1 Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα

Εισαγωγή

'Ενα χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο είναι ο πίνακας, δηλαδή μια ορθογώνια διάταξη αριθμών. Η ορθογώνια αυτή διάταξη μας δίνει πληροφορίες για κάθε στοιχείο του.

Από τις πράξεις και τις ιδιότητες των πινάκων μπορούμε να αντλήσουμε συμπεράσματα που έχουν σχέση με τις αρχικές πληροφορίες που παρέχουν οι πίνακες.

Ιστορικά, η έννοια του πίνακα προέκυψε από τη μελέτη των οριζουσών για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος και αποτέλεσε ανεξάρτητο μαθηματικό σύμβολο με τις δικές του χρήσεις και ιδιότητες. Το 1855 ο A. Cayley εισήγαγε για πρώτη φορά την έννοια του πίνακα στη μελέτη γραμμικών μετασχηματισμών, ενώ το 1858 ανέπτυξε συστηματικά όλη τη βασική τους θεωρία στην εργασία του "Μια πραγματεία στη θεωρία των πινάκων".

Ο λογισμός των πινάκων αναπτύχθηκε τα επόμενα χρόνια σε μια αυτοτελή μαθηματική θεωρία που είναι μέρος της Γραμμικής 'Αλγεβρας.

1.1. Η έννοια του Πίνακα

Για διάφορους λόγους, τρεις μεγάλες αλυσίδες Super Market αποφάσισαν τη μείωση βασικών καταναλωτικών ειδών σε ποσοστά ως εξής:

Α: Μείωση στα διαφόρου είδους χαρτικά 12%, στα γαλακτοκομικά 8%, στα αναψυκτικά-ποτά 6% και στα κρέατα-είδη ψαρικής 4,5%.

Β: Μείωση στα χαρτικά 13%, στα γαλακτοκομικά 7,5%, στα αναψυκτικά-ποτά 5% και στα κρέατα-είδη ψαρικής 3%.

Γ: Μείωση στα χαρτικά 10%, στα γαλακτοκομικά 9%, στα αναψυκτικά-ποτά 7% και στα κρέατα-είδη ψαρικής 5%.

Για να μπορούμε να συγκρίνουμε τις εκπτώσεις για τα διάφορα είδη και να προτιμήσουμε την κατάλληλη αλυσίδα Super Market οργανώνουμε τις παραπάνω πληροφορίες ως εξής:

Αλυσίδα S-M \ Εκπτώσεις %	Χαρτικά	Γαλακτοκομικά	Αναψυκτικά-Ποτά	Κρέατα-Είδη ψαρικής
Α	12	8	6	4,5
Β	13	7,5	5	3
Γ	10	9	7	5

Η ορθογώνια διάταξη των πιο πάνω αριθμών είναι ένας πίνακας εκπτώσεων ειδών καταναλωτή. Αν γράψουμε τους αριθμούς αυτούς μέσα σε αγκύλες:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 6 & 4{,}5 \\ 13 & 7{,}5 & 5 & 3 \\ 10 & 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

λέμε ότι έχουμε ένα πίνακα με 3 γραμμές και 4 στήλες ή ένα πίνακα 3×4 που διαβάζεται 3 επί 4 πίνακας. Τους πίνακες συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα Α, Β κ.λπ.

Ορισμός: Μια ορθογώνια διάταξη $\mu\cdot\nu$ αριθμών σε μ γραμμές και ν στήλες λέγεται πίνακας $\mu\times\nu$.

Οι αριθμοί που αποτελούν τον πίνακα λέγονται στοιχεία του πίνακα και καθένα από αυτά χαρακτηρίζεται από τη θέση που κατέχει στον πίνακα.

Π.χ. ο αριθμός 10 βρίσκεται στην $3^η$ γραμμή και $1^η$ στήλη του πίνακα, ο αριθμός 7,5 βρίσκεται στη $2^η$ γραμμή και $2^η$ στήλη του πίνακα.

Για να μπορούμε να χαρακτηρίζουμε το κάθε ένα από τα στοιχεία του πίνακα χρησιμοποιούμε δύο δείκτες. Ο i-δείκτης μας δείχνει τη γραμμή στην οποία βρίσκεται το στοιχείο και ο j-δείκτης τη στήλη.

'Ετσι, ο αριθμός 10 χαρακτηρίζεται ως το α_{31} στοιχείο του πίνακα, ενώ ο αριθμός 7,5 ως το α_{22} στοιχείο.

Γενικά ο πίνακας έχει τη μορφή:

$$A = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc} & & & \text{j-στήλη} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{i\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu j} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{i-γραμμή} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Παρατηρήστε ότι στην i-γραμμή όλα τα στοιχεία του πίνακα έχουν ως πρώτο δείκτη i. Αντίστοιχα στη j-στήλη έχουν ως δεύτερο δείκτη j. Το στοιχείο α_{ij} κατέχει τη θέση της i-γραμμής και j-στήλης. Σε συντομογραφία (ή συμβολικά) μπορούμε να γράφουμε $A = [\alpha_{ij}]$ με $i = 1, 2, 3, \ldots, \mu$ και $j = 1, 2, 3, \ldots, \nu$.

1.2. Ισότητα Πινάκων

> Δύο πίνακες Α, Β είναι ίσοι όταν είναι του ίδιου τύπου (ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών) και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

'Ετσι, αν πάρουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} 12x + 8y + 6\omega = 4{,}5 \\ 13x + 7{,}5y + 5\omega = 3 \\ 10x + 9y + 7\omega = 5 \end{array}\right\}$$

ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων και των σταθερών όρων είναι:

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 6 & 4{,}5 \\ 13 & 7{,}5 & 5 & 3 \\ 10 & 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

και μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι είναι πίνακας ίσος με τον πίνακα Α των εκπτώσεων που παρουσιάσαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. (Παρατηρήστε εδώ ότι οι πίνακες Α και Β δίνουν διαφορετικές πληροφορίες).

'Ετσι, αν θέλουμε να προσδιορίσουμε τους x, y, ω ∈ ℝ ώστε να ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x+y \\ y+\omega \\ \omega+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

πρέπει:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ y+\omega=6 \\ \omega+x=8 \end{cases}$$

και αν λύσουμε το σύστημα θα προκύψουν οι αριθμοί x = 3, y = 1 και ω = 5.

1.3. Είδη Πινάκων

(α) 'Ενας πίνακας με ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών λέγεται τετραγωνικός πίνακας ν×ν. Η μορφή αυτού του πίνακα είναι:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία α_{11}, α_{22}, …, $\alpha_{2\nu}$ αποτελούν την κύρια διαγώνιο του πίνακα A.

(β) 'Ενας τετραγωνικός πίνακας λέγεται διαγώνιος, όταν όλα τα στοιχεία που δε βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο είναι 0, δηλαδή:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

(γ) 'Ενας τετραγωνικός πίνακας λέγεται τριγωνικός άνω όταν όλα τα στοιχεία του κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι 0, δηλαδή:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα ορίζεται και ο τριγωνικός κάτω:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

(δ) 'Ενας πίνακας που έχει μια μόνο γραμμή λέγεται πίνακας γραμμή:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \end{bmatrix}$$

και ένας που έχει μια μόνο στήλη λέγεται πίνακας στήλη:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{1\mu} \end{bmatrix}$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Η κατανομή των μεταλλίων στο 17^{o} Ευρωπαϊκό πρωτάθλημα στίβου το 1998 για τις τέσσερις πρώτες χώρες ήταν:

Μ. Βρετανία : Χρυσά 9, Ασημένια 4, Χάλκινα 3
Γερμανία : Χρυσά 8, Ασημένια 7, Χάλκινα 8
Ρωσία : Χρυσά 6, Ασημένια 9, Χάλκινα 7
Πολωνία : Χρυσά 3, Ασημένια 4, Χάλκινα 1

Να κατασκευάσετε ένα πίνακα κατανομής μεταλλίων για τις 4 αυτές χώρες.

