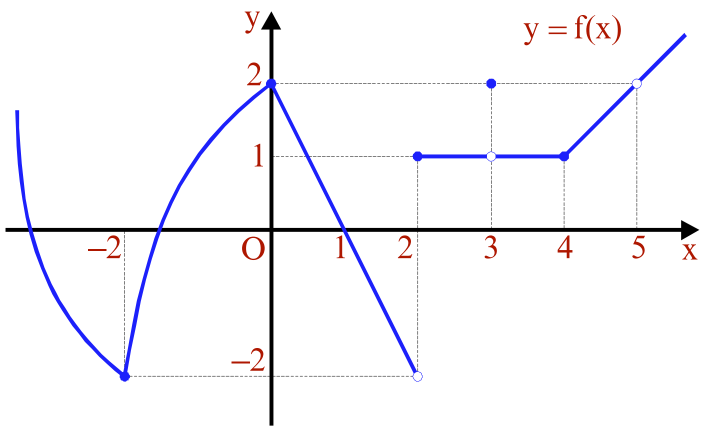
3 'Οριο – Συνέχεια Συνάρτησης

§ 3.1 – 3.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα να εκτιμήσετε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αν φυσικά υπάρχει, για $x_0 = -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -2$

(β) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

(γ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

(δ) Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

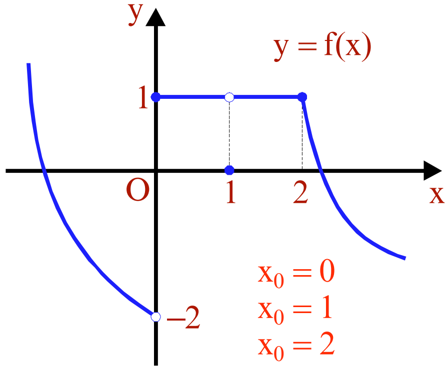
(ε) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$

(στ) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 1$

(ζ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 2$

'Ασκηση 2

Χρησιμοποιήστε την παρακάτω γραφική παράσταση για να εκτιμήσετε (υπολογίσετε) τα $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ στα δοσμένα σημεία.



Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -2$

Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

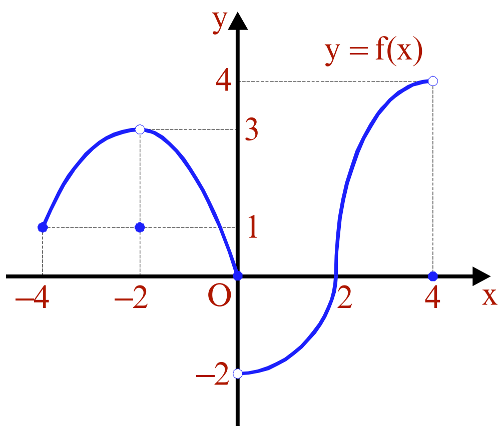
(β) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$.

(γ) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

'Ασκηση 3

Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού [–4, 4] και γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λάθος (Λ). Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



(α) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = 1$

(β) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 3$

(γ) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

(ε) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

(στ) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 4$

(ζ) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0$

Λύση

(α) Σωστό (Σ)
(β) Σωστό (Σ)
(γ) Σωστό (Σ)
(δ) Λάθος (Λ)
(ε) Σωστό (Σ)
(στ) Σωστό (Σ)
(ζ) Λάθος (Λ)

'Ασκηση 4

Αφού χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \quad x \leqslant 0 \\ x-1 & , \quad 0<x<1 \\ 2-x & , \quad 1 \leqslant x \end{cases}$$

να εκτιμήσετε τα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, αν αυτά υπάρχουν. Επίσης, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές f(0), f(1).

Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

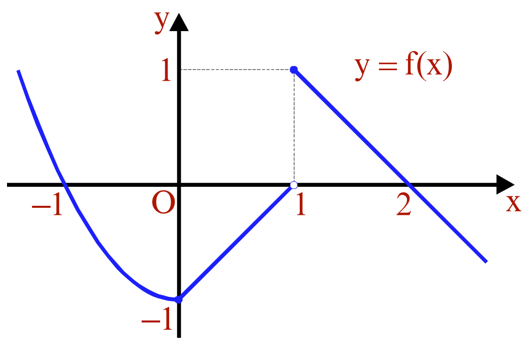
(β) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$

(γ) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$

(δ) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

'Αρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

(ε) $f(0) = -1$ και $f(1) = 1$



'Ασκηση 5

Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f. Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f, αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = x^2 - 1$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
f(x)						

(β) $f(x) = \frac{|x|}{x} + 1, \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

x	0,1	0,01	0,001	–0,001	–0,01	–0,1
f(x)	2					0

(γ) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

x	–0,1	–0,01	–0,001	0,001	0,01	0,1
f(x)		0,5012				0,4880

(δ) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & , \quad x > 1 \\ -x^2 + 1 & , \quad x \leqslant 1 \end{cases}, \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)						

Λύση

(α)

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
f(x)	2,6100	2,9601	2,9960	3,0040	3,0401	3,4100

Φαίνεται από τις τιμές ότι η f προσεγγίζει τον αριθμό 3 καθώς το x προσεγγίζει το 2. 'Αρα $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$.

(β)

x	0,1	0,01	0,001	–0,001	–0,01	–0,1
f(x)	2	2	2	0	0	0

Καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό 0 παίρνοντας θετικές τιμές, οι τιμές της f είναι σταθερές και ίσες με 2.

'Οταν το x προσεγγίζει τον αριθμό 0 παίρνοντας αρνητικές τιμές, οι τιμές της f είναι σταθερές και ίσες με 0.

'Αρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

(γ)

x	–0,1	–0,01	–0,001	0,001	0,01	0,1
f(x)	0,5132	0,5012	0,5001	0,4999	0,4988	0,4880

Η f προσεγγίζει τον αριθμό $\frac{1}{2}$ καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό 0. 'Αρα $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

(δ)

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
f(x)	0,1900	0,0199	0,0020	0,4998	0,4975	0,4762

Καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό 1 από μικρότερες τιμές η συνάρτηση f προσεγγίζει τον αριθμό 0. 'Οταν όμως το x προσεγγίζει τον αριθμό 1 από μεγαλύτερες τιμές οι τιμές της συνάρτησης προσεγγίζουν τον αριθμό $\frac{1}{2}$. 'Αρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

'Ασκηση 6

Αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 5$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 4$ υπολογίστε τα παρακάτω:

(α) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)]$

(β) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{10g(x)}{f(x)}$

(γ) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2f(x)+5g(x)}{f(x)\cdot g(x)}$

(δ) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)+5g(x)}$

(ε) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{\dfrac{1}{2g(x)}}$

(στ) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)+\sqrt{g(x)}}$

Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 5\cdot 4 = 20$

(β) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{10g(x)}{f(x)} = \dfrac{10\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \dfrac{10\cdot 4}{5} = 8$

(γ) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2f(x)+5g(x)}{f(x)\cdot g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}[2f(x)+5g(x)]}{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]} = \dfrac{2\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+5\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{3}{2}$

(δ) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)+5g(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+5g(x)]} = \sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+5\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} =$
$\sqrt{25} = 5$

(ε) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{\dfrac{1}{2g(x)}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{2g(x)}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$

(στ) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)+\sqrt{g(x)}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}} = \dfrac{5-4}{5+2} = \dfrac{1}{7}$

'Ασκηση 7

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, καθένα από τα παρακάτω όρια, εφαρμόζοντας σε κάθε περίπτωση τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων:

(α) $\lim\limits_{x\to 2}(x^{-3}-3x^{-2}+5x^3)$ (β) $\lim\limits_{x\to 2}[(1-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})]$

(γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+4}{x^2-3x+4}$ (δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x+1}$

Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^3}-3\dfrac{1}{x^2}+5x^3\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^3}-3\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2}+5\lim\limits_{x\to 2}x^3=\dfrac{1}{8}-3\dfrac{1}{4}+5\cdot 8=\dfrac{315}{8}$

(β) Είναι $\lim\limits_{x\to 2}(1-\sqrt{x})=1-\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to 2}(3+\sqrt{x})=3+\sqrt{2}$.

