5 Στοιχεία Ολοκληρωτικού Λογισμού

§ 5.1 – 5.2

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 4x^3\,dx$.

Λύση

$$\int_0^1 4x^3\,dx = \int_0^1 (x^4)'\,dx = [x^4]_0^1 = 1$$

'Ασκηση 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^2 (2x+1)\,dx$.

Λύση

$$\int_1^2 (2x+1)\,dx = \int_1^2 2x\,dx + \int_1^2 1\,dx = \int_1^2 (x^2)'\,dx + \int_1^2 (x)'\,dx = [x^2]_1^2 + [x]_1^2 =$$

$$4 - 1 + 2 - 1 = 4$$

'Ασκηση 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 e^{2x}\,dx$.

Λύση

$$\int_{-1}^1 e^{2x}\,dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2})$$

'Ασκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \text{συν}3x\,dx$.

Λύση

$$\int_0^{2\pi} \text{συν}3x\,dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\text{ημ}3x}{3}\right)' dx = \left[\frac{\text{ημ}3x}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{\text{ημ}6\pi}{3} - \frac{\text{ημ}0}{3} = 0$$

'Ασκηση 5

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 (x-1)\,dx \leqslant 0$.

Λύση

Αν $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow (x-1) \leqslant 0$, οπότε $\int_0^1 (x-1)\,dx \leqslant 0$.

'Ασκηση 6

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 x^2\,dx \geqslant \int_0^1 x^3\,dx$.

Λύση

Θεωρούμε $x^2 - x^3 = x^2(1-x) = -x^2(x-1) \geqslant 0$, για $x \in [0, 1]$, άρα $x^2 - x^3 \geqslant 0$ ή $x^2 \geqslant x^3$, για $x \in [0, 1]$.

'Αρα $\int_0^1 x^2\,dx \geqslant \int_0^1 x^3\,dx$.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_0^1 \frac{x}{e^x}\,dx$.

Λύση

$$f'(x) = \frac{(x+1)'e^x - (x+1)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x-1)}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x}$$

'Αρα $\int_0^1 \frac{x}{e^x}\,dx = -\int_0^1 \frac{-x}{e^x}\,dx = -\int_0^1 f'(x)\,dx = -f(1) + f(0) = -\frac{2}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$.

'Ασκηση 2

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Λύση

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}(\sqrt{x^2+1}+x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

'Αρα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 [f(x)]'\,dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \ln(\sqrt{2}+1)$.

'Ασκηση 3

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = -x + x\ln x$, $x > 0$ και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_1^e \ln x\,dx$.

Λύση

$$f'(x) = -1 + (x)'\ln x + x(\ln x)' = -1 + \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x$$

'Αρα $\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e f'(x)\,dx = f(e) - f(1) = -e + e\ln e + 1 - 1\ln 1 = 1.$

'Ασκηση 4

Αν $f(x) = xe^{-x}$ και $g(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$, να βρεθούν τα α, β, έτσι ώστε η g να είναι παράγουσα της f και κατόπιν να υπολογισθεί το $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$g'(x) = (\alpha x + \beta)'e^{-x} + (\alpha x + \beta)(e^{-x})' = \alpha e^{-x} - (\alpha x + \beta)e^{-x} =$$
$$(\alpha - \alpha x - \beta)e^{-x} = [-\alpha x + (\alpha - \beta)]e^{-x}$$

Τότε:

$f(x) = g'(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = [-\alpha x + (\alpha - \beta)]e^{-x} \Leftrightarrow x = -\alpha x + (\alpha - \beta) \Leftrightarrow -\alpha = 1$ και $\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1,\ \beta = -1$, άρα $g(x) = (-x - 1)e^{-x}$.

Επομένως:

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g'(x)\,dx = g(1) - g(0) =$$
$$(-1 - 1)e^{-1} - (0 - 1)e^{0} = \frac{-2}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

'Ασκηση 5

Αν $f'(x) = 2x$ και $f(1) = 0$, να υπολογισθεί το $f(0)$.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) \quad \text{ή} \quad \int_0^1 2x\,dx = 0 - f(0) \quad \text{ή} \quad [x^2]_0^1 = -f(0) \quad \text{ή}$$
$$f(0) = -1.$$

'Ασκηση 6

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = 0$.

Λύση

Είναι $\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha)$, αλλά $f(\beta) = f(\alpha)$, οπότε $\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = 0$.