Λύση

Ο πίνακας που ακολουθεί είναι συνοπτικός των παραπάνω πληροφοριών:

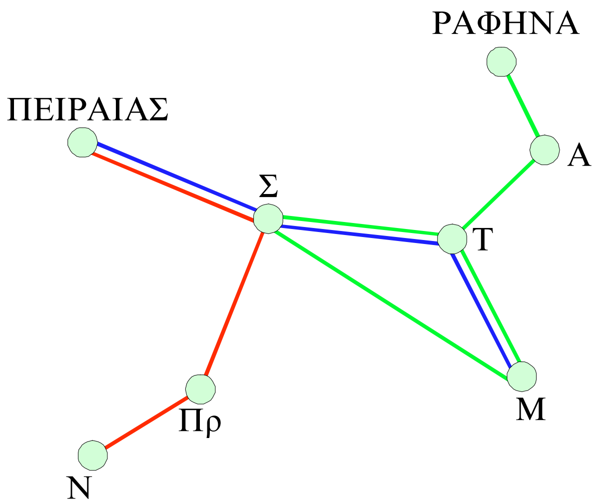
Χώρες	**Χρ**	**Α**	**Χ**
Μ. Βρετανία	9	4	3
Γερμανία	8	7	8
Ρωσία	6	9	7
Πολωνία	3	4	1

και αποδίδεται με τον 4×3 πίνακα:

$$M = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 2

Το δίκτυο ακτοπλοοίας που συνδέει δύο μεγάλα λιμάνια, Π (Πειραιά) και Ρ (Ραφήνα), με έξι νησιά των Κυκλάδων, Σ (Σύρο), Πρ (Πάρο), Ν (Νάξο), Α ('Ανδρο), Τ (Τήνο) και Μ (Μύκονο) ας υποθέσουμε ότι αποδίδεται από το ακόλουθο σχήμα κατά τη χειμερινή περίοδο:



Τα πλοία (οχηματαγωγά) όπως φαίνεται στο σχήμα ακολουθούν τρία διαφορετικά δρομολόγια: (i) κόκκινη γραμμή: Π - Σ - Πρ - Ν - Πρ - Σ - Π, (ii) μπλέ γραμμή Π - Σ - Τ - Μ - Τ - Σ - Π, (iii) πράσινη γραμμή Ρ - Α - Τ - Μ - Σ - Τ - Α - Ρ.

(α) Να φτιάξετε έναν πίνακα δρομολογίων από τον Πειραιά και τη Ραφήνα προς νησιά, του οποίου κάθε στοιχείο να δείχνει το πλήθος των συνδέσεων των δύο μεγάλων λιμανιών με τα νησιά.

(β) Πόσες φορές διέρχεται πλοίο από τα νησιά αυτά καθ' όλη τη διάρκεια των δρομολογίων από και πρός ΠΕΙΡΑΙΑ - ΡΑΦΗΝΑ;

Λύση

(α) Ο πίνακας δρομολογίων παριστάνεται με τον πίνακα διπλής εισόδου:

	Σ	Τ	Μ	Πρ	Ν	Α
Πειραιάς	2	1	1	1	1	0
Ραφήνα	1	1	1	0	0	1

και αποδίδεται με τον 2×6 πίνακα:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(β) Ο επόμενος πίνακας διπλής εισόδου μας δείχνει πόσες φορές κατά τη διάρκεια του δρομολογίου διέρχεται πλοίο από κάθε νησί ξεχωριστά από Πειραιά και Ραφήνα και συνολικά (στην τρίτη γραμμή):

	Σ	Τ	Μ	Πρ	Ν	Α
Πειραιάς	4	2	1	2	1	0
Ραφήνα	1	2	1	0	0	2
Σύνολο	5	4	2	2	1	2

και αποδίδεται με τον 3×6 πίνακα:

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 3

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y + 8\omega &= 6 \\ y + 2\omega &= 3 \\ \omega &= 1 \end{aligned}\right\}$$

μπορεί να παρασταθεί με έναν **τριγωνικό άνω** πίνακα 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας των συντελεστών της πρώτης εξίσωσης του συστήματος με έναν **πίνακα γραμμή** 1×3:

$$B = [\,3 \;\; -5 \;\; 8\,]$$

και ο πίνακας των σταθερών όρων με έναν **πίνακα στήλη** 3×1:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 4

Να βρεθεί ο τύπος του πίνακα Α που έχει 72 στοιχεία, συνολικά 17 γραμμές και στήλες και το πλήθος των γραμμών του είναι μικρότερο του πλήθους των στηλών του.

Λύση

Αν ο τύπος του πίνακα Α είναι μ×ν, θα ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{c} \mu\cdot\nu = 72 \\ \mu + \nu = 17 \\ \mu < \nu \end{array}\right\}$$

Οι φυσικοί αριθμοί μ, ν θα είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 17x + 72 = 0$ άρα θα είναι μ = 8, ν = 9 ή μ = 9, ν = 8. Προφανώς, αφού μ < ν ο πίνακας Α είναι τύπου 8×9.

Εφαρμογή 5

Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y αν ο 2×3 πίνακας Β, τα στοιχεία του οποίου δίνονται από τη σχέση:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} i^j x & , \quad i + j = \text{άρτιος} \\ (i - j)\omega & , \quad i + j = \text{περιττός} \end{cases}$$

είναι ίσος με τον 2×3 πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 - x & 1 & 2x + \omega \\ 2\omega + x & 2x - 2\omega & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Ο πίνακας Β γράφεται:

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \end{bmatrix}$$

και με τη βοήθεια της σχέσης που υπολογίζει τα στοιχεία του παίρνουμε:

$\beta_{11} = 1^1 x = x \qquad \beta_{21} = (2-1)\omega = \omega$

$\beta_{12} = (1-2)\omega = -\omega \qquad \beta_{22} = 2^2 x = 4x$

$\beta_{13} = 1^3 x = x \qquad \beta_{23} = (2-3)\omega = -\omega$

'Αρα $B = \begin{bmatrix} x & -\omega & x \\ \omega & 4x & -\omega \end{bmatrix}$ και λόγω της ισότητάς του με τον Α έχουμε:

$$\begin{cases} x = 2 - x \\ -\omega = 1 \\ x = 2x + \omega \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \omega = 2\omega + x \\ 4x = 2x - 2\omega \\ -\omega = 1 \end{cases}$$

Οι τιμές $x = 1$ και $\omega = -1$ επαληθεύουν το σύστημα.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Να κατασκευάσετε έναν πίνακα $B = [\beta_{ij}]$ με $\beta_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$, $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$. Τι παρατηρείτε σχετικά με τη μορφή του πίνακα B;

'Ασκηση 2

Αν ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & x^2 - y^2 & (x+y)^2 \\ (x+4)^2 & y^2 & x + 2y - 4 \\ y^2 - x^2 & x + y & (x-y)^2 \end{bmatrix}$$

με $x, y \in \mathbb{R}$ είναι τριγωνικός κάτω, να δείξετε ότι είναι και διαγώνιος.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Βρείτε τον πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ τύπου ν×ν, για τον οποίο γνωρίζουμε ότι $\alpha_{ij} = \min\{i, j\}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, \nu$. Κατόπιν, βρείτε το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

'Ασκηση 2

Θεωρούμε ένα ν×ν πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$.