'Αρα υπάρχει το όριο του γινομένου:

$\lim\limits_{x\to 2}[(1-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})]=(1-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=1-2\sqrt{2}$

(γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 1}(2x+4)=6$, $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+4)=2$.

'Αρα υπάρχει το όριο του πηλίκου:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+4}{x^2-3x+4}=\dfrac{6}{2}=3$

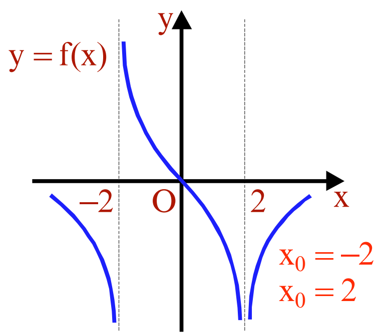
(δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})=0$, $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$.

'Αρα υπάρχει το όριο του πηλίκου:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x+1}=\dfrac{0}{1}=0$

'Ασκηση 8

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης f. Να εκτιμήσετε (μαντέψετε) τα $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.



Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

(β) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$

'Ασκηση 9

Σε ποιές από τις προηγούμενες περιπτώσεις της άσκησης 8 παρουσιάζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f; Ποιά είναι η εξίσωση της ασύμπτωτης, όπου υπάρχει αυτή;

Λύση

Και στις δύο:

(α) $x = -2$

(β) $x = 2$

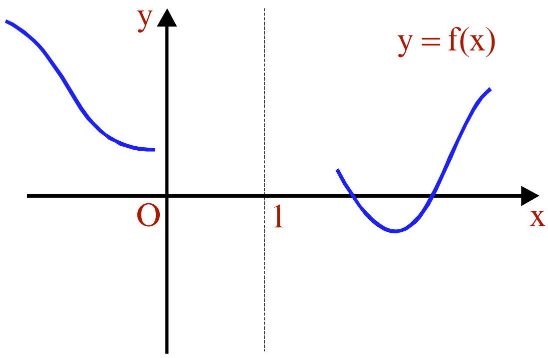
'Ασκηση 10

Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διπλανό σχήμα, ώστε να ισχύει:

(α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

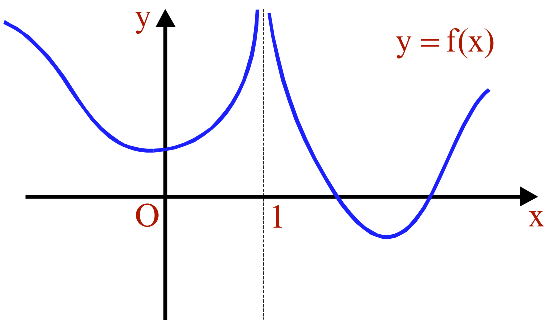
(β) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

(γ) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} = +\infty$

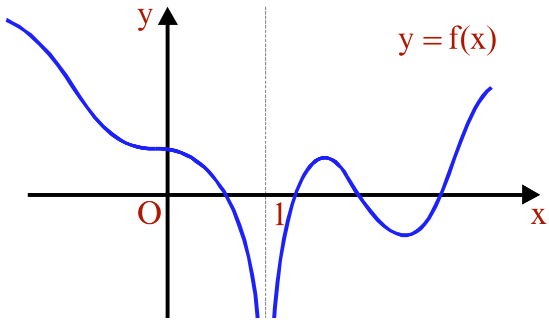


Λύση

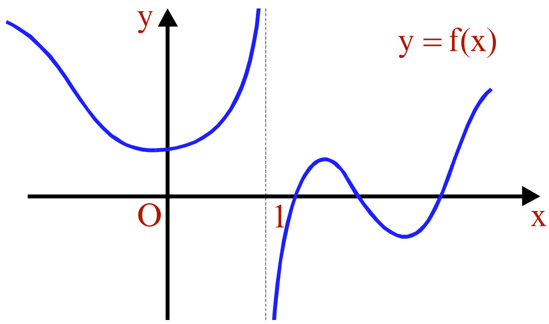
(α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$. 'Αρα μια εικόνα της f θα μπορούσε να ήταν:



(β) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. 'Αρα μια εικόνα της f θα μπορούσε να ήταν:



(γ) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. 'Αρα μια εικόνα της f θα μπορούσε να ήταν:



'Ασκηση 11

Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f. Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f, αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = -\dfrac{10}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

x	–0,1	–0,01	–0,001	0,001	0,01	0,1
f(x)	–100		–10000		–1000	

(β) $f(x) = \dfrac{x+10}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
f(x)	–119			12001		

Λύση

(α)

x	–0,1	–0,01	–0,001	0,001	0,01	0,1
f(x)	–100	–1000	–10000	–10000	–1000	–100

Καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό 0 οι τιμές της συνάρτησης γίνονται όλο και περισσότερο μικρότερες άρα προσεγγίζουν το $-\infty$ ($\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$).

(β)

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
f(x)	–119	–1199	–11999	12001	1201	121

Καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό 2 από μικρότερες τιμές (αριστερά του 2) οι τιμές της συνάρτησης είναι αρνητικές και γίνονται όλο και περισσότερο μικρότερες, δηλαδή προσεγγίζουν το $-\infty$ ($\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$).

'Οταν όμως το x προσεγγίζει τον αριθμό 2 από μεγαλύτερες τιμές (δεξιά του 2) οι τιμές της συνάρτησης είναι θετικές και γίνονται όλο και περισσότερο μεγαλύτερες, δηλαδή προσεγγίζουν το $+\infty$ ($\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$).

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

(α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ (β) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}$

Λύση

(α) Είναι $\lim\limits_{x\to 2} (x^3 - 8) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2} (x - 2) = 0$. 'Αρα έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\dfrac{0}{0}$.

'Εστω $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \dfrac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2^2)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$.

(β) 'Ομοια, έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

'Εστω $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x^2-2x} = \dfrac{x-1}{x(x^2+x-2)} = \dfrac{x-1}{x(x-1)(x+2)} = \dfrac{1}{x(x+2)}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x(x+2)} = \dfrac{1}{3}$.

'Ασκηση 2

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

(α) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{2-\sqrt{x}}$

(β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

(γ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

Λύση

(α) Είναι $\lim\limits_{x\to 4}(x-4) = 0$, $\lim\limits_{x\to 4}(2-\sqrt{x}) = 0$. 'Αρα έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

'Εστω $f(x) = \dfrac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \dfrac{(x-4)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = \dfrac{(x-4)(2+\sqrt{x})}{4-x} = -(2+\sqrt{x})$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -\lim\limits_{x\to 4}(2+\sqrt{x}) = -4$.

(β) 'Ομοια, έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

'Εστω $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \dfrac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} =$

$\dfrac{(x+2)-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \dfrac{x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

(γ) 'Ομοια, έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

'Εστω $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \dfrac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)} =$

$$= \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}.$$

Τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}+3}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \dfrac{6}{4\cdot 4} = \dfrac{3}{8}$.

(δ) 'Ομοια, έχουμε απροσδιοριστία μορφής $\frac{0}{0}$.

'Εστω $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \dfrac{(\sqrt[3]{x+1}-1)[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1]}{x[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1]} =$

$$\frac{x}{x[(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1]} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}.$$

Τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1} = \dfrac{1}{3}$.

'Ασκηση 3

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν:

(α) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|2x+1|-3}{x-3}$ (β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+|x|}{(x+1)|x|}$

Λύση

(α) Αφού $x\to 1$ τότε το x βρίσκεται σε μια περιοχή του 1, $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Τότε $|2x+1| = 2x+1$, αφού $2x+1 > 0$.