§ 5.3

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Άσκηση 1

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 (u+1)\,du$ (β) $\int_{-1}^1 (t^2-1)\,dt$

Λύση

(α) $\int_0^1 (u+1)\,du = \left[\frac{u^2}{2} + u\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

(β) $\int_{-1}^1 (t^2-1)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} - 1\right) + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^2 \left(t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt$ (β) $\int_1^9 \frac{x+1}{x}\,dx$

Λύση

(α) $\int_1^2 \left(t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t} + t^{-2}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2} + \ln t + \frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^2 =$

$\frac{4}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \ln 1 + 1 = 2 + \ln 2$

(β) $\int_1^9 \frac{x+1}{x}\,dx = \int_1^9 \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^9 \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = [x + \ln x]_1^9 =$

$9 + \ln 9 - 1 - \ln 1 = 8 + \ln 9$

'Ασκηση 3

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x}\,dx$ (β) $\int_1^2 \frac{2u^2+u+1}{u}\,du$

Λύση

(α) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x}\,dx = \int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^2 = \frac{4}{2}+\ln 2-\frac{1}{2}-\ln 1 = \frac{3}{2}+\ln 2$

(β) $\int_1^2 \frac{2u^2+u+1}{u}\,du = \int_1^2 \left(\frac{2u^2}{u}+\frac{u}{u}+\frac{1}{u}\right)du = \int_1^2 \left(2u+1+\frac{1}{u}\right)du =$

$\left[\frac{2u^2}{2}+u+\ln|u|\right]_1^2 = \frac{8}{2}+2+\ln 2-\frac{2}{2}-1-\ln 1 = 4+\ln 2$

'Ασκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt$.

Λύση

$$\int_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{(\sqrt{t})^2}{\sqrt{t}}\right)dt = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)dt = \int_1^4 (t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}})\,dt =$$

$$\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^4 = \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{t\cdot t^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[2\sqrt{t}+\frac{2t\sqrt{t}}{3}\right]_1^4 =$$

$$2\sqrt{4}+\frac{2}{3}4\sqrt{4}-2-\frac{2}{3} = 4+\frac{16}{3}-2-\frac{2}{3} = 2+\frac{14}{3} = \frac{20}{3}$$

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

Λύση

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

'Ασκηση 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x(x^2+1)^{1999}\,dx$.

Λύση

$$\int_0^1 x(x^2+1)^{1999}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x)(x^2+1)^{1999}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)'(x^2+1)^{1999}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{2000}}{2000}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{2000}}{2000} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1^{2000}}{2000} = \frac{2^{2000}-1}{4000}$$

'Ασκηση 3

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Λύση

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx = [\sqrt{x^2+1}]_0^1 = \sqrt{2}-1$$

'Ασκηση 4

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$.

Λύση

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (-\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu^{-2}x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sigma\upsilon\nu x)'\sigma\upsilon\nu^{-2}x\,dx =$$

$$= -\left[\frac{\sigma\upsilon\nu^{-1}x}{-1}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$$

'Ασκηση 5

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{e}^{e^4} \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

Λύση

$$\int_{e}^{e^4} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_{e}^{e^4} \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^4} = \ln(\ln e^4) - \ln(\ln e) = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$$

'Ασκηση 6

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{e}^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$.

Λύση

$$\int_{e}^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \int_{e}^{e^2} (\ln x)' \ln^3 x\,dx = \left[\frac{\ln^4 x}{4}\right]_e^{e^2} = \frac{\ln^4 e^2}{4} - \frac{\ln^4 e}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

'Ασκηση 7

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

Λύση

$$\int_{0}^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int_{0}^{\pi} x(\eta\mu x)'\,dx = [x\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_{0}^{\pi} (x)'\eta\mu x\,dx = -\int_{0}^{\pi} \eta\mu x\,dx =$$

$$[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = \sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0 = -1 - 1 = -2$$

'Ασκηση 8

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{\pi} e^x\,\eta\mu x\,dx$.

Λύση

$$\int_{0}^{\pi} e^x\eta\mu x\,dx = \int_{0}^{\pi} (e^x)'\eta\mu x\,dx = [e^x\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_{0}^{\pi} e^x(\eta\mu x)'\,dx =$$

$$= e^{\pi}\eta\mu\pi - e^{0}\eta\mu 0 - \int_0^{\pi} e^{x}\sigma\upsilon\nu x\, dx = -\int_0^{\pi} (e^{x})'\sigma\upsilon\nu x\, dx =$$

$$-[e^{x}\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{x}(\sigma\upsilon\nu x)'\, dx = -e^{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi + e^{0}\sigma\upsilon\nu 0 - \int_0^{\pi} e^{x}\eta\mu x\, dx =$$

$$1 + e^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{x}\eta\mu x\, dx$$

'Αρα, $\int_0^{\pi} e^{x}\eta\mu x\, dx = 1 + e^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{x}\eta\mu x\, dx \Leftrightarrow 2\int_0^{\pi} e^{x}\eta\mu x\, dx = 1 + e^{\pi} \Leftrightarrow$

$$\int_0^{\pi} e^{x}\eta\mu x\, dx = \frac{1 + e^{\pi}}{2}.$$

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Η γραμματεία σπουδαστών του Βαλκανικού Πανεπιστήμιου υπολογίζει ότι ο αριθμός των εγγραφών των σπουδαστών στις μεταπτυχιακές σπουδές αυξάνεται με ρυθμό $N'(t) = 200(1 + 0{,}2t)^{-\frac{1}{2}}$ σε t χρόνια από σήμερα. Αν ο αριθμός των εγγεγραμμένων φοιτητών είναι 1000, βρείτε ένα τύπο που προσδιορίζει τον αριθμό των εγγραφών σε t χρόνια από σήμερα. Ποιός θα είναι ο συνολικός αριθμός των φοιτητών που θα εγγραφούν στη σχολή σε 5 χρόνια;