(α) Πόσα στοιχεία έχει συνολικά ο πίνακας Α;

(β) Πόσα στοιχεία υπάρχουν πάνω ή κάτω από την κύρια διαγώνιο;

(γ) Μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιον πίνακα με περισσότερα από $\nu^2 - \nu$ στοιχεία ίσα με μηδέν, που να έχει όλες τις γραμμές (αντίστοιχα στήλες) διάφορες της μηδενικής;

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Είναι γνωστό ότι το νερό βράζει στους 100° C. Ισχύει όμως πάντοτε αυτό; Η απάντηση μπορεί να δοθεί με χρήση της εξίσωσης Antoine που εκφράζει την «τάση ατμών» (δηλαδή την πίεση στο σημείο βρασμού) ως συνάρτηση της θερμοκρασίας:

$$\ln P^s = 18{,}3104 - \frac{3826{,}36}{T - 45{,}47} = A - \frac{B}{T + C}$$

όπου $A = 18{,}3104$, $B = 3826{,}36$, $C = -45{,}47$, $T =$ θερμοκρασία σε Kelvin, $P^s =$ τάση ατμών σε mm Hg.

Αν είναι γνωστό ότι οι βαθμοί Kelvin προκύπτουν, αν στους βαθμούς Κελσίου προσθέσουμε 273,15, συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

$$\Theta = \begin{bmatrix} C & K & \dfrac{B}{C+T} & A - \dfrac{B}{C+T} & P^s\,(\text{mm Hg}) & P^s\,(\text{atm}) \\ 100 & & & & & \\ 90 & & & & & \\ 98 & & & & & \end{bmatrix}$$

Σχολιάστε τα αποτελέσματα του πίνακα.

'Ασκηση 2

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι πειραματικές και υπολογισμένες, με 3 διαφορετικά μοντέλα μέτρησης, τιμές για τον συντελεστή ενεργότητας μιας σειράς πολυμερών διαλυμάτων. Ο συντελεστής ενεργότητας είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα στην εφαρμοσμένη Θερμοδυναμική.

Σύστημα	Πειραματική Τιμή	Μοντέλο		
		A	B	Γ
PIB/τολουόλιο	5,30	5,28	6,19	7,01
PIB/τετραχλωράνθρακας	2,53	2,74	2,93	2,10
PVC/ακετόνη	11,80	9,98	10,17	3,64
PVC/κυκλοεξάνιο	16,10	10,96	8,96	5,36
BR/εξάνιο	6,36	5,79	4,97	9,89
BR/ακετόνη	10,40	11,36	9,49	33,63
PS/βενζόλιο	4,27	4,76	3,98	5,78
PS/αιθυλοβενζόλιο	4,96	4,63	4,23	7,02

Να σχηματίσετε έναν πίνακα όπου:

(α) Στην πρώτη στήλη να εμφανίζονται οι πειραματικές τιμές και

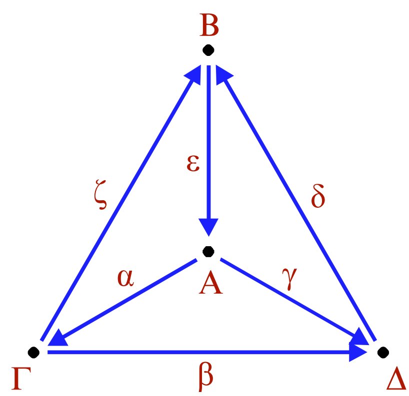
(β) Στις επόμενες στήλες να εμφανίζονται, αντί των υπολογισμένων τιμών, τα ποσοστιαία σφάλματα, καθώς και το μέσο ποσοστιαίο σφάλμα του κάθε μοντέλου στην τελευταία γραμμή του πίνακα.

Σημείωση:

- *Το ποσοστιαίο σφάλμα υπολογίσεται ως εξής:*
  $$\Pi.\Sigma\varphi. = \frac{|\text{Πειραματική τιμή} - \text{Υπολογισμένη τιμή}|}{\text{Πειραματική τιμή}} \cdot 100$$
- *Το μέσο ποσοστιαίο σφάλμα υπολογίζεται ως εξής:*
  $$M.\Pi.\Sigma\varphi. = \frac{\text{'Αθροισμα ποσοστιαίων σφαλμάτων κάθε μοντέλου}}{\text{Πλήθος μετρήσεων}}$$

'Ασκηση 3 *(Τοπολογικός ή συνδετικός πίνακας)*

Το διπλανό σχήμα μας δείχνει μια κεντρική Α και τρεις περιφεριακές γειτονιές Β, Γ, Δ που συνδέονται με δρόμους μονής κατεύθυνσης. Κάθε ένας απ' αυτούς τους δρόμους θα συμβολίζεται με δύο αριθμούς: –1 από τη γειτονιά που ξεκινάει, 1 σ' αυτή που καταλήγει και 0 σ' αυτή που δεν πάει. (π.χ. ο δρόμος ΑΓ, –1 στη γειτονιά Α, 1 στη γειτονιά Γ και 0 στις υπόλοιπες γειτονιές).



(α) Φτιάξτε έναν πίνακα που να φανερώνει τον τρόπο που συνδέονται οι γειτονιές με τους μονόδρομους, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι γραμμές θα παριστάνουν τους δρόμους και οι στήλες τις γειτονιές.

(β) Τι παρατηρείτε στις γραμμές αυτού του πίνακα για τα δίκτυα

(i) γ, δ, ε	(iii) α, β, γ
(ii) α, ζ, ε	(iv) β, δ, ζ

(γ) Μπορείτε να γενικεύσετε για οποιοδήποτε από τα δίκτυα που συνδέουν τις τέσσερις γειτονιές;

'Ασκηση 4 (Το πρόβλημα του γάμου)

Υποθέστε ότι έχουμε 4 γυναίκες α, β, γ, δ και 4 άνδρες Α, Β, Γ, Δ. Κάποια απ' αυτά τα 16 ζευγάρια συμφωνούν να δοκιμάσουν αν μπορούν να παντρευτούν και κάποια δε συμφωνούν για διάφορους λόγους. Αν με $\alpha_{ij} = 0$ συμβολίσουμε ότι η i γυναίκα δε συμφωνεί με τον j άνδρα και $\alpha_{ij} = 1$ ότι η i γυναίκα συμφωνεί με τον j άνδρα τότε:

(α) Γράψτε έναν πίνακα που να δείχνει ότι:

- Η α γυναίκα συμφωνεί πως μπορεί να παντρευτεί με τον Α ή τον Δ άνδρα.
- Η β γυναίκα με τον Β άνδρα.
- Η γ γυναίκα με τον Α ή τον Γ άνδρα
- Η δ γυναίκα με τον Β ή τον Δ ή τον Α άνδρα.

(β) Με δεδομένο ότι μια γυναίκα μπορεί να παντρευτεί έναν άνδρα και αντίστροφα, ποιά είναι τα δυνατά ζευγάρια του (α) ερωτήματος;

(γ) Βρείτε ένα μέγιστο σύνολο γάμων που παριστάνουν οι επόμενοι πίνακες:

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \Gamma & \Delta & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{array}, \quad N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \Gamma & \Delta & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{array}$$

1.4. Πρόσθεση Πινάκων

Μια έρευνα σε κεντρικό βιβλιοπωλείο της Αθήνας μας έδειξε τις πωλήσεις σε βιβλία τους μήνες Μάιο και Ιούνιο όπως φαίνονται στους παρακάτω πίνακες. Καταχωρούμε τις ενδείξεις μόνο τεσσάρων ειδών βιβλίων και έχουμε χωρίσει σε τρεις ομάδες τις ηλικίες αγοραστών.