Αν $f(x) = \dfrac{|2x+1|-3}{x-3} = \dfrac{2x+1-3}{x-3} = \dfrac{2x-2}{x-3}$ τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

(β) Αφού $x\to 0$ τότε το x βρίσκεται σε μια περιοχή του 0, $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Τότε $|x| = x$ αν $x \in (0, 1)$ ή $|x| = -x$ αν $x \in (-1, 0)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x \in (0, 1)$ έστω $f(x) = \dfrac{2x^2+|x|}{(x+1)|x|} = \dfrac{2x^2+x}{(x+1)x} = \dfrac{(2x+1)x}{(x+1)x} = \dfrac{2x+1}{x+1}$.
  Τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
- Αν $x \in (-1, 0)$ έστω $f(x) = \dfrac{2x^2+|x|}{(x+1)|x|} = \dfrac{2x^2-x}{(x+1)(-x)} = \dfrac{(2x-1)x}{-(x+1)x} =$
  $-\dfrac{2x-1}{x+1}$. Τότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

'Ασκηση 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| + 2 & , \quad x \leqslant \alpha \\ x^2 - 1 & , \quad x > \alpha \end{cases}$$

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x) = 2|\alpha| + 2$, $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = \alpha^2 - 1$.

Αφού υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα. 'Αρα:

$2|\alpha| + 2 = \alpha^2 - 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2|\alpha| - 3 = 0 \overset{\alpha^2 = |\alpha|^2}{\Longleftrightarrow} |\alpha|^2 - 2|\alpha| - 3 = 0$ απ' όπου $|\alpha| = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 3}$ ή $\boldsymbol{\alpha = -3}$.

'Ασκηση 5

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - \alpha & , \quad x \leqslant 0 \\ x^2 + \alpha + 2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

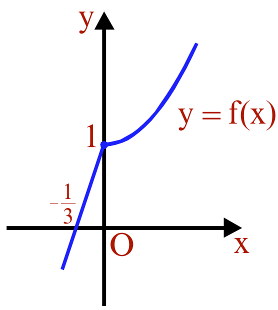
Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Κατόπιν να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\alpha$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \alpha + 2$.

Αφού υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ πρέπει τα πλευρικά όρια να είναι ίσα. 'Αρα $-\alpha = \alpha + 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = -1}$.

Τότε $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & , \quad x \leqslant 0 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



'Ασκηση 6

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, καθένα από τα παρακάτω όρια, εφαρμόζοντας σε κάθε περίπτωση τις κατάλληλες ιδιότητες των ορίων:

(α) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$ (β) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{(x+1)^3}$

(γ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}$ (δ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x^3+2x}$

(ε) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{|1-x|}$ (στ) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+4}{x^3-3x-2}$

Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{3}{\sqrt{x-4}} = +\infty$

(β) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{(x+1)^3} = -\infty$

(γ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-1}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x^3+2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{x(x^2+2)}$

Για $x > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1}{x(x^2+1)} = +\infty$ και για $x < 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+1}{x(x^2+1)} = -\infty$.

'Αρα δεν υπάρχει όριο όταν $x\to 0$.

(ε) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{|1-x|} = +\infty$

(στ) Δε γνωρίζουμε το πρόσημο του παρονομαστή ο οποίος τείνει στο 0. 'Εχουμε $x^3-3x-2 = (x+1)^2(x-2)$.

(Η παραγοντοποίηση μπορεί να προκύψει με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή κατά ομάδες: $x^3 - x - 2x - 2 = x(x^2-1) - 2(x+1)$ κ.λπ.)

'Αρα $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+4}{(x+1)^2(x-2)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{(x+1)^2} \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+4}{x-2} = (+\infty)(-1) = -\infty$.

'Ασκηση 7

Βρείτε τις περιπτώσεις όπου υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και γράψτε την εξίσωσή της στις συναρτήσεις της άσκησης 6.

Λύση

(α) $x = 4$ (β) $x = -1$ (γ) $x = 1$

(δ) $x = 0$ (ε) $x = 1$ (στ) $x = -1$

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Τα τέλη αποστολής μεμονωμένων δεμάτων όταν πρόκειται για δέματα εσωτερικού που αποστέλλονται από τα Ελληνικά Ταχυδρομεία δίνονται από το γράφημα της "ταχυδρομικής συνάρτησης":

$$f(x) = \begin{cases} 450 & 0 < x \leqslant 1 \\ 550 & 1 < x \leqslant 3 \\ 700 & 3 < x \leqslant 5 \\ 850 & 5 < x \leqslant 7 \\ 1050 & 7 < x \leqslant 9 \end{cases}$$

όπου x είναι το βάρος ενός πακέτου σε Kgr (κιλά) και f(x) η αξία σε δραχμές.

(α) Να φτιάξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε σύστημα αξόνων xOy όπου στον άξονα Ox η κλίμακα είναι 1 cm για κάθε κιλό και στο 0y η κλίμακα είναι 1 cm για κάθε εκατοντάδα δρχ.

(β) Να βρείτε τις τιμές f(1), f(3), f(5) και να τις συγκρίνετε με τα $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$.

(γ) Υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$;

Λύση

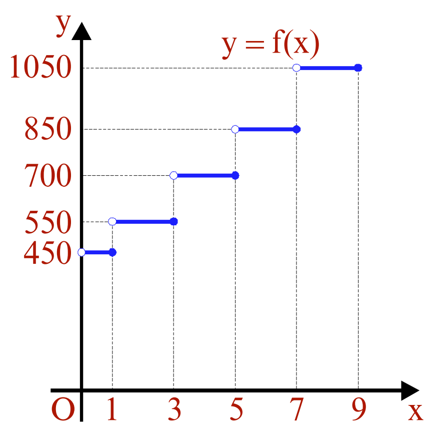
(α) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

(β) $f(1) = 450 \qquad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 450$

$f(3) = 550 \qquad \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 550$

$f(5) = 700 \qquad \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 700$

(γ) Δεν υπάρχουν αφού τα δεξιόπλευρα όρια είναι διαφορετικά από τα αριστερόπλευρα.



'Ασκηση 2

Ο πληθυσμός ενός συγκεκριμένου είδους τρωκτικών που αναπαράγονται σ' ένα απομονωμένο νησί δίνεται από τη συνάρτηση $P(t) = \frac{720}{9-t}$, $0 \leqslant t < 9$ όπου ο χρόνος t μετριέται σε μήνες.

(α) Βρείτε τον αριθμό των τρωκτικών στο νησί σε χρόνο $t = 0$, δηλαδή από τότε που αρχίζουμε να παρατηρούμε την αναπαραγωγή τους. Τι εκφράζει αυτός ο αριθμός;

(β) Βρείτε τον αριθμό των τρωκτικών μετά 1, 3, 5, 8 μήνες.

(γ) Δείξτε ότι ο πληθυσμός των τρωκτικών αυξάνεται απεριόριστα καθώς ο χρόνος πλησιάζει στους 9 μήνες.

Λύση

(α) Για $t = 0$ έχουμε $P(0) = \frac{720}{9} = 80$ που σημαίνει ότι όταν αρχίζουμε την παρατήρηση της αναπαραγωγής τα τρωκτικά είναι 80.

(β)

t	1	3	5	8
P(t)	90	120	180	720

(γ) $\lim\limits_{t\to 9} P(t) = \lim\limits_{t\to 9^-} \frac{720}{9-t} = 720 \lim\limits_{t\to 9^-} \frac{1}{9-t} = 720(+\infty) = +\infty$

που σημαίνει ότι ο αριθμός των τρωκτικών αυξάνεται πάρα πολύ.