Λύση

Είναι $N'(t) = 200(1 + 0{,}2t)^{-\frac{1}{2}}$, άρα

$$N(x) - N(0) = \int_0^{x} 200(1 + 0{,}2t)^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{200}{0{,}2}\int_0^{x} 0{,}2(1 + 0{,}2t)^{-\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$1000\int_0^{x} (1 + 0{,}2t)'(1 + 0{,}2t)^{-\frac{1}{2}}\, dt = 1000\left[\frac{(1 + 0{,}2t)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^{x} =$$

$$= 1000\left[\frac{(1+0{,}2t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^x = 2000\,[\sqrt{1+0{,}2t}]_0^x = 2000(\sqrt{1+0{,}2x} - 1).$$

Το N(0) = 1000, άρα:

$$N(x) - 1000 = 2000\sqrt{1+0{,}2x} - 2000 \quad ή \quad N(x) = 2000\sqrt{1+0{,}2x} - 1000.$$

Οι συνολικές εγγραφές τα 5 πρώτα χρόνια δίνονται από:

$$\int_0^5 N(x)\,dx = \int_0^5 2000(1+0{,}2x)^{\frac{1}{2}} - 1000\,dx =$$

$$2000\int_0^5 (1+0{,}2x)^{\frac{1}{2}}\,dx - \int_0^5 1000\,dx =$$

$$\frac{2000}{0{,}2}\int_0^5 (1+0{,}2x)'(1+0{,}2x)^{\frac{1}{2}}\,dx - 1000\,[x]_0^5 =$$

$$10000\left[\frac{(1+0{,}2x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^5 - 1000(5-0) =$$

$$\frac{20000}{3}[(1+0{,}2x)\sqrt{1+0{,}2x}]_0^5 - 5000 = \frac{20000}{3}(2\sqrt{2}-1) - 5000 \simeq$$

$$12190 - 5000 = 7190$$

'Ασκηση 2

Σε μια χώρα, ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής των γυναικών, κατά τη γέννησή τους, αλλάζει με ρυθμό $g'(t) = \dfrac{5{,}45218}{(1+1{,}09t)^{0{,}9}}$ χρόνια ανά έτος, όπου t είναι τα έτη και το t = 0 αντιστοιχεί στο έτος 1900. Βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει τον αναμενόμενο μέσο όρο ζωής των γυναικών σε χρόνια κατά τη γέννησή τους, αν ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής κατά το έτος 1900 ήταν 50,02 χρόνια. Ποιός θα είναι ο αναμενόμενος μέσος όρος ζωής μιας γυναίκας που θα γεννηθεί το 2000;

Λύση

'Εχουμε:

$$g(t) - g(0) = \int_0^t \frac{5,45218}{(1 + 1,09x)^{0,9}}\,dx =$$

$$\int_0^t \frac{5,45218}{1,09}(1 + 1,09x)'(1 + 1,09x)^{-0,9}\,dx = 5,002\left[\frac{(1 + 1,09x)^{0,1}}{0,1}\right]_0^t =$$

$$5,002\left(\frac{(1 + 1,09t)^{0,1}}{0,1} - \frac{1}{0,1}\right) = \frac{5,002}{0,1}[(1 + 1,09t)^{0,1} - 1] =$$

$$50,02(1 + 1,09t)^{0,1} - 50,02$$

'Αρα $g(t) - 50,02 = 50,02(1 + 1,09t)^{0,1} - 50,02 \Leftrightarrow g(t) = 50,02(1 + 1,09t)^{0,1}$

Ο μέσος όρος ζωής το έτος 2000 θα είναι:

$g(100) = 50,02(1+1,09\cdot 100)^{0,1} = 50,02(110)^{0,1} = 50,02\cdot 1,60 = 80,03$ χρόνια

'Ασκηση 3

Ο μέσος σπουδαστής που είναι εγγεγραμμένος σε σεμινάριο στενογραφίας διάρκειας 20 εβδομάδων, μαθαίνει με ρυθμό $N'(t) = 6e^{-0,05t}$ $(0 \leqslant t \leqslant 20)$, όπου $N'(t)$ ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των λέξεων που γράφει ανά λεπτό ο σπουδαστής μετά από t εβδομάδες στο σεμινάριο. Αν υποθέσουμε ότι ο μέσος σπουδαστής ξεκινάει το σεμινάριο με 60 λέξεις το λεπτό, βρείτε τη συνάρτηση N(t) που εκφράζει την ταχύτητα των σπουδαστών μετά από t εβδομάδες.