Μάιος				
Είδος / Ηλικία	Θετικές Επιστήμες	Λογοτεχνία	Τεχνολογία - Ηλ. Υπολογιστές	Κοινωνικές Επιστήμες
16 - 25	25	44	62	12
25 - 40	60	105	53	20
Ανω των 40	28	80	30	35

Ιούνιος				
Είδος / Ηλικία	Θετικές Επιστήμες	Λογοτεχνία	Τεχνολογία - Ηλ. Υπολογιστές	Κοινωνικές Επιστήμες
16 - 25	30	40	54	15
25 - 40	50	115	58	22
Ανω των 40	24	95	20	38

Αν θέλουμε τις συνολικές πωλήσεις αυτούς τους δύο μήνες, τότε έχουμε:

Μάιος και Ιούνιος				
Είδος / Ηλικία	Θετικές Επιστήμες	Λογοτεχνία	Τεχνολογία - Ηλ. Υπολογιστές	Κοινωνικές Επιστήμες
16 - 25	(25 + 30)	(44 + 40)	(62 + 54)	(12 + 15)
25 - 40	(60 + 50)	(105 + 115)	(53 + 58)	(20 + 22)
Ανω των 40	(28 + 24)	(80 + 95)	(30 + 20)	(35 + 38)

Μπορούμε να εκφράσουμε τα παραπάνω με πίνακες:

Για τον Μάιο οι πωλήσεις είναι: $A = \begin{bmatrix} 25 & 44 & 62 & 12 \\ 60 & 105 & 53 & 20 \\ 28 & 80 & 30 & 35 \end{bmatrix}$

Για τον Ιούνιο οι πωλήσεις είναι: $B = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 54 & 15 \\ 50 & 115 & 58 & 22 \\ 24 & 95 & 20 & 38 \end{bmatrix}$

και ο πίνακας:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 25+30 & 44+40 & 62+54 & 12+15 \\ 60+50 & 105+115 & 53+58 & 20+22 \\ 28+24 & 80+95 & 30+20 & 35+38 \end{bmatrix}$$

εκφράζει τις πωλήσεις και για τους δύο μήνες.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας Γ αποτελείται από το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των Α και Β. Ο πίνακας Γ ονομάζεται άθροισμα των πινάκων Α και Β.

Ορισμός: Άθροισμα δύο πινάκων $\mu \times \nu$ $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$, λέγεται ο $\mu \times \nu$ πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ για τον οποίο κάθε στοιχείο του προκύπτει από το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των Α και Β. Δηλαδή $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \mu$ και $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

- **Ιδιότητες πρόσθεσης πινάκων**

Επειδή η πρόσθεση δύο πινάκων ορίζεται από την πρόσθεση των αντίστοιχων στοιχείων τους, οι ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων είναι ανάλογες με τις ιδιότητες πρόσθεσης των πραγματικών αριθμών.

(α) $A + B = B + A$ αντιμεταθετική ιδιότητα

(β) $(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$ προσεταιριστική ιδιότητα

Είναι φανερό ότι το άθροισμα τριών πινάκων $A + B + \Gamma$ μπορεί να υπολογιστεί με έναν από τους δύο τρόπους:

$$A + B + \Gamma = (A + B) + \Gamma \quad \text{ή} \quad A + B + \Gamma = A + (B + \Gamma)$$

Για πρόσθεση περισσοτέρων πινάκων ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία:

$$A + B + \Gamma + \Delta = [(A + B) + \Gamma] + \Delta \quad \text{κ.λ.π.}$$

(γ) Μηδενικός πίνακας

Στους πραγματικούς αριθμούς το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης. Ισχύει δηλαδή $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Στους πίνακες το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης (δηλαδή ο πίνακας που θα προστεθεί σ' οποιονδήποτε άλλο πίνακα και δε θα τον μεταβάλει) είναι ο μηδενικός πίνακας. Είναι δηλαδή αυτός ο πίνακας που όλα του τα στοιχεία είναι 0. Συμβολίζεται $\mathbb{O}$ και ισχύει:

$$A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$$

Π.χ. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Γίνεται φανερό από το παράδειγμα ότι όλοι οι μηδενικοί πίνακες δεν είναι του ίδιου τύπου αλλά για απλούστευση συμβολίζονται με $\mathbb{O}$.

(δ) Αντίθετος πίνακας

Αν έχουμε έναν πίνακα $A_{\mu\times\nu}$ τότε ο αντίθετός του συμβολίζεται $-A$, είναι πίνακας $\mu\times\nu$ και τα στοιχεία του είναι τα αντίθετα των αντίστοιχων στοιχείων του A. Ισχύει:

$$A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{O}$$

Π.χ. Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ τότε ο $-A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

- **Αφαίρεση πινάκων**

Ορισμός: Διαφορά δύο πινάκων $\mu\times\nu$ $A = [\alpha_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$, λέγεται ο $\mu\times\nu$ πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ για τον οποίο κάθε στοιχείο του προκύπτει από την αφαίρεση των αντίστοιχων στοιχείων του πίνακα B από τα στοιχεία του A. Δηλαδή $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} - \beta_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \mu$ και $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Να βρείτε πίνακα X ώστε να ισχύει $X - A + B = \mathbb{O}$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Για να ορίζεται η αφαίρεση και η πρόσθεση μεταξύ πινάκων πρέπει να είναι του ίδιου τύπου. 'Αρα ο πίνακας X είναι 3×2. 'Εχουμε:

$$X - A + B = \mathbb{O} \quad \Leftrightarrow \quad X = A - B$$

'Αρα:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Τελικά:

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Μια τέτοια ισότητα μεταξύ πινάκων λέγεται εξίσωση. Ο πίνακας X είναι ο άγνωστος της εξίσωσης και η διαδικασία υπολογισμού του λέγεται επίλυση της εξίσωσης.

Εφαρμογή 2

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} \text{συν}x & \text{ημ}x \\ -\text{ημ}x & \text{συν}x \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \text{συν}x & -\text{ημ}x \\ \text{ημ}x & \text{συν}x \end{bmatrix}$$

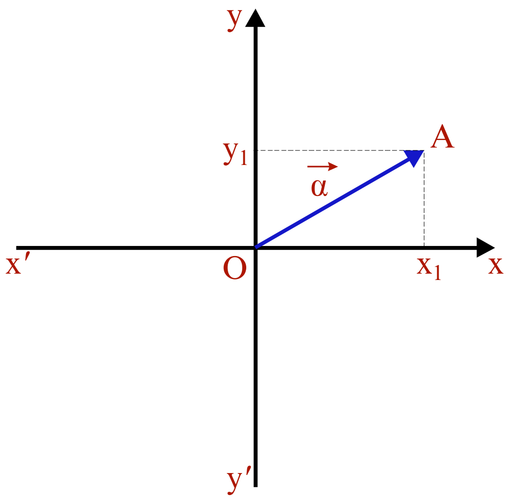
Να βρείτε το $x \in (0, \pi)$ για να ισχύει $A + B = \mathbb{O}$.

Λύση

Είναι $A + B = \begin{bmatrix} 2\text{συν}x & 0 \\ 0 & 2\text{συν}x \end{bmatrix}$, επομένως για να ισχύει $A + B = \mathbb{O}$ θα πρέπει $2\text{συν}x = 0$, άρα $x = \frac{\pi}{2}$.