'Ασκηση 3

Στην περιβαλλοντική επιστήμη συχνά μελετάμε τη διασπορά διαφόρων ρύπων σε οικοσυστήματα. Αρκετά απ' αυτά τα μοντέλα είναι μοντέλα "άπειρης αραίωσης" όπως π.χ. ίχνη SO_2 στην ατμόσφαιρα. Για να μελετήσουμε τη διασπορά αυτή χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συνάρτηση (συντελεστής ενεργότητας α) της συγκέντρωσης x_1, x_2 των συστατικών ρύπου – ατμόσφαιρας αντίστοιχα:

$$\ln\alpha = \ln\frac{\varphi_1}{x_1} + 1 - \frac{\varphi_1}{x_1}$$

όπου $\varphi_1 = \frac{x_1 V_1}{x_1 V_1 + x_2 V_2}$ και V_1, V_2 ο όγκος των δύο συστατικών, δηλαδή του ρύπου και της ατμόσφαιρας αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή α σε άπειρη αραίωση, δηλαδή το $\lim\limits_{x_1\to 0} (\ln\alpha)$, αν γνωρίζετε ότι $x_1 + x_2 = 1$.

Λύση

'Εχουμε $x_1 + x_2 = 1$, άρα όταν $x_1 \to 0$ τότε $x_2 \to 1$. Οπότε:

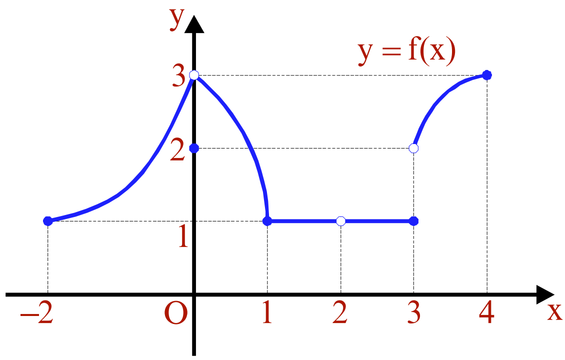
$$\lim_{x_1 \to 0} (\ln\alpha) = \lim_{x_1 \to 0} \left(\ln \frac{V_1}{x_1V_1 + x_2V_2} + 1 - \frac{V_1}{x_1V_1 + x_2V_2} \right) = \ln \frac{V_1}{V_2} + 1 - \frac{V_1}{V_2}$$

§ 3.6 – 3.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης f, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Λύση

Παρατηρήστε ότι η f ορίζεται στο διάστημα $[-2, 2) \cup (2, 4]$.

(α) Στο $x_0 = -2$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 1$ και $f(-2) = 1$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.

(β) Στο $x_1 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$ και $f(0) = 2$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_1 = 0$.

(γ) Στο $x_2 = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ και $f(1) = 1$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_2 = 1$.

(δ) Στο $x_3 = 2$ δεν ορίζεται η f, άρα δεν έχει έννοια να αναφερόμαστε σε συνέχεια.

(ε) Στο $x_4 = 3$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$ και $f(3) = 1$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_4 = 3$, είναι απλά συνεχής αριστερά του $x_4 = 3$.

(στ) Στο $x_5 = 4$, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 3$ και $f(4) = 3$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_5 = 4$.

'Ασκηση 2

Στις επόμενες συναρτήσεις να ελέγξετε τη συνέχεια στην τιμή του x που αλλάζει τύπο η συνάρτηση. Σε κάθε σημείο ασυνέχειας να σημειώσετε **ποιές προϋποθέσεις** του ορισμού συνέχειας παραβιάζονται.

(α) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & , \quad x \leqslant 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \end{cases}$

(β) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & , \quad x \geqslant 1 \\ 2 + \sqrt{x} & , \quad 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$

(γ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & , \quad x \neq -1 \\ 1 & , \quad x = -1 \end{cases}$

(δ) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 2 \\ \dfrac{1}{|x - 2|} & , \quad x \neq 2 \end{cases}$

Λύση

(α) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ και $f(1) = 0$. 'Αρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

(β) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ και $f(1) = 2$. 'Αρα η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$ γιατί τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

(γ) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} (x - 1) = -2$ και $f(-1) = 1$. 'Αρα η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = -1$ γιατί παρόλο που υπάρχει το $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$ δεν ισούται με την αριθμητική τιμή $f(-1) = 1$.

(δ) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{|x - 2|} = +\infty$. 'Αρα η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 2$ αφού δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \in \mathbb{R}$.

'Ασκηση 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad 0 < x < 2 \\ x^3 - 3 & , \quad 2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

(α) Υπάρχουν τα όρια της f στα σημεία με τετμημένη $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ και $x_2 = 5$;

(β) Σε ποιά από τα προηγούμενα σημεία είναι συνεχής η f;

Λύση

(α)
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 1) = 2$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 + 1) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^3 - 3) = 5 \end{array}\right\}$ άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$
- $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} (x^3 - 3) = 122.$

  Εδώ η συνάρτηση ορίζεται μόνο αριστερά του 5 και επομένως έχει έννοια η αναζήτηση του ορίου μόνο όταν $x < 5$.

(β)
- $f(1) = 2$ Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
- $f(2) = 5$ Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.
- $f(5) = 122$ Επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

'Ασκηση 4

Να ελέγξετε αν είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους οι επόμενες συναρτήσεις. Για αυτές που δεν είναι να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας.

(α) $f(x) = 5x^2 - x + 4$

(β) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

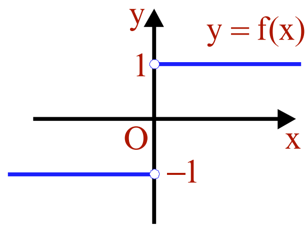
(γ) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$

(δ) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & , \quad x < 0 \\ e^x & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

Λύση

(α) Είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

(β) Είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών.



(γ) Είναι συνεχής για κάθε $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών.

Σχόλιο: *'Αλλο συνεχείς γραμμές και άλλο συνεχείς συναρτήσεις. Προσοχή!! Πολλά εξαρτώνται από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.*

(δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x+1) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$. 'Αρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ και $f(0) = 1$, επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x_0 = 0}$.

- 'Οταν $x < 0$ η $f(x) = -x + 1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
- 'Οταν $x > 0$ η $f(x) = e^x$ είναι συνεχής ως εκθετική.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Βρείτε τις τιμές του α που κάνουν την f συνεχή στο σημείο που αλλάζει ο τύπος της.

(α) $f(x) = \begin{cases} x - 3 & , \quad x \leqslant 1 \\ \alpha x^2 - \alpha^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$ (β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & , \quad x \neq -2 \\ \alpha & , \quad x = -2 \end{cases}$

Λύση

(α) Θέλουμε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. 'Αρα:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -2 = \alpha - \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$.

'Αρα $\boldsymbol{\alpha = -1}$ ή $\boldsymbol{\alpha = 2}$.

(β) 'Ομοια, πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x_0 = -2$. 'Αρα:

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -2}(x-2) = \alpha$. 'Αρα $\boldsymbol{\alpha = -4}$.

'Ασκηση 2

Να δικαιολογήσετε γιατί οι επόμενες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

(α) $f(x) = \eta\mu \dfrac{1}{x^2}$ (β) $f(x) = e^{x^2-1}$

Λύση

(α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y = \eta\mu x$ και $y = \frac{1}{x^2}$.

(β) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y = e^x$ και $y = x^2 - 1$.

'Ασκηση 3

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$ είναι ορισμένη για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και σ' αυτό το σύνολο είναι συνεχής. Μπορείτε να την ορίσετε κατάλληλα στο σημείο $x_0 = 0$ ώστε να είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$;

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι $f(0) = \alpha \in \mathbb{R}$. Για να είναι συνεχής η f σε όλο το $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. 'Αρα:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2x + x^2}{x} = \alpha \Leftrightarrow$$
$$\lim_{x\to 0} (2 + x) = \alpha \Leftrightarrow \mathbf{2 = \alpha}$$

'Αρα η f γράφεται $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \end{cases}$

'Ασκηση 4

Θεωρούμε στο $\mathbb{R}$ τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

(α) Υπολογίστε την τιμή f(1) και μετά παραγοντοποιήστε τη διαφορά $f(x) - f(1)$.