Λύση

Είναι $N'(t) = 6e^{-0,05t}$, άρα και

$$N(t) - N(0) = \int_0^t N'(x)\,dx = \int_0^t 6e^{-0,05x}\,dx = \frac{6}{-0,05}\int_0^t (-0,05x)'e^{-0,05x}\,dx =$$

$$-120\,[e^{-0,05x}]_0^t = -120(e^{-0,05t} - 1) = 120 - 120e^{-0,05t}$$

Για $N(0) = 60$, έχουμε:

$$N(t) - 60 = 120 - 120e^{-0,05t} \Leftrightarrow N(t) = 180 - 120e^{-0,05t}$$

'Ασκηση 4

Χρησιμοποιώντας στοιχεία από μία κτηνιατρική κλινική, οι κτηνίατροι υπολογίζουν ότι το μέσο ύψος μιας ράτσας σκυλιών μεταβάλλεται με ρυθμό $h'(t) = \dfrac{52,8706e^{-0,32277t}}{(1 + 2,449e^{-0,3277t})^2}$ εκατοστά το μήνα, όπου το ύψος του σκυλιού μετριέται σε εκατοστά και η ηλικία t σε μήνες από τη γεννησή του. Βρείτε συνάρτηση h(t) που εκφράζει το μέσο όρο ύψους ενός σκύλου t μηνών, αν το μέσο ύψος της ράτσας αυτής κατά τη γέννηση είναι 19,4 εκατοστά. Πόσο είναι το μέσο ύψος ενός σκύλου 8 μηνών;

Λύση

Είναι:

$$h(x) - h(0) = \int_0^x h'(t)\,dt = \int_0^x \frac{52{,}8706e^{-0{,}3277t}}{(1 + 2{,}449e^{-0{,}3277t})^2}\,dt =$$

$$-\frac{52{,}8706}{2{,}449\cdot 0{,}3277}\int_0^x \frac{-2{,}449\cdot 0{,}3277e^{-0{,}3277t}}{(1 + 2{,}449e^{-0{,}3277t})^2}\,dt =$$

$$-\frac{52{,}8706}{0{,}8025}\int_0^x (1 + 2{,}449e^{-0{,}3277t})'(1 + 2{,}449e^{-0{,}3277t})^{-2}\,dt =$$

$$-65{,}8824\left[\frac{(1 + 2{,}449e^{-0{,}3277t})^{-1}}{-1}\right]_0^x = 65{,}8824\left[\frac{1}{1 + 2{,}449e^{-0{,}3277t}}\right]_0^x =$$

$$\frac{65{,}8824}{1 + 2{,}449e^{-0{,}3277x}} - 19{,}1$$

'Αρα $h(x) - 19{,}1 = \dfrac{65{,}8824}{1 + 2{,}449e^{-0{,}3277x}} - 19{,}1$ οπότε $h(x) = \dfrac{65{,}8824}{1 + 2{,}449e^{-0{,}3277x}}$.

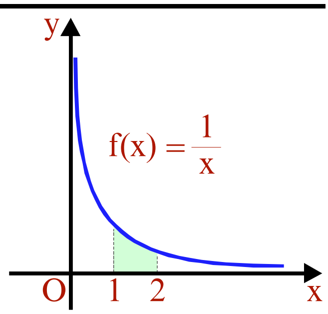
Για $x = 8$ έχουμε $h(8) = \dfrac{65{,}8824}{1 + 2{,}449e^{-0{,}3277\cdot 8}} = 55{,}93$ cm.

§ 5.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$, τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ και τον άξονα $x'x$.

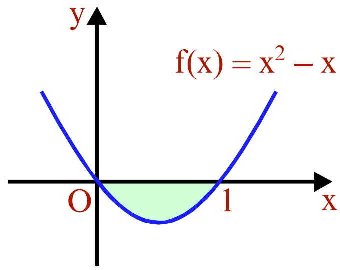


Λύση

$$E = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$$

'Ασκηση 2

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - x$ και τον άξονα $x'x$.

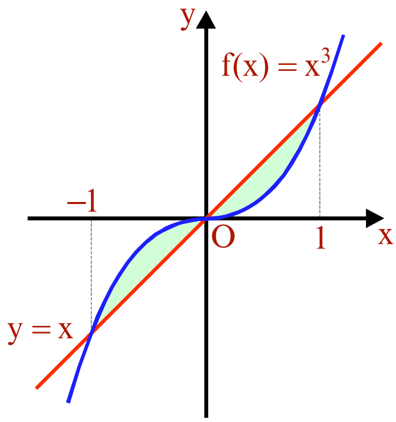


Λύση

$$E = -\int_1^0 (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

'Ασκηση 3

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ και την ευθεία με εξίσωση $y = x$.



Λύση

$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$. 'Αρα:

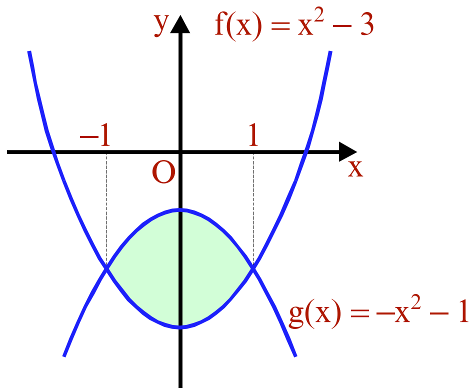
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
h		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε: $E = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)\,dx - \int_{0}^{1}(x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} =$

$-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

'Ασκηση 4

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3$ και $g(x) = -x^2 - 1$.