Εφαρμογή 3

Κάθε διάνυσμα στο επίπεδο μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια πίνακα γραμμή ή στήλη των συντεταγμένων του όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



$$\vec{\alpha} = \vec{OA} = [\, x_1 \;\; y_1 \,] \quad ή \quad \vec{\alpha} = \vec{OA} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Για να προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε δύο διανύσματα, προσθέτουμε ή αφαιρούμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες τους. Αν π.χ.

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

τότε:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα με αρχή το O και τέλος το A ονομάζεται διάνυσμα θέσης ή διανυσματική ακτίνα του A.

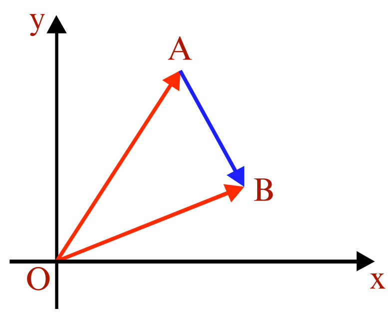
Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ αν γνωρίζετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων θέσης των σημείων A και B.

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι $\vec{OA} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ και $\vec{OB} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Τότε:

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

'Αρα $\vec{AB} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$



Τα παραπάνω εκφράζονται με την πρόταση:

«Οι συντεταγμένες ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ προκύπτουν αν από τις συντεταγμένες του τέλους B αφαιρέσουμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες της αρχής A»

1.5. Πολλαπλασιασμός αριθμού με Πίνακα

Μια εταιρεία παραγωγής και εμπορίας πλαστικών σωλήνων από σκληρό PVC (πολυβινυλ-χλωρίδιο) κατασκευάζει σωλήνες διαφορετικών διατομών και διαφορετικών τύπων, όσον αφορά το βάρος και το πάχος των τοιχωμάτων του σωλήνα. Ο επόμενος πίνακας δείχνει **το μέσο βάρος ανά μέτρο (kg/m)** σωλήνων με εξωτερική διάμετρο 200 χιλιοστά (Φ200) και 250 χιλιοστά (Φ250).

Εξ. διάμετρος / kg/m	Φ200	Φ250
Α	3,57	3,69
Β	4,47	5,62
Γ	5,16	7,01

Η εταιρεία πουλά τα προϊόντα της ανάλογα με το βάρος κάθε σωλήνα. 'Ετσι αν κοστολογεί με 604 δραχμές το ένα kg ο τιμοκατάλογος **δραχμών ανά μέτρο σωλήνα είναι**:

Εξ. διάμετρος / δρχ/m	Φ200	Φ250
Α	2156,28	2228,76
Β	2699,88	3394,48
Γ	3116,64	4234,04

Ο πίνακας αυτός προέκυψε από τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων του προηγούμενου πίνακα επί τον αριθμό 604, δηλαδή:

$$604 \cdot \begin{bmatrix} 3{,}57 & 3{,}69 \\ 4{,}47 & 5{,}62 \\ 5{,}16 & 7{,}01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2156{,}28 & 2228{,}76 \\ 2699{,}88 & 3394{,}48 \\ 3116{,}64 & 4234{,}04 \end{bmatrix}$$

Να κατασκευάσετε πίνακα τιμοκατάλογο για τρίμετρους και εξάμετρους σωλήνες των παραπάνω τύπων.

Ορισμός: Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με έναν πίνακα $A = [\alpha_{ij}]_{\mu\times\nu}$, λέγεται ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A με τον αριθμό λ. Έχουμε τότε $\lambda A = [\lambda\alpha_{ij}]$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \mu$ και $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

- **Ιδιότητες**

Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και A, B είναι πίνακες του ίδιου τύπου, τότε ισχύουν:

(α) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(β) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

(γ) $(\lambda\cdot\mu)A = \lambda(\mu A)$

(δ) $1\cdot A = A$

Είναι φανερό από τον ορισμό και τις προηγούμενες ιδιότητες ότι ισχύουν:

(1) $(-1)\,A = -A$

(2) $(-\lambda)\,A = -(\lambda A)$

(3) $\lambda A = \mathbb{O}$ αν και μόνο αν $\lambda = 0$ ή $A = \mathbb{O}$.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Η ανάλυση εξόδων μιας πολυκατοικίας 5 οροφοδιαμερισμάτων για το μήνα Φεβρουάριο είναι:

Κοινόχρηστα	Ασανσέρ	Θέρμανση	Ειδικά Έξοδα
76.500	14.000	60.050	12.150

Αν η αναλογία επιβάρυνσης κατά διαμέρισμα συνολικά (χωρίς ειδικές αναλογίες για θέρμανση - ασανσέρ κ.λ.π) είναι για το διαμέρισμα του 1ου ορόφου 150‰, του 2ου ορόφου 170‰, του 3ου ορόφου 200‰, του 4ου ορόφου 230‰ και του 5ου ορόφου 250‰.

(α) Να φτιάξετε έναν πίνακα που να αναλύει τα έξοδα κατά κατηγορία σε κάθε διαμέρισμα.

(β) Αν το Μάρτιο υποθέσουμε ότι μειώνεται κατά 10% η κατανάλωση για τη θέρμανση αλλά αυξάνονται τα ειδικά έξοδα (έξοδα κήπου - συντήρηση αποχετεύσεων κ.λπ) κατά 30% και θεωρήσουμε ότι τα άλλα έξοδα παραμένουν σταθερά, ποιός θα είναι ο πίνακας εξόδων κατά κατηγορία σε κάθε διαμέρισμα; Πόσο θα πληρώσει συνολικά το κάθε διαμέρισμα το μήνα Μάρτιο;

Λύση

(α) Τα έξοδα κατά κατηγορία προκύπτουν από τους πολ/σμούς:

$$\text{(i)}\quad 76.500\cdot\begin{bmatrix}0,15\\0,17\\0,20\\0,23\\0,25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11.475\\13.005\\15.300\\17.595\\19.125\end{bmatrix}\text{για τα κοινόχρηστα}$$

$$\text{(ii)}\quad 14.000\cdot\begin{bmatrix}0,15\\0,17\\0,20\\0,23\\0,25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.100\\2.380\\2.800\\3.220\\3.500\end{bmatrix}\text{για το ασανσέρ}$$

$$\text{(iii)}\quad 60.050\cdot\begin{bmatrix}0,15\\0,17\\0,20\\0,23\\0,25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.007,5\\10.208,5\\12.010\\13.811,5\\15.012,5\end{bmatrix}\text{για τη θέρμανση και}$$

$$\text{(iv)}\quad 12.150\cdot\begin{bmatrix}0,15\\0,17\\0,20\\0,23\\0,25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.822,5\\2.065,5\\2.430\\2.794,5\\3.037,5\end{bmatrix}\text{για τα ειδικά έξοδα}$$

'Αρα ο αναλυτικός πίνακας εξόδων για το κάθε διαμέρισμα είναι:

Έξοδα / Διαμέρισμα	Κοινόχρηστα	Ασανσέρ	Θέρμανση	Ειδ. Έξοδα	
1^o	11.475	2.100	9.007,5	1.822,5	24.405
2^o	13.005	2.380	10.208,5	2.065,5	27.659
3^o	15.300	2.800	12.010	2.430	32.540
4^o	17.595	3.220	13.811,5	2.794,5	37.421
5^o	19.125	3.500	15.012,5	3.037,5	40.675
	76.500	14.000	60.050	12.150	Σύνολο ανά διαμέρ. / Σύνολο ανά κατηγορία

(β) Το μήνα Μάρτιο θα μειωθεί η κατανάλωση για τη θέρμανση κατά 10% άρα η στήλη της θέρμανσης θα προκύψει από τον πολ/σμό:

$$60.050 \cdot 0{,}90 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}17 \\ 0{,}20 \\ 0{,}23 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα, η στήλη των ειδικών εξόδων θα προκύψει από τον πολ/σμό:

$$12.150 \cdot 1{,}30 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}17 \\ 0{,}20 \\ 0{,}23 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Οι υπόλοιπες στήλες θα παραμείνουν αμετάβλητες και για να υπολογίσουμε πόσο θα πληρώσει το μήνα Μάρτιο κάθε διαμέρισμα θα έχουμε:

$$(76.500 + 14.000 + 60.050 \cdot 0{,}90 + 12.150 \cdot 1{,}30) \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}17 \\ 0{,}20 \\ 0{,}23 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} =$$

$$= 160.340\begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}17 \\ 0{,}20 \\ 0{,}23 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.051 \\ 27.257{,}8 \\ 32.068 \\ 36.878{,}2 \\ 40.085 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 2

Αν για τους πίνακες τύπου $\nu\times\nu$ A και B ισχύουν:

$$\lambda A = B \ (1) \quad \text{και} \quad (\lambda^2 + 1)B = 2\lambda^2 A \ (2)$$

να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $A = B$.