(β) Υπολογίστε το $\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, αν βέβαια αυτό υπάρχει.

(γ) Αν πάρουμε τιμές του x πολύ κοντά στο 1, όπως:

$$x \in (1 - \frac{1}{10}, 1) \cup (1, 1 + \frac{1}{10}) \quad \text{ή αλλιώς} \quad \frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}, \ x \neq 1$$

τότε να αποδείξετε ότι $|f(x) - f(1)| < \frac{12}{100}$.

Λύση

(α) $f(1) = 2 - 5 - 3 = -6$,
$f(x) - f(1) = 2x^2 - 5x - 3 + 6 = 2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$

(β) $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{(x - 1)(2x - 3)}{x - 1} = 2x - 3$, άρα $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$.

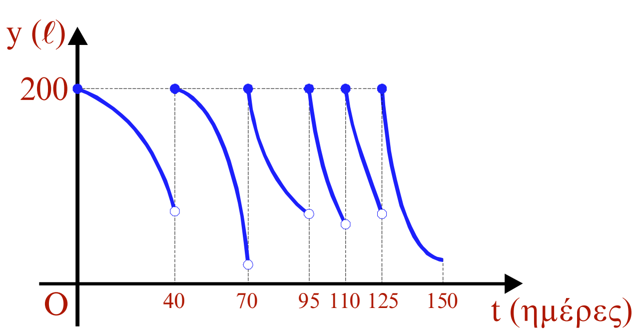
(γ) Είναι $|f(x) - f(1)| = |(x - 1)(2x - 3)| = |x - 1| \cdot |2x - 3|$ (1)
'Ομως $\dfrac{9}{10} < x < \dfrac{11}{10} \Leftrightarrow \dfrac{9}{10} - 1 < x - 1 < \dfrac{11}{10} - 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{10} < x - 1 < \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow$
$|x - 1| < \dfrac{1}{10}$ (2)
Επίσης $\dfrac{9}{10} < x < \dfrac{11}{10} \Leftrightarrow \dfrac{18}{10} < 2x < \dfrac{22}{10} \Leftrightarrow \dfrac{18}{10} - 3 < 2x - 3 < \dfrac{22}{10} - 3 \Leftrightarrow$
$-\dfrac{12}{10} < 2x - 3 < -\dfrac{8}{10}$ και επειδή είναι αρνητικοί και οι τρεις όροι της ανισότητας, αν αλλάξουμε πρόσημα (πολλαπλασιάσουμε επί -1), αλλάζει και η φορά της ανισότητας. 'Αρα $\dfrac{12}{10} > |2x - 3| > \dfrac{8}{10}$, επομένως $|2x - 3| < \dfrac{12}{10}$ (3)
Αν χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες (2) και (3) στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$|f(x) - f(1)| = |x - 1| \cdot |2x - 3| < \frac{1}{10} \cdot \frac{12}{10} = \frac{12}{100}$$

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1 (Πρόβλημα Κατανάλωσης)

Η διπλανή γραφική παράσταση δείχνει την ποσότητα πετρελαίου θέρμανσης σε μια δεξαμενή 200 λίτρων (ℓ) που υπάρχει σε μια πολυκατοικία για μια περίοδο 150 ημερών. Αν θεωρήσουμε ότι t = 0 αντιστοιχεί στην αρχή Νοεμβρίου.



(α) Δώστε μια ερμηνεία στη γραφική παράσταση.

(β) Εξηγείστε γιατί η συνάρτηση είναι ασυνεχής στις θέσεις $t = 40$, $t = 70$, $t = 95$, $t = 110$, $t = 125$.

(γ) Ποιός μήνας νομίζετε ότι ήταν περισσότερο κρύος;

Λύση

(α) Η γραφική παράσταση δίνει πληροφορίες για την ποσότητα πετρελαίου που υπάρχει στη δεξαμενή των 200 ℓ για 150 ημέρες. Αφού υποθέσαμε ότι ο χρόνος $t = 0$ αντιστοιχεί στην αρχή Νοεμβρίου, τότε η γραφική παράσταση παρουσιάζει την ποσότητα του πετρελαίου μέχρι τέλος Μαρτίου περίπου.

(β) Απλά σ' εκείνες τις χρονικές στιγμές ο διαχειριστής γεμίζει τη δεξαμενή με πετρέλαιο.

(γ) Από την 95η ημέρα μέχρι την 110η, δηλαδή σε 15 ημέρες, χρειάσθηκε να ξαναγεμίσει η δεξαμενή με πετρέλαιο, άρα από 3 έως 18 Φεβρουαρίου ο καιρός ήταν περισσότερο κρύος. Αντίστοιχα βλέπουμε το ίδιο φαινόμενο από την 110η έως την 125η ημέρα, δηλαδή από 18 Φεβρουαρίου έως αρχές Μαρτίου, μόνο που σ' αυτό το 15νθήμερο η ποσότητα πετρελαίου είναι λίγο περισσότερη.

'Ασκηση 2 (Πρόβλημα Τιμών Εμπορεύματος)

Η συνάρτηση που δίνει το κόστος ενός συγκεκριμένου εμπορεύματος δίνεται από τη συνάρτηση Κ με τύπο:

$$K(x) = \begin{cases} 5x & , \quad 0 < x < 10 \\ 4x & , \quad 10 \leqslant x < 30 \\ 3x + 30 & , \quad 30 \leqslant x < 60 \\ 3{,}2x & , \quad 60 \leqslant x \leqslant 90 \end{cases}$$

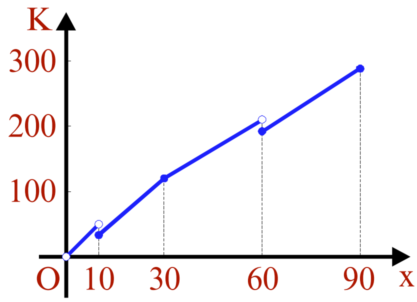
όπου x είναι ο αριθμός των γραμμαρίων του παραγόμενου εμπορεύματος και $K(x)$ το κόστος σε χιλιάδες δραχμές.

(α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $K(x)$ και βρείτε τις τιμές του x που είναι αυτή ασυνεχής.

(β) Δώστε μια ερμηνεία στη γραφική παράσταση.

Λύση

(α) Στις τιμές x = 10 και x = 60 η συνάρτηση K(x) είναι ασυνεχής, αφού $\lim_{x\to 10^-} K(x) = 50$ και $\lim_{x\to 10^+} K(x) = 40$. Είναι δεξιά συνεχής αφού K(10) = 40. 'Ομοια όταν x = 60.



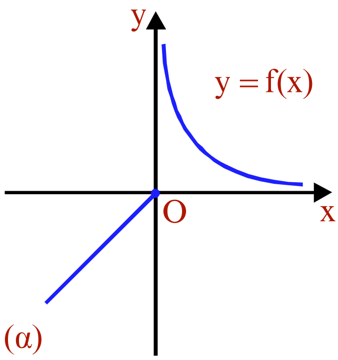
(β) Το κόστος μέχρι τα πρώτα 10 gr είναι **συγκριτικά** μεγαλύτερο, στα επόμενα 10 gr έως 30 gr μειώνεται λίγο διατηρώντας τις αυξητικές του τάσεις και το ίδιο συμβαίνει από 30 gr έως 60 gr όπου εμφανίζεται και η καλύτερη τιμή κόστους. Από τα 60 gr έως 90 gr πάλι το κόστος αυξάνεται λίγο συγκριτικά με το προηγούμενο διάστημα. Αυτά φαίνονται και από τους **συντελεστές διεύθυνσης** των ευθύγραμμων τμημάτων που αποτελούν τη γραφική παράσταση του κόστους.