Λύση

Η $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3 + x^2 + 1 = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 2(x + 1)(x - 1)$ και στο διάστημα $[-1, 1]$ η $h(x) \leqslant 0$. 'Αρα:

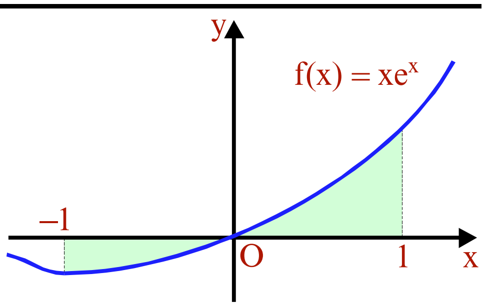
$E = -\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} 2(x^2 - 1)\,dx = -2\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} =$

$-2\left(\frac{1}{3} - 1\right) + 2\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = xe^x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$, $x = 1$.



Λύση

$f(x) = xe^x$ και $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα:

$$f(x) \geqslant 0 \text{ για κάθε } x \geqslant 0 \quad \text{και} \quad f(x) \leqslant 0 \text{ για κάθε } x \leqslant 0$$

οπότε $E = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$. Αλλά:

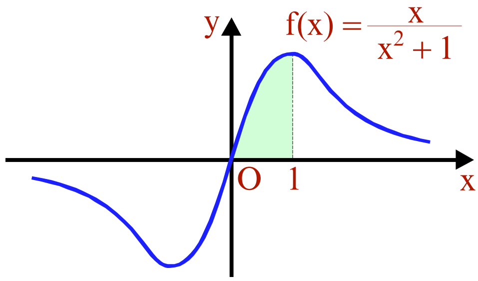
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} x(e^x)'\,dx = [xe^x]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} (x)'e^x\,dx = [xe^x]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} e^x\,dx =$$

$$[xe^x]_{\alpha}^{\beta} - [e^x]_{\alpha}^{\beta} = [(x-1)e^x]_{\alpha}^{\beta}$$

Οπότε $E = -[(x-1)e^x]_{-1}^{0} + [(x-1)e^x]_{0}^{1} = 1 - 2e^{-1} + 1 = 2 - \dfrac{2}{e}$.

'Ασκηση 2

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$.



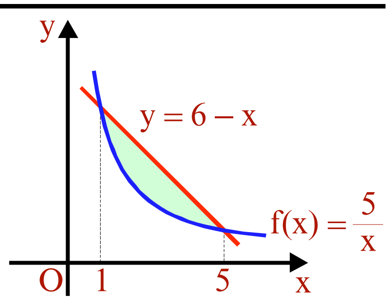
Λύση

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ και $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \geqslant 0$.

Οπότε $E = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln|x^2+1|]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

'Ασκηση 3

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{5}{x}$ και την ευθεία με εξίσωση $y = 6 - x$.



Λύση

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{5}{x} - 6 + x = \frac{5 - 6x + x^2}{x} = \frac{x^2 - 6x + 5}{x} = \frac{(x-5)(x-1)}{x}$$

'Αρα:

x	$-\infty$		0		1		5		$+\infty$
h		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

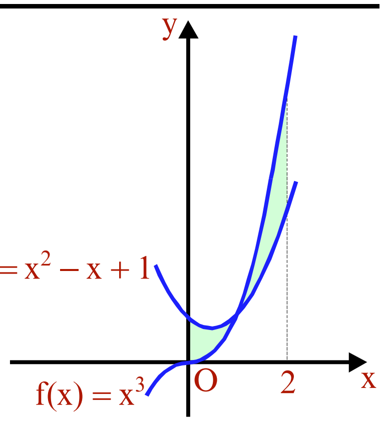
Οπότε:

$$E = -\int_1^5 \frac{x^2 - 6x + 5}{x}\,dx = -\int_1^5 \left(x - 6 + \frac{5}{x}\right)dx = -\left[\frac{x^2}{2} - 6x + 5\ln|x|\right]_1^5 =$$

$$-\frac{25}{2} + 30 - 5\ln 5 + \frac{1}{2} - 6 + 5\ln 1 = 12 - 5\ln 5$$

'Ασκηση 4

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις συναρτήσεις $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 - x + 1$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$.



Λύση

$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$.
Το $x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. 'Αρα:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h		$-$	0	$+$	

Οπότε:

$$E = -\int_0^1 h(x)\,dx + \int_1^2 h(x)\,dx =$$

$$-\int_0^1 (x^3 - x^2 + x - 1)\,dx + \int_1^2 (x^3 - x^2 + x - 1)\,dx =$$

$$-\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 =$$

$$-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) + \left(4 - \frac{8}{3} + 2 - 2\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{5}{2}$$

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

'Ασκηση 1

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$, $x > 1$ και κατόπιν να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$.

Λύση

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}(\sqrt{x^2 - 1} + x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} + 1\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Οπότε $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx = \int_2^3 f'(x)\,dx = f(3) - f(2) = \ln(\sqrt{8} + 3) - \ln(\sqrt{3} + 2)$.