Λύση

'Εχουμε $\lambda A = B$. 'Αρα:

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda A) = 2\lambda^2 A \Leftrightarrow [(\lambda^2 + 1)\lambda]A = 2\lambda^2 A \Leftrightarrow$$
$$\lambda[(\lambda^2 + 1) - 2\lambda]A = \mathbb{O} \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)^2 A = \mathbb{O}$$

'Αρα $\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$ ή $A = \mathbb{O}$.

- Αν $\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$ τότε $\lambda = 1$ (αφού $\lambda \in \mathbb{R}^*$) και από (1) έχουμε $A = B$.
- Αν $A = \mathbb{O}$ τότε πάλι από (1) έχουμε $B = \mathbb{O}$, άρα $A = B$.

Εφαρμογή 3

Αν $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ και $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει: $2x\cdot A + y\cdot B = 3\Gamma$.

Λύση

'Εχουμε:

$$2x\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x & 2x \\ 2x & -4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & -y \\ 2y & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y=3 \\ 2x-y=0 \\ 2x+2y=6 \\ -4x+2y=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y=3 \\ 2x-y=0 \\ 2(x+y)=6 \\ -2(2x-y)=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=1 \\ y=2 \end{array} \right\}$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} x^2-6x+9 & 0 \\ 0 & x^2-9 \end{bmatrix}$ είναι μηδενικός όταν:

(α) $x=3$ (β) $x=-3$ (γ) $x=6$

Κυκλώστε τη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε.

'Ασκηση 2

Στις επόμενες περιπτώσεις να υπολογίσετε τους A + B και A – B, εφόσον βέβαια ορίζονται:

(α) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (β) $A=[\,2\ \ 1\ \ 0\,], B=[\,-2\ \ -1\ \ 0\,]$

(γ) $A=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ (δ) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

'Ασκηση 3

Να βρείτε τις τιμές των x, $y \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x^2 & x \\ y^2 & 4 \\ x^2+6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & y \\ 1 & 5y \\ 5x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -y^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

'Ασκηση 4

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (β) $X + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (δ) $X + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) στους επόμενους ισχυρισμούς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α) Το άθροισμα και η διαφορά δύο διαγώνιων πινάκων τύπου ν×ν είναι διαγώνιος πίνακας ν×ν.

(β) Το άθροισμα και η διαφορά δύο τριγωνικών άνω (ή κάτω) πινάκων είναι τριγωνικός άνω (ή κάτω) πίνακας.

(γ) Ο μηδενικός είναι διαγώνιος πίνακας.

'Ασκηση 2

Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Να υπολογίσετε τον πίνακα $3A - 2B$.

(β) Να βρείτε πίνακα X τέτοιο ώστε $3A - 2X = 2B + 5X$.

'Ασκηση 3

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε πίνακες X και Ψ για τους οποίους ισχύουν:

$$\left.\begin{array}{r} 2X - A = \Psi - 2B \\ X - 2B = A - \Psi \end{array}\right\}$$

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Οι ημερήσιες πωλήσεις εφημεριδών από το περίπτερο μιας συνοικίας αριθμούν σε φύλλα όπως δείχνουν οι επόμενοι πίνακες:

1η ημέρα

	Αθλητικές	Πολιτικές	Οικονομικές
Πρωί	25	20	20
Απόγευμα	5	60	4

2η ημέρα

	Αθλητικές	Πολιτικές	Οικονομικές
Πρωί	20	22	25
Απόγευμα	4	65	8

Αν ονομάσουμε M τον πίνακα πωλήσεων της 1ης ημέρας και N τον πίνακα πωλήσεων της 2ης ημέρας, υπολογίστε τον $M + N$. Ποιά είναι η ερμηνεία που δίνετε για τον πίνακα $M + N$;

'Ασκηση 2

Τα τρίποντα, δίποντα και οι ελεύθερες βολές που πέτυχαν, εντός και εκτός έδρας, στις τέσσερεις πρώτες αγωνιστικές του πρωταθλήματος μπάσκετ τρεις ομάδες δίνονται παρακάτω:

ΠΟΝΤΟΙ / ΟΜΑΔΕΣ	ΤΡΙΠΟΝΤΑ		ΔΙΠΟΝΤΑ		ΕΛ. ΒΟΛΕΣ	
	Εντός	Εκτός	Εντός	Εκτός	Εντός	Εκτός
1η Ομάδα	28	16	60	48	40	36
2η Ομάδα	24	20	68	56	52	44
3η Ομάδα	32	12	84	76	44	68

(α) Να γραφούν τα δεδομένα με μορφή τριών πινάκων Α, Β, Γ που να περιέχουν αντίστοιχα τα τρίποντα, δίποντα και τις ελεύθερες βολές της κάθε ομάδας.

(β) Να βρεθεί ένας πίνακας ο οποίος δίνει τους συνολικούς πόντους κάθε ομάδας, εντός και εκτός έδρας.

'Ασκηση 3

Η κατανάλωση ρεύματος σε κιλοβατώρες, δύο οικογενειών ανά τετράμηνο δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	Α′ ΤΕΤΡ.	Β′ ΤΕΤΡ.	Γ′ ΤΕΤΡ.
1η Οικογένεια	1828	1700	1560
2η Οικογένεια	2230	1920	1870

Αν η κιλοβατώρα κοστίζει 35 δρχ. και το πάγιο κάθε τετραμήνου είναι 4450 δρχ:

(α) Να παραστήσετε μ' έναν πίνακα Χ τα ποσά που θα πληρώνει κάθε οικογένεια ανά τετράμηνο.

(β) Να βρείτε πόσα χρήματα θα πλήρωναν οι ίδιες οικογένειες, αν μείωναν την κατανάλωση ρεύματος κατά 10%.