§ 3.10 – 3.11

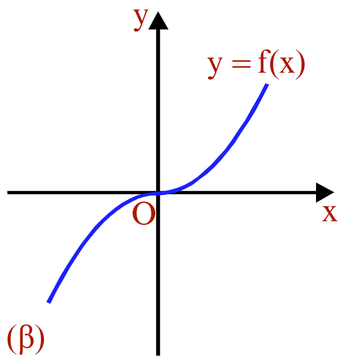
Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

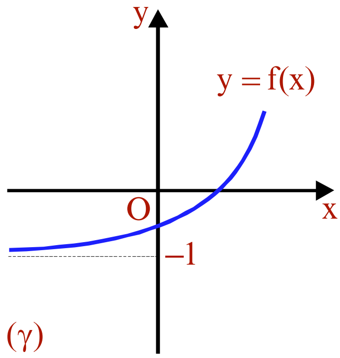
Να εκτιμήσετε (μαντέψετε) το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ στις περιπτώσεις (α), (β) και το $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ στις περιπτώσεις (γ), (δ), αν υπάρχει:

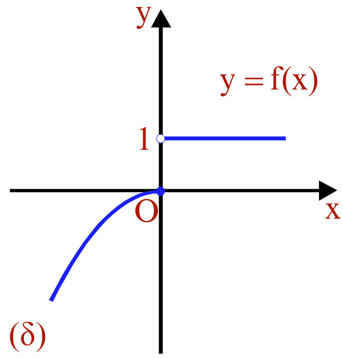


(α)



(β)





Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (δ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

'Ασκηση 2

Συμπληρώστε τους επόμενους πίνακες, υπολογίζοντας τις τιμές της δοσμένης συνάρτησης f. Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα αυτά για να εκτιμήσετε προσεγγιστικά το όριο της συνάρτησης f, αν αυτό υπάρχει.

(α) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

x	10	50	100	1000	1500
f(x)	1,01			1,000001	

(β) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

x	–10	–50	–100	–1000	–1500
f(x)	0,0498			0,0004	

Λύση

(α)

x	10	50	100	1000	1500
f(x)	1,01	1,0004	1,0001	1,000001	1,0000004

'Οσο αυξάνουν οι τιμές του x οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν το 1. 'Αρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(β)

x	–10	–50	–100	–1000	–1500
f(x)	0,0498	0,009999	0,0049	0,0004	0,00033

'Οσο μειώνονται οι τιμές του x οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν το 0. 'Αρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

'Ασκηση 3

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των ορίων στο άπειρο για να υπολογίσετε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

(α) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3 + x^2 - x + 1)$ (β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^3 + 1}$ (γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{2x - 1}$

Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3 + x^2 - x + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3) = -3\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = (-3)(-\infty) = +\infty$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^3 + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2x^3} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\cdot 0 = 0$

(γ) 'Εχει έννοια η αναζήτηση του ορίου όταν $x\to+\infty$ αφού $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{2x - 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2|x|}{2x} = 1 \text{ αφού } x > 0.$$

'Ασκηση 4

Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των ορίων στο άπειρο για να υπολογίσετε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[101\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)\right]$ (β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{2 - x} + \dfrac{2x^2}{2x + 10}\right)$ (γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{2x + 1}$

Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[101\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)\right] = 101\cdot 1 = 101$

(β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{2 - x} + \dfrac{2x^2}{2x + 10}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{2 - x} + \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{2x + 10} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) + \lim\limits_{x\to-\infty} x = (+\infty) + (-\infty)$ που είναι απροσδιοριστία.

'Εστω $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}+\dfrac{2x^2}{2x+10}=\dfrac{2x^3+10x^2+4x^2-2x^3}{-2x^2-6x+20}=\dfrac{14x^2}{-2x^2-6x+20}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{14x^2}{-2x^2}=-7$.

(γ) 'Εχει έννοια η αναζήτηση του ορίου όταν $x\to+\infty$, αφού $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{2x+1}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ απροσδιοριστία.

'Εστω $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{2x+1}=\dfrac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}{2+\frac{1}{x}}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1+1}{2}=1$.

'Ασκηση 5

Στις ασκήσεις 3 και 4 να βρείτε τις εξισώσεις των οριζόντιων ασυμπτώτων των συναρτήσεων, όπου αυτές υπάρχουν.

Λύση

- Στην άσκηση 3 έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες στις περιπτώσεις:

(β) Την ευθεία $y=0$.
(γ) Την ευθεία $y=1$.

- Στην άσκηση 4 έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες στις περιπτώσεις:

(α) Την ευθεία $y=101$.
(β) Την ευθεία $y=-7$.
(γ) Την ευθεία $y=1$.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Για τις επόμενες συναρτήσεις υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ να βρείτε επίσης το $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)$.

(α) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x}$ (β) $f(x)=2x^2-x+3$

(γ) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ (δ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}$

Λύση

(α) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^2-2x+5}{x^2}$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1=\lambda$

Τότε $f(x)-\lambda x=f(x)-x=\dfrac{x^2-2x+5}{x}-x=\dfrac{x^2-2x+5-x^2}{x}=\dfrac{-2x+5}{x}$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+5}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{x}=-2.$

(β) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{2x^2-x+3}{x}$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=+\infty.$

(γ) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\frac{2x-1}{x+1}}{x}=\dfrac{2x-1}{x^2+x}$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0=\lambda$

Τότε $f(x)-\lambda x=f(x)$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2.$

(δ) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{x}$. Η αναζήτηση του ορίου στο $+\infty$ έχει έννοια αφού $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=1=\lambda.$

Τότε $f(x)-\lambda x=\sqrt{x^2+x+2}-x=\dfrac{x^2+x+2-x^2}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=$

$$\dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}=\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1},$$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=\dfrac{1}{2}.$

'Ασκηση 2

Υπολογίστε τα επόμενα όρια εκθετικών μορφών, αν υπάρχουν.

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-4x}+1)$ (β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{2e^x}$ (γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{2e^x}$

Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-4x}+1)=e^{-\infty}+1=0+1=1$

Αλλιώς $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-4x}+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^{4x}}+1\right)=\dfrac{1}{+\infty}+1=0+1=1$

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{2e^x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ απροσδιοριστία.

Θεωρούμε την $f(x)=\dfrac{e^x+1}{2e^x}=\dfrac{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}{2e^x}=\dfrac{1+\dfrac{1}{e^x}}{2}$,

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1+0}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(γ) Γνωρίζοντας ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=e^{-\infty}=0$ και ότι $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2e^x}=1(+\infty)=+\infty$.

'Ασκηση 3

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν υπάρχουν.

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x\ln x)$ (β) $\lim\limits_{x\to0^+}(2^{\frac{1}{x}}\ln x)$

Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

'Αρα $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x\ln x)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$.

(β) Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$.

'Αρα $\lim\limits_{x\to0^+}(2^{\frac{1}{x}}\ln x)=(+\infty)(-\infty)=-\infty$.

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Το κόστος κατασκευής ενός DVD δίσκου εξαρτάται από το πλήθος x των κατασκευαζομένων DVD από μια εταιρεία, με βάση τη συνάρτηση κόστους $K(x) = 0{,}5 + \frac{2500}{x}$ σε χιλιάδες δρχ.

(α) Υπολογίστε το κόστος ενός DVD δίσκου αν η εταιρεία κατασκευάζει 1000, 1500, 2500, 5000, 50000 δίσκους.

(β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Λύση

(α)

x	1000	1500	2500	5000	50000
K(x) (χιλ. δρχ.)	3	2,166	1,5	1	0,55

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(0{,}5 + \frac{2500}{x}\right) = 0{,}5 + 0 = 0{,}5$

που σημαίνει ότι όταν η παραγωγή DVD γίνεται πολύ μεγάλη, το κόστος για καθένα δίσκο μειώνεται περίπου στις 500 δραχμές.

'Ασκηση 2

Η συγκέντρωση ενός συγκεκριμένου φάρμακου στην κυκλοφορία του αίματος ενός ασθενή, t ώρες μετά την ένεση, δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \frac{0{,}2t}{t^2+1}$ όπου οι τιμές της συνάρτησης υπολογίζονται σε mg/cm^3.