'Ασκηση 2

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 (x - 1)^{24}\,dx$ (β) $\int_0^1 \frac{1}{(3x - 4)^3}\,dx$

Λύση

(α) $\int_0^1 (x - 1)^{24}\,dx = \int_0^1 (x - 1)'(x - 1)^{24}\,dx = \left[\frac{(x - 1)^{25}}{25}\right]_0^1 = \frac{1}{25}$

(β) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(3x-4)^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (3x-4)'(3x-4)^{-3}\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{(3x-4)^{-2}}{-2}\right]_0^1 =$

$\displaystyle -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(3x-4)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{16}\right) = -\frac{15}{96} = -\frac{5}{32}$

'Ασκηση 3

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$ (β) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x+1}\,dx$

Λύση

(α) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx =$

$\displaystyle\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = 1 - \int_0^1 \frac{(x+1)'}{x+1}\,dx = 1 - [\ln|x+1|]_0^1 = 1 - \ln 2$

(β) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(2x+1)'}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln|2x+1|]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3$

'Ασκηση 4

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_1^2 (2x-1)^{11}\,dx$ (β) $\displaystyle\int_0^1 e^{3x+2}\,dx$

Λύση

(α) $\displaystyle\int_1^2 (2x-1)^{11}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (2x-1)'(2x-1)^{11}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(2x-1)^{12}}{12}\right]_0^1 =$

$\displaystyle\frac{1}{24}(1^{12}-1^{12}) = 0$

(β) $\displaystyle\int_0^1 e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (3x+2)'e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}[e^{3x+2}]_0^1 = \frac{1}{3}(e^5-e^2)$

'Ασκηση 5

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}}\,dx$.

Λύση

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2+3}{\sqrt{x^3+3x+1}}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{(x^3+3x+1)'}{2\sqrt{x^3+3x+1}}\,dx =$$

$$\frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3+3x+1}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{5}-1) = \frac{2\sqrt{5}-2}{3}$$

'Ασκηση 6

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}\,dx$.

Λύση

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\eta\mu x)'}{1+\eta\mu x}\,dx = \left[\ln|1+\eta\mu x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - \ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

'Ασκηση 7

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{1+\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$.

Λύση

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{1+\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\varepsilon\varphi x)' e^{1+\varepsilon\varphi x}\,dx = \left[e^{1+\varepsilon\varphi x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = e^2 - e$$

'Ασκηση 8

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^e x^2 \ln(5x)\,dx$ (β) $\int_0^{\pi} x\,\eta\mu(2x)\,dx$

Λύση

(α) $\int_1^e x^2 \ln(5x)\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln(5x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(5x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}[\ln(5x)]'\,dx =$

$\left[\frac{x^3}{3}\ln(5x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{5x}\cdot 5\,dx = \frac{e^3}{3}\ln(5e) - \frac{1}{3}\ln 5 - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx =$

$\frac{e^3}{3}\ln(5e) - \frac{1}{3}\ln 5 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3}\ln(5e) - \frac{1}{3}\ln 5 - \frac{1}{9}(e^3 - 1)$

(β) $\int_0^\pi x\,\eta\mu(2x)\,dx = \int_0^\pi x\left(\frac{-\sigma\upsilon\nu(2x)}{2}\right)'\,dx =$

$\left[-\frac{x\sigma\upsilon\nu(2x)}{2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi (x)'\,\frac{\sigma\upsilon\nu(2x)}{2}\,dx =$

$\frac{-\pi\sigma\upsilon\nu(2\pi)}{2} + \frac{0\sigma\upsilon\nu 0}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu(2x)\,dx = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{\eta\mu(2x)}{2}\right)'\,dx =$

$-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\eta\mu(2x)}{2}\right]_0^\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}[\eta\mu(2\pi) - \eta\mu 0] = -\frac{\pi}{2}$

'Ασκηση 9

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^2 |1 - e^x|\,dx$ (β) $\int_0^{2\pi} |\sigma\upsilon\nu x|\,dx$

Λύση

(α) Το $1 - e^x > 0$ αν και μόνο αν $1 > e^x$ ή $e^0 > e^x$ ή $0 > x$.
'Ομοια, $1 - e^x < 0$ αν και μόνο αν $0 < x$
και $1 - e^x = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.
'Εχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^x$	+	0	−

'Αρα $|1 - e^x| = 1 - e^x$ για $x < 0$ και $|1 - e^x| = -(1 - e^x)$ για $x \geqslant 0$.
Η $f(x) = |1 - e^x|$ είναι συνεχής, οπότε:

$$\int_0^2 |1-e^x|\,dx = -\int_0^2 (1-e^x)\,dx = -[x-e^x]_0^2 = e^2-2-1 = e^2-3$$

(β) Είναι:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
συνx		+	0	−	0	+	

'Αρα:

$$\int_0^{2\pi} |\text{συν}x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \text{συν}x\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \text{συν}x\,dx =$$

$$[\text{ημ}x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\text{ημ}x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + [\text{ημ}x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 4$$

'Ασκηση 10

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \text{συν}^3x\,dx$ χρησιμοποιώντας τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\text{ημ}^2x + \text{συν}^2x = 1$ ή άλλο τρόπο.