1.6. Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Το προσωπικό μιας εταιρείας κατασκευών ανταλλακτικών αυτοκινήτων κατανέμεται σε τρεις κατηγορίες στις οποίες ανήκουν έμπειροι, εξειδικευμένοι και ανειδίκευτοι εργαζόμενοι. Η εταιρεία έχει δύο εργοστάσια κατασκευών και το προσωπικό είναι κατανεμημένο ως ακολούθως:

	Έμπειροι	Εξειδικευμένοι	Ανειδίκευτοι
1ο Εργοστάσιο	20	18	40
2ο Εργοστάσιο	15	20	30

Η αμοιβή των εργαζομένων κατά κατηγορία τις εργάσιμες ημέρες και η αποζημίωσή τους τις ημέρες αργίας, σε χιλιάδες δραχμές, είναι:

	Εργάσιμες	Αργίες
Έμπειροι	20	18
Εξειδικευμένοι	15	13
Ανειδίκευτοι	10	8

Για να βρούμε την ημερήσια δαπάνη της εταιρείας και στα δύο εργοστάσια έχουμε:

1ο Εργοστάσιο: $20\cdot 20 + 18\cdot 15 + 40\cdot 10$ για εργάσιμη μέρα
$20\cdot 18 + 18\cdot 13 + 40\cdot 8$ για αργία

2ο Εργοστάσιο: $15\cdot 20 + 20\cdot 15 + 30\cdot 10$ για εργάσιμη μέρα
$15\cdot 18 + 20\cdot 13 + 30\cdot 8$ για αργία

Αν όλα τα παραπάνω θέλουμε να τα αποδόσουμε με πίνακες τότε:

$A = \begin{bmatrix} 20 & 18 & 40 \\ 15 & 20 & 30 \end{bmatrix}$ ονομάζουμε τον 2×3 πίνακα εργαζομένων στα δύο εργοστάσια.

$B = \begin{bmatrix} 20 & 18 \\ 15 & 13 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$ ονομάζουμε τον 3×2 πίνακα των αποδοχών τους τις εργάσιμες ημέρες και των αποζημιώσεων τις αργίες.

και ο πίνακας $\Gamma = \begin{bmatrix} 20\cdot 20 + 18\cdot 15 + 40\cdot 10 & 20\cdot 18 + 18\cdot 13 + 40\cdot 8 \\ 15\cdot 20 + 20\cdot 15 + 30\cdot 10 & 15\cdot 18 + 20\cdot 13 + 30\cdot 8 \end{bmatrix}$ είναι ο 2×2 πίνακας ημερήσιας δαπάνης της εταιρείας για εργάσιμες και για ημέρες αργίας και στα δύο εργοστάσιά της.

Ο πίνακας Γ λέγεται γινόμενο του πίνακα Α με τον πίνακα Β και συμβολίζεται Α·Β. **Παρατηρήστε ότι το στοιχείο γ_{11} του πίνακα Γ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του πίνακα Α με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης του πίνακα Β και προσθέσουμε τα γινόμενα**. Αυτή η διαδικασία γίνεται για όλα τα στοιχεία του πίνακα Γ όπως φαίνεται στο επόμενο σχεδιάγραμμα, που δείχνει και το μηχανισμό της πράξης του πολλαπλασιασμού πινάκων. Για παράδειγμα, το στοιχείο γ_{21} του πίνακα Γ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 2ης γραμμής του Α με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1ης στήλης του Β και προσθέσουμε τα γινόμενα, δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

ή $\gamma_{21} = 15 \cdot 20 + 20 \cdot 15 + 30 \cdot 10$.

Ορισμός: Αν Α είναι ένας πίνακας μ×ρ και Β ένας πίνακας ρ×ν, ονομάζουμε γινόμενο του πίνακα Α με τον πίνακα Β και τον συμβολίζουμε Α·Β έναν πίνακα μ×ν του οποίου το κάθε στοιχείο γ_{ij} (i γραμμής και j στήλης) προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της i γραμμής του πίνακα Α με τα αντίστοιχα στοιχεία της j στήλης του πίνακα Β και προσθέσουμε τα γινόμενα. Δηλαδή:

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \cdots + \alpha_{i\rho}\beta_{\rho j}$$

Σχηματικά έχουμε:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{i-γραμμή} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\rho} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{\alpha_{i1} \cdots \alpha_{i\rho}} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \cdots & \alpha_{\mu\rho} \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \qquad\quad \text{j-στήλη} \\ \qquad\quad \downarrow \\ \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1j} & \cdots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \cdots & \beta_{2j} & \cdots & \beta_{2\nu} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{\rho 1} & \cdots & \beta_{\rho j} & \cdots & \beta_{\rho\nu} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1j} & \cdots & \gamma_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{i1} & \cdots & \boxed{\gamma_{ij}} & \cdots & \gamma_{i\nu} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{\mu 1} & \cdots & \gamma_{\mu j} & \cdots & \gamma_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Προσοχή στους τύπους των πινάκων: $\boxed{\underset{\mu\times\rho}{A} \cdot \underset{\rho\times\nu}{B} = \underset{\mu\times\nu}{\Gamma}}$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε πίνακες τέτοιους ώστε ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα να έχει το ίδιο πλήθος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα.

Παραδείγματα

Να βρείτε, όταν ορίζεται ο πολλαπλασιασμός, τα γινόμενα AB και BA στις επόμενες περιπτώσεις:

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Εδώ ορίζεται το γινόμενο AB αφού ο A είναι 3×2 πίνακας και ο B είναι 2×3 πίνακας.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot1 + 1\cdot3 & 2\cdot0 + 1\cdot3 & 2\cdot2 + 1\cdot1 \\ 1\cdot1 + 3\cdot3 & 1\cdot0 + 3\cdot3 & 1\cdot2 + 3\cdot1 \\ 0\cdot1 + 4\cdot3 & 0\cdot0 + 4\cdot3 & 0\cdot2 + 4\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 10 & 9 & 5 \\ 12 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

Επίσης ορίζεται γαι το γινόμενο BA αφού ο B είναι 2×3 πίνακας και ο A είναι 3×2 πίνακας.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot2 + 0\cdot1 + 2\cdot0 & 1\cdot1 + 0\cdot3 + 2\cdot4 \\ 3\cdot2 + 3\cdot1 + 1\cdot0 & 3\cdot1 + 3\cdot3 + 1\cdot4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι $AB \neq BA$.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Εδώ ορίζεται το γινόμενο AB αφού ο A είναι 2×2 πίνακας και ο B είναι 2×1 πίνακας.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3x + y \end{bmatrix}$$

Δεν ορίζεται όμως ο BA αφού ο B είναι 2×1 και ο A είναι 2×2.

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Εδώ ορίζονται τα γινόμενα ΑΒ και ΒΑ αφού οι πίνακες Α, Β είναι τετραγωνικοί 2×2.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

και εδώ φαίνεται ότι $AB \neq BA$.

Επιπλέον, έχουμε δύο πίνακες μη μηδενικούς που έχουν γινόμενο τον μηδενικό πίνακα. ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ λοιπόν στον πολλαπλασιασμό πινάκων η ιδιότητα $A \cdot B = \mathbb{0} \Leftrightarrow A = \mathbb{0}$ ή $B = \mathbb{0}$. Απλά όταν ένας εκ των δύο πινάκων είναι ο μηδενικός, τότε το γινόμενό τους είναι $\mathbb{0}$.

- **Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων**

Αν λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί και Α, Β, Γ πίνακες, τότε ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται κάθε φορά οι πράξεις που σημειώνονται.

(α) $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$ προσεταιριστική ιδιότητα

(β) $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$ και $(B + \Gamma)A = BA + \Gamma A$ επιμεριστική ιδιότητα

(γ) $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$

Σημειώσεις:

(i) Στα προηγούμενα παραδείγματα έγινε κατανοητό ότι δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων. Αν λοιπόν έχουμε να πολλαπλασιάσουμε μια σειρά πινάκων $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_\kappa$, το γινόμενο θα είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεσθεί ο πολλαπλασιασμός, αρκεί να μην αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων. Π.χ. $[A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)] \cdots A_\kappa$.

(ii) Αν επιπλέον $A_1 = A_2 = \cdots = A_\kappa = A$, τότε έχουμε $A_1 A_2 \cdots A_\kappa = A^\kappa$.