(α) Υπολογίστε τη συγκέντρωση για t = 1, 2, 4, 5, 10 ώρες.

(β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Λύση

(α)

t (ώρες)	1	2	4	5	10
f(t) (mg/cm^3)	0,1	0,08	0,047	0,038	0,0198

(β) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{0{,}2t}{t^2+1} = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{0{,}2t}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{0{,}2}{t} = 0$

που σημαίνει ότι ύστερα από μεγάλο χρονικό διάστημα η συγκέντρωση του φάρμακου στο αίμα είναι μηδενική.

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

'Ασκηση 1

Βρείτε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λάθος (Λ) και αιτιολογήστε την άποψή σας.

1. Για κάθε συνάρτηση f που ορίζεται σε σύνολο μορφής (α, β) με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ και $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L$ τότε $\lim_{x\to x_0} g(x) = L - \ell$.
3. Αν για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $f(x) = g(x)$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ τότε $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.
4. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ τότε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $f(x) = g(x)$.
5. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
6. Αν $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$.

Λύση

1. **Λάθος** γιατί αυτό ισχύει μόνο σε συνεχείς συναρτήσεις στο σημείο x_0.
2. **Σωστό** γιατί αν θέσουμε $f(x) + g(x) = h(x)$ με $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$ τότε $g(x) = h(x) - f(x)$, επομένως υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} g(x)$ και είναι $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) - \lim_{x\to x_0} f(x) = L - \ell$.
3. **Σωστό.** Είναι ίσες συναρτήσεις για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, άρα αφού $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ τότε και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$. Δε μας ενδιαφέρει εδώ η αριθμητική τιμή $f(x_0)$ ή $g(x_0)$.
4. **Λάθος** αφού για παράδειγμα αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ έχουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$, αυτό όμως δε σημαίνει ότι για $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ έχουμε $f(x) = g(x)$.
5. **Σωστό** γιατί $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(\pm\infty)} = 0$.

6. **Λάθος** γιατί αν θέσουμε $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ με $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$ τότε $f(x) = \dfrac{1}{h(x)}$ και μπορεί να μην υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Π.χ. αν $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$ τότε $h(x) = (x-1)^3$ με $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 0$. 'Ομως $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, άρα η f δεν έχει όριο όταν $x \to 1$.

'Ασκηση 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{x} - 1,\ x \geqslant 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{\lambda}{(x-1)^2},\ \lambda \neq 0,\ 0 \leqslant x \neq 1$$

(α) Να βρείτε τα $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$, αν υπάρχουν.

(β) Ποιάς μορφής απροσδιοριστία βρίσκουμε όταν αναζητούμε το $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$;

(γ) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$.

Λύση

(α) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x} - 1) = 0$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\lambda}{(x-1)^2} = \lambda \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \begin{cases} +\infty & , \text{ αν } \lambda > 0 \\ -\infty & , \text{ αν } \lambda < 0 \end{cases}$$

(β) $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to 1} f(x) \lim\limits_{x \to 1} g(x) = \begin{cases} 0(+\infty) & , \text{ αν } \lambda > 0 \\ 0(-\infty) & , \text{ αν } \lambda < 0 \end{cases}$

απροσδιοριστίες.

(γ) $f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{x} - 1) \dfrac{\lambda}{(x-1)^2} = \dfrac{\lambda(x-1)}{(x-1)^2(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{\lambda}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

(i) Αν $\lambda < 0$ τότε:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \to 1^-} \frac{\lambda}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\lambda}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = -\infty \end{aligned}\right\}$$

'Αρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$.

(ii) Αν $\lambda > 0$, όμοια δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$.

'Ασκηση 3

Υπολογίστε τα επόμενα όρια, αν βέβαια αυτά υπάρχουν.

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}[2\ln x - \ln(x^2+1)]$ (β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

Λύση

(α) 'Εστω $f(x) = 2\ln x - \ln(x^2+1) = \ln x^2 - \ln(x^2+1) = \ln\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

'Ομως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 1 = 0$.

(β) 'Εστω $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Τότε $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$.

'Αρα $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = -\infty$.

'Ασκηση 4

'Ενα ψάρι κολυμπά μια απόσταση ℓ μέτρων με ταχύτητα υ m/sec αντίθετα προς το ρεύμα ενός ποταμού, του οποίου η ταχύτητα του νερού είναι u m/sec ($u < \upsilon$). Η ενέργεια που ξοδεύει το ψάρι δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(\upsilon) = \frac{\alpha\,\ell\,\upsilon^3}{\upsilon - u}$$

όπου $\alpha > 0$ είναι μια σταθερά και η ενέργεια Ε μετριέται σε Joule.

(α) Υπολογίστε το $\lim\limits_{\upsilon\to u^+} E(\upsilon)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

(β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{\upsilon\to+\infty} E(\upsilon)$ και εξηγήστε το αποτέλεσμα.

Λύση

(α) $\lim\limits_{\upsilon\to u^+} E(\upsilon) = \lim\limits_{\upsilon\to u^+}\dfrac{\alpha\ell\upsilon^3}{\upsilon-u} = \alpha\ell\lim\limits_{\upsilon\to u^+}\dfrac{\upsilon^3}{\upsilon-u} = \alpha\ell(+\infty) = +\infty$

που σημαίνει ότι όταν η ταχύτητα του ψαριού κόντρα στο ρεύμα του ποταμού, είναι όση περίπου και η ταχύτητα του νερού, τότε θα καταναλώσει πολύ μεγάλη ενέργεια για να διανύσει μια απόσταση ℓ μέτρων (πρακτικά, θα κολυμπά και θα βρίσκεται στο ίδιο μέρος συνεχώς).

(β) $\lim\limits_{\upsilon\to+\infty} E(\upsilon) = \lim\limits_{\upsilon\to+\infty} \dfrac{\alpha\ell\upsilon^3}{\upsilon - u} = \alpha\ell \lim\limits_{\upsilon\to+\infty} \dfrac{\upsilon^3}{\upsilon} = \alpha\ell \lim\limits_{\upsilon\to+\infty} \upsilon^2 = +\infty$

που σημαίνει ότι όταν η ταχύτητα του ψαριού είναι πολύ μεγάλη, η κατανάλωση ενέργειας για την επίτευξη αυτής της ταχύτητας είναι τεράστια.

'Ασκηση 5

Αν για τις συναρτήσεις f και g που ορίζονται σε ένα διάστημα μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ τότε για τιμές του x πολύ κοντά στο x_0 μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $f(x) \simeq g(x)$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$ και $g(x) = \dfrac{x}{2}$.

(α) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

(β) Υπολογίστε προσεγγιστικά τη $\sqrt{10}, \sqrt{105}, \sqrt{0,3}, \sqrt{0,002}$.

Λύση

(α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}} = \dfrac{0}{0}$ απροσδιοριστία.

'Αρα $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} = \dfrac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1}$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

(β) Για τιμές του x πολύ κοντά στο 0 μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\sqrt{1+x} - 1 \simeq \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{x}{2}$.

(i) Για τον υπολογισμό της $\sqrt{10}$ δε μπορούμε φυσικά να θέσουμε $x = 9$ αφού όπως προαναφέρουμε το x πρέπει να παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 0. Ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

$$\sqrt{10} = \sqrt{1+9} = \sqrt{9\left(\frac{1}{9}+1\right)} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}} \simeq 3\left(1 + \frac{\frac{1}{9}}{2}\right) \simeq 3,167$$

Σημείωση: *$\sqrt{10} \simeq 3,1623$ υπολογιζόμενη με computer.*

(ii) 'Ομοια για τον υπολογισμό της $\sqrt{105}$.

(iii) $\sqrt{0,3} = \sqrt{\dfrac{3}{10}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

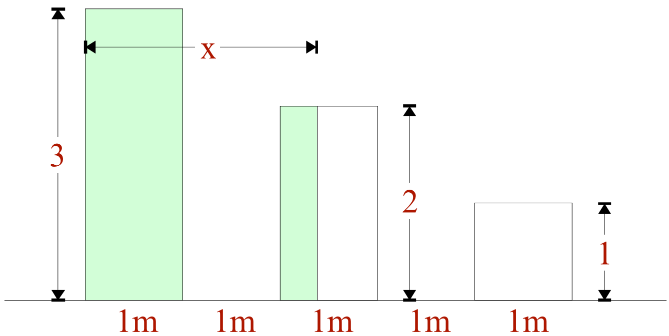
όπου $\sqrt{3} = \sqrt{4-1} = \sqrt{4\left(1-\frac{1}{4}\right)} = 2\sqrt{1-\frac{1}{4}} \simeq 2\left(1-\frac{1}{8}\right) = 1,75.$

'Αρα $\sqrt{0,3} \simeq \dfrac{1,75}{3,167} \simeq 0,5525.$

Σημείωση: *$\sqrt{3} \simeq 0,5477$ υπολογιζόμενη με computer.*

'Ασκηση 6 (Πρόβλημα Εμβαδού)

Τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχουν ίδια βάση 1 m, ύψη 3 m, 2 m, 1 m αντίστοιχα, και απέχουν μεταξύ τους κατά 1 m, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



(α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το εμβαδό του σχήματος.

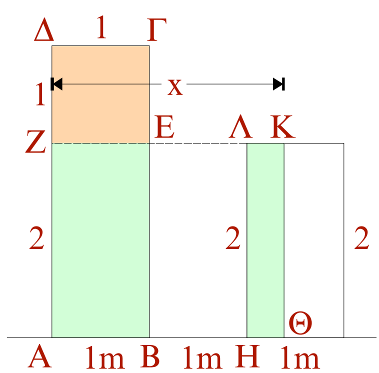
(β) Αν E(x) η συνάρτηση του εμβαδού, να ελέγξετε αν είναι συνεχής και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση

(α) (i) 'Οταν $0 \leqslant x \leqslant 1$ τότε το εμβαδό του σχήματος εξαρτάται μόνο από το πρώτο παραλληλόγραμμο και είναι $E(x) = 3x$.

(ii) 'Οταν $1 < x < 2$ το εμβαδό του σχήματος περιλαμβάνει όλο το πρώτο παραλληλόγραμμο και τίποτα άλλο, άρα $E(x) = 3$.

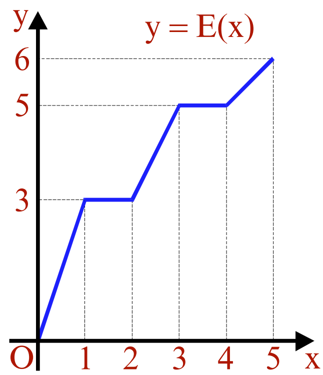
(iii) 'Οταν $2 \leqslant x \leqslant 3$ τότε όπως φαίνεται στο σχήμα έχουμε: $E(x) = [(ΑΒΕΖ) + (ΗΘΚΛ) - (ΒΗΛΕ)] + (ΖΕΓΔ) = (2x-2) + 1$ δηλαδή $E(x) = 2x - 1$.



(iv) 'Οταν $3 < x < 4$ το εμβαδό του σχήματος περιλαμβάνει όλο το πρώτο και όλο το δεύτερο παραλληλόγραμμο, άρα $E(x) = 5$.

(v) 'Ομοια με το (iii) υπολογίζεται ότι $E(x) = x + 1$ όταν $4 \leqslant x \leqslant 5$.
'Αρα η συνάρτηση εμβαδού είναι:

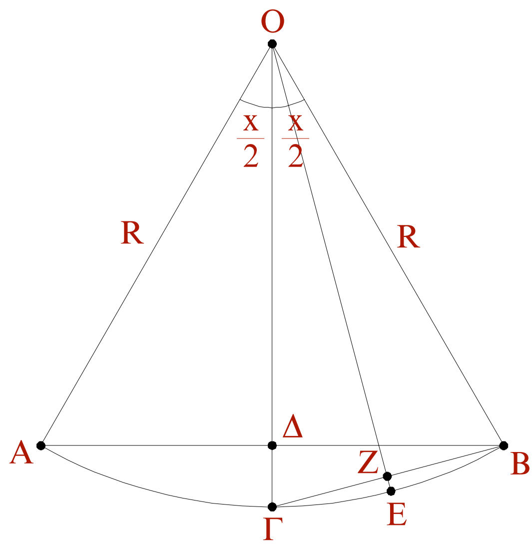
$$E = \begin{cases} 3x &, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3 &, \quad 1 < x < 2 \\ 2x - 1 &, \quad 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 5 &, \quad 3 < x < 4 \\ x + 1 &, \quad 4 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$



(β) Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η $E(x)$ είναι για κάθε $x \in [0, 5]$ συνεχής. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

'Ασκηση 7

Θεωρούμε έναν κυκλικό τομέα ΑΟΒ ακτίνας R με επίκεντρη γωνία x όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



(α) Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΑΒ και το μήκος του "βέλους" ΔΓ ως συνάρτηση της γωνίας x, όπου Γ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΒΓ και το μήκος του "βέλους" ΖΕ ως συνάρτηση της γωνίας x, όπου Ε είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

(γ) Να βρείτε τα όρια της χορδής ΑΒ και του "βέλους" ΔΓ όταν $x \to 0$.

(δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\Delta\Gamma}{ZE} = 4$.

Λύση

(α) Υπολογίζουμε το ΔΒ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΒ:

$ημ\frac{x}{2} = \frac{ΔΒ}{ΟΒ} \Leftrightarrow ΔΒ = R\ ημ\frac{x}{2}$. 'Αρα $ΑΒ = 2ΔΒ = 2R\ ημ\frac{x}{2}$.

Για το βέλος ΔΓ έχουμε: $ΔΓ = ΟΓ - ΟΔ = R - ΟΔ$ όπου $ΟΔ = R\ συν\frac{x}{2}$ πάλι από το τρίγωνο ΟΔΒ. 'Αρα $ΔΓ = R\left(1 - συν\frac{x}{2}\right)$.

(β) 'Ομοια με το (α) υπολογίζεται ότι:

$ΒΓ = 2R\ ημ\frac{x}{4}$ και $ΖΕ = R\left(1 - συν\frac{x}{4}\right)$.

(γ) $\lim\limits_{x\to 0} ΑΒ = \lim\limits_{x\to 0}\left(2R\ ημ\frac{x}{2}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} ΔΓ = \lim\limits_{x\to 0}\left[R\left(1 - συν\frac{x}{2}\right)\right] = 0$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ΔΓ}{ΖΕ} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{R\left(1 - συν\frac{x}{2}\right)}{R\left(1 - συν\frac{x}{4}\right)} = \frac{0}{0}$ απροσδιοριστία.

Τότε $\frac{1 - συν\frac{x}{2}}{1 - συν\frac{x}{4}} = \frac{\left(1 - συν\frac{x}{2}\right)\left(1 + συν\frac{x}{2}\right)\left(1 + συν\frac{x}{4}\right)}{\left(1 - συν\frac{x}{4}\right)\left(1 + συν\frac{x}{4}\right)\left(1 + συν\frac{x}{2}\right)} =$

$\frac{ημ^2\frac{x}{2}\left(1 + συν\frac{x}{4}\right)}{ημ^2\frac{x}{4}\left(1 + συν\frac{x}{2}\right)} = \frac{4\ ημ^2\frac{x}{4}συν^2\frac{x}{4}\left(1 + συν\frac{x}{4}\right)}{ημ^2\frac{x}{4}\left(1 + συν\frac{x}{2}\right)}$

(χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $ημ2α = 2ημασυνα$).

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ΔΓ}{ΖΕ} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{4\ συν^2\frac{x}{4}\left(1 + συν\frac{x}{4}\right)}{1 + συν\frac{x}{2}} = \frac{4\cdot 1\cdot 2}{2} = 4.$