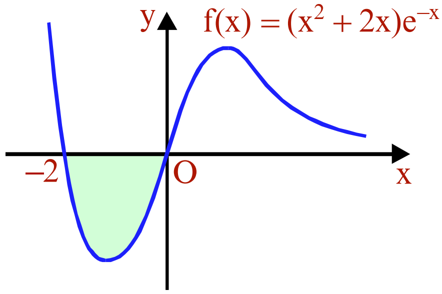
Λύση

$$\int_0^{\pi} \text{συν}^3x\,dx = \int_0^{\pi} \text{συν}^2x\,\text{συν}x\,dx = \int_0^{\pi} (1-\text{ημ}^2x)(\text{ημ}x)'\,dx =$$

$$\int_0^{\pi} (\text{ημ}x)'dx - \int_0^{\pi} \text{ημ}^2x(\text{ημ}x)'\,dx = [\text{ημ}x]_0^{\pi} - \left[\frac{\text{ημ}^3x}{3}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{3}(\text{ημ}^3\pi - \text{ημ}^3 0) = 0$$

'Ασκηση 11

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x^2+2x)e^{-x}$ και τον άξονα x′x.



Λύση

Είναι $f(x) = x(x+2)e^{-x}$ και το $e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f		+	0	−	0	+	

$$E = -\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -\int_{-2}^{0} (x^2+2x)e^{-x}\,dx = \int_{-2}^{0} (x^2+2x)(e^{-x})'\,dx =$$

$$[(x^2+2x)e^{-x}]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} (x^2+2x)'e^{-x}\,dx = 0 - \int_{-2}^{0} (2x+2)e^{-x}\,dx =$$

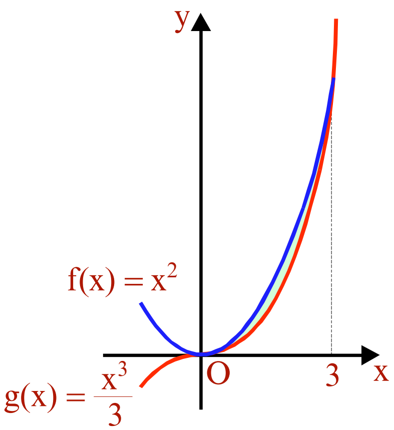
$$\int_{-2}^{0} (2x+2)(e^{-x})'\,dx = [(2x+2)e^{-x}]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} (2x+2)'e^{-x}\,dx =$$

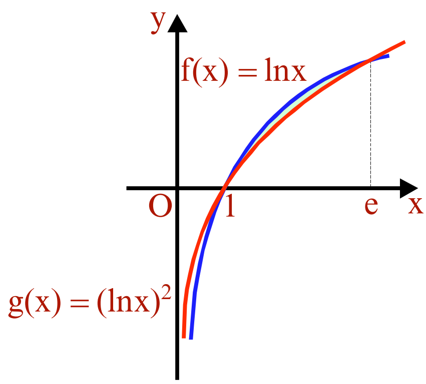
$$2 + 2e^2 - \int_{-2}^{0} 2e^{-x}\,dx = 2 + 2e^2 + 2[e^{-x}]_{-2}^{0} = 2 + 2e^2 + 2 - 2e^2 = 4$$

'Ασκηση 12

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g:

(α) $f(x) = x^2,\ g(x) = \dfrac{x^3}{3}$ (β) $f(x) = \ln x,\ g(x) = (\ln x)^2$





Λύση

(α) $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{3x^2 - x^3}{3} = \dfrac{x^2(3-x)}{3} = -\dfrac{x^2(x-3)}{3}$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
h		+	0	+	0	−	

Οπότε $E = \int_0^3 h(x)\,dx = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}\right]_0^3 = 9 - \frac{27}{4} = \frac{9}{4}$

(β) $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \ln^2 x = -\ln x(\ln x - 1)$

x	$-\infty$		1		e		$+\infty$
h		−	0	+	0	−	

Οπότε $E = \int_1^e h(x)\,dx = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x)\,dx =$

$\int_1^e \ln x\,dx - \int_1^e (x)' \ln^2 x\,dx = \int_1^e \ln x\,dx - [x\ln^2 x]_1^e + \int_1^e x\,2\ln x\,\frac{1}{x}\,dx =$

$\int_1^e \ln x\,dx - e + 2\int_1^e \ln x\,dx = 3\int_1^e \ln x\,dx - e = 3\int_1^e (x)' \ln x\,dx - e =$

$3[x\ln x]_1^e - 3\int_1^e x(\ln x)'\,dx - e = 3e - 3\int_1^e 1\,dx - e = 2e - 3[x]_1^e =$