Ορισμός: Δύναμη ενός $\nu\times\nu$ πίνακα Α με εκθέτη θετικό ακέραιο κ, ορίζουμε τον πίνακα $A^\kappa = \underbrace{A\cdot A\cdot A\cdots A}_{\kappa\text{-παράγοντες}}$.

'Οταν κ = 1 έχουμε $A^1 = A$.

Αν κ, λ θετικοί ακέραιοι και ρ πραγματικός αριθμός, ισχύουν:

- $A^\kappa A^\lambda = A^{\kappa+\lambda} = A^\lambda A^\kappa$
- $(A^\kappa)^\lambda = A^{\kappa\cdot\lambda} = (A^\lambda)^\kappa$
- $(\rho A)^\kappa = \rho^\kappa A^\kappa$

- **Μοναδιαίος πίνακας**

Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ και τον 2×2 πίνακα $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι:

$$A\cdot I_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

και

$$I_2\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

δηλαδή $A\cdot I_2 = I_2\cdot A = A$ για οποιονδήποτε 2×2 πίνακα Α.

Ορισμός: Ορίζουμε ως μοναδιαίο πίνακα $\nu\times\nu$ το διαγώνιο πίνακα που όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του είναι ίσα με 1 και συμβολίζουμε:

$$I_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Αν Α είναι **οποιοσδήποτε τετραγωνικός πίνακας** $\nu\times\nu$ ισχύει:

$$A\cdot I_\nu = I_\nu\cdot A = A$$

Σημειώσεις:

(i) $(I_\nu)^\kappa = I_\nu$ για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο κ.

(ii) Αν ο πίνακας Α είναι μ×ν τύπου τότε ισχύει $A\cdot I_\nu = A$ και $I_\mu \cdot A = A$.

π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ και

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(iii) Τον πίνακα I_ν θα τον γράφουμε απλούστερα Ι όταν είναι φανερός ο τύπος του από τις πράξεις με τους άλλους πίνακες.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Να αποδείξετε ότι $A^2 + B^2 = (A+B)^2$. Ποιό είναι το συμπέρασμά σας;

Λύση

Είναι:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

'Αρα: $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$ (1)

Επίσης $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$, οπότε:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

'Αρα: $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $A^2 + B^2 = (A+B)^2$.

Το συμπέρασμα είναι ότι γενικά στους πίνακες δεν ισχύουν οι ταυτότητες που γνωρίζουμε στους πραγματικούς αριθμούς. Αυτό συμβαίνει γιατί στους πίνακες δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ($AB \neq BA$).

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αν θέλαμε να υπολογίσουμε τον πίνακα $(A+B)^2$ διαφορετικά, θα είχαμε:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Δικαιολογήστε, κάνοντας τις πράξεις μεταξύ των πινάκων, γιατί είναι $AB + BA = \mathbb{O}$.

Εφαρμογή 2

Θεωρούμε τον ν×ν πίνακα Α. Δικαιολογήστε γιατί ισχύει η σχέση $(3A + 2I)^2 = 9A^2 + 12A + 4I$. Ποιό είναι το γενικότερο συμπέρασμά σας;

Λύση

Είναι:

$$(3A+2I)^2 = (3A+2I)(3A+2I) =$$
$$(3A)(3A) + (3A)(2I) + (2I)(3A) + (2I)(2I) =$$
$$3^2A^2 + (3\cdot 2)A + (2\cdot 3)A + 2^2I^2 = 9A^2 + 12A + 4I$$

Αφού για τους πίνακες 3Α, 2Ι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού:

$$\left.\begin{array}{l}(3A)(2I) = 6A\\(2I)(3A) = 6A\end{array}\right\} \text{άρα } (3A)(2I) = (2I)(3A)$$

ισχύει και η γνωστή ταυτότητα του διωνύμου στο τετράγωνο. Γενικά, για αυτούς τους πίνακες ισχύουν πάντα οι ταυτότητες.

Εφαρμογή 3

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } \Gamma = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τα γινόμενα ΑΒ και ΑΓ και να δικαιολογήσετε γιατί δεν ισχύει η ιδιότητα $AB = A\Gamma \Rightarrow B = \Gamma$ (νόμος της διαγραφής).

Λύση

Είναι φανερό ότι $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ και $A\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ άρα $AB = A\Gamma$.
'Ομως από την ισότητα $AB = A\Gamma$ δε μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι $B = \Gamma$.

Εφαρμογή 4

Θεωρούμε τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(α) Να υπολογίσετε τους πίνακες A^2 και A^{20}.

(β) Αν επιπλέον ισχύει: $A^{20} + \alpha A^2 + 7\beta I = \mathbb{O}$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta + 7^9 = 0$.

Λύση

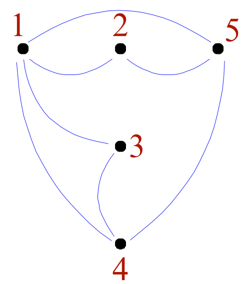
(α) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 7I$

$A^{20} = (A^2)^{10} = (7I)^{10} = 7^{10} \cdot I^{10} = 7^{10} \cdot I$

(β) $A^{20} + \alpha A^2 + (7\beta)I = \mathbb{O} \Leftrightarrow 7^{10}I + \alpha(7I) + (7\beta)I = \mathbb{O} \Leftrightarrow$
$(7^9 + \alpha + \beta)(7I) = \mathbb{O}$ και αφού $7I \neq \mathbb{O}$ τότε $7^9 + \alpha + \beta = 0$.

Εφαρμογή 5

Θεωρούμε πέντε Τηλεφωνικά Κέντρα και τα συμβολίζουμε με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5. Από αυτά άλλα συνδέονται με απλή σύνδεση (π.χ. το 1 με το 4) και άλλα με συνδυασμό απλών συνδέσεων (π.χ. το 2 με το 4), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι συνδέσεις αυτές περιγράφονται με έναν 5×5 πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ που ορίζεται κάθε στοιχείο του ως εξής:



$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad i = j \\ 0 & \text{αν} \quad i \neq j \quad \text{και τα τηλεφ. κέντρα } i, j \\ & \qquad\qquad\quad \text{δεν συνδέονται με απλή σύνδεση} \\ 1 & \text{αν} \quad i \neq j \quad \text{και τα τηλεφ. κέντρα } i, j \\ & \qquad\qquad\quad \text{συνδέονται με απλή σύνδεση} \end{cases}$$

(α) Να ορίσετε τον πίνακα Α.
(β) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^2 και να ερμηνεύσετε τι εκφράζουν τα στοιχεία του.

Λύση

(α) Ο 5×5 πίνακας Α είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και παριστάνει τις απλές συνδέσεις κάθε τηλεφωνικού κέντρου με τα υπόλοιπα.

(β) $$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Το τυχαίο στοιχείο β_{ij} του πίνακα A^2 μας πληροφορεί για το **πλήθος** των συνδέσεων του κέντρου i με το κέντρο j, **με δύο (2) απλές συνδέσεις**. Δηλαδή $\beta_{24} = 2$ σημαίνει ότι το τηλεφωνικό κέντρο 2 συνδέεται με το τηλεφωνικό κέντρο 4 με τις εξής απλές συνδέσεις: 21 – 14 και 25 – 54. Μπορεί να συνδέεται και με τη σύνδεση 21 – 13 – 34 αλλά αυτή είναι μια τριπλή σύνδεση και δεν αφορά τον πίνακα A^2. 'Ομοια $\beta_{55} = 3$ σημαίνει ότι το τηλεφωνικό κέντρο 5 συνδέεται με το τηλεφωνικό κέντρο 5 με τις τρεις απλές συνδέσεις: 51 – 15, 54 – 45, