεταβολής μεγέθους και πώς συνδέεται με την έννοια της παραγώγου;
2. Συμπληρώστε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι σωστοί (Σ) ή λανθασμένοι (Λ) και αιτιολογήστε την απάντησή σας:

– Αν f συνεχής στο x_0 τότε υπάρχει το $f'(x_0)$. Σ Λ

– Αν f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0. Σ Λ

– Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν υπάρχει το $f'(x_0)$. Σ Λ

– Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε δεν είναι συνεχής στο x_0. Σ Λ

3. Πότε μια συνάρτηση έχει παράγωγο σε ανοιχτό και πότε σε κλειστό διάστημα;
4. Ποιούς τύπους συναρτήσεων καλύπτει η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^{\alpha}$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $x > 0$;
5. Ποιός είναι ο κανόνας της αλυσίδας;
6. Τι απαιτείται για να ορίζεται η τέταρτη παράγωγος μιας συνάρτησης;
7. Πώς ορίζεται το μέσο κόστος ενός προϊόντος και ποιά η σχέση του με το οριακό κόστος;
8. Ποιά είναι η παράγουσα συνάρτηση και ποιά διαδικασία εκφράζει;
9. Πού συναντάμε διαφορικές εξισώσεις;
10. Τι ονομάζεται πρόβλημα αρχικών τιμών;
11. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα έχει πάντα αυστηρά αρνητική παράγωγο;
12. Ο ορισμός της μονοτονίας μιας συνάρτησης ισχύει για συναρτήσεις οι οποίες απαιτούμε να είναι:

(α) Συνεχείς (β) Παραγωγίσιμες

(γ) Δύο φορές Παραγωγίσιμες (δ) Τίποτε από τα παραπάνω

Κυκλώστε και αιτιολογήστε τη σωστή απάντηση.

13. Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης μηδενίζεται σε μερικά σημεία, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή;

14. Τι απαιτήσεις έχει για μια συνάρτηση ο ορισμός των τοπικών ακροτάτων της;
15. Διατυπώστε το θεώρημα του Fermat. Πώς προκύπτουν με βάση το θεώρημα αυτό, οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης;
16. Ποιά σημεία λέγονται γωνιακά;
17. Ποιά σημεία λέγονται στάσιμα;
18. Ποιά σημεία λέγονται κρίσιμα;
19. Να διατυπώσετε το κριτήριο ή τα κριτήρια με τα οποία εξασφαλίζουμε ότι είναι ακρότατα:
    (α) τα άκρα διαστήματος.
    (β) τα γωνιακά σημεία.
    (γ) τα στάσιμα σημεία.