$2e - 3e + 3 = 3 - e$

'Ασκηση 13

Για ένα δοχείο με νερό ύψους h = 3m που αδειάζει μέσω ενός ανοίγματος στον πυθμένα, γνωρίζουμε ότι ισχύει η ακόλουθη εξίσωση για τη μεταβολή του ύψους h σε σχέση με το χρόνο t:

$$h'(t) = -\frac{\sqrt{h(t)}}{727}$$

Σε πόσο χρόνο το ύψος του νερού θα φτάσει το 1 m;

Λύση

'Εχουμε ότι $h'(t) = -\frac{\sqrt{h(t)}}{727}$ ή $\frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -\frac{1}{727}$, οπότε:

$$\int_0^t \frac{h'(x)}{\sqrt{h(x)}}\,dx = -\frac{1}{727}\int_0^t 1\,dx \quad ή \quad 2\int_0^t \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}\,dx = -\frac{1}{727}(t-0) \quad ή$$

$$2[\sqrt{h(x)}]_0^t = -\frac{1}{727}t \quad ή \quad 2\sqrt{h(t)} - 2\sqrt{h(0)} = -\frac{1}{727}t$$

και αφού $h(0) = 3$ είναι:

$$2\sqrt{h(t)} = -\frac{1}{727}t + 2\sqrt{3} \quad ή \quad \sqrt{h(t)} = -\frac{1}{1454}t + \sqrt{3}$$

Αν $h(t) = 1$ τότε:

$$\sqrt{1} = -\frac{1}{1454}t + \sqrt{3} \quad ή \quad t = 1454(\sqrt{3} - \sqrt{1}) \simeq 1064 \text{ sec}$$

'Ασκηση 14

Το εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής ηλεκτρικών λαμπτήρων χαμηλής κατανάλωσης σε ένα εργοστάσιο δίνεται από τη συνάρτηση $K(x)$ και ο ρυθμός μεταβολής του κόστους είναι $K'(x) = 0{,}000006x^2 - 0{,}0006x + 2$ σε χιλιάδες δραχμές όπου x είναι ο αριθμός των λαμπτήρων που παράγονται. Αν το σταθερό εβδομαδιαίο κόστος είναι 100000 δραχμές, να υπολογισθεί το συνολικό κόστος για τη παραγωγή 500 λαμπτήρων.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$K(t) - K(0) = \int_0^t K'(x)\,dx \quad ή$$

$$K(t) - K(0) = \left[\frac{0{,}000006x^3}{3} - \frac{0{,}0006x^2}{2} + 2x\right]_0^t \quad ή$$

$$K(t) - K(0) = 0{,}000002t^3 - 0{,}0003t^2 + 2t$$

Το $K(0) = 100$, άρα:

$$K(t) = 0{,}000002t^3 - 0{,}0003t^2 + 2t + 100$$

Το ζητούμενο κόστος είναι το:

$$K(500) = 0{,}000002\cdot 500^3 - 0{,}0003\cdot 500^2 + 2\cdot 500 + 100 =$$
$$75\cdot 1000000\cdot 0{,}000002 - 25\cdot 10000\cdot 0{,}0003 + 1000 + 100 =$$
$$150 - 75 + 1000 + 100 = 1175 \text{ χιλιάδες δραχμές}$$

'Ασκηση 15

Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής της μονάδας συγκεκριμένου είδους γυναικείου καλλυντικού δίνεται από τη σχέση $P'(x) = \dfrac{-250x}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ όπου x είναι η ποσότητα της ημερήσιας ζήτησης του προϊόντος σε εκατοντάδες. Να βρεθεί η συνάρτηση της ζήτησης, αν η η τιμή κάθε μονάδος είναι 50 δρχ. όταν η ζήτηση είναι 300 μονάδες προϊόντος.

Λύση

'Εχουμε ότι:

$$P(x) - P(0) = \int_0^x P'(t)\,dt \quad \text{ή} \quad P(x) - P(0) = \int_0^x \frac{-250t}{(16+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt \quad \text{ή}$$

$$P(x) - P(0) = -125\int_0^x 2t\,(16+t^2)^{-\frac{3}{2}}\,dt \quad \text{ή}$$

$$P(x) - P(0) = -125\int_0^x (16+t^2)'(16+t^2)^{-\frac{3}{2}}\,dt \quad \text{ή}$$

$$-125\left[\frac{(16+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^x \quad \text{ή} \quad P(x) - P(0) = \frac{250}{\sqrt{16+x^2}} - \frac{250}{4}$$

Επομένως $P(x) = \dfrac{250}{\sqrt{16+x^2}} - \dfrac{250}{4} + P(0)$.

Το $P(3) = 50$, άρα:

$$50 = \frac{250}{\sqrt{16+9}} - \frac{250}{4} + P(0) \quad \text{ή} \quad P(0) = 50 - \frac{250}{5} + \frac{250}{4} \quad \text{ή} \quad P(0) = \frac{250}{4}$$

οπότε:

$$P(x) = \frac{250}{\sqrt{16+x^2}} - \frac{250}{4} + \frac{250}{4} \quad \text{ή} \quad P(x) = \frac{250}{\sqrt{16+x^2}}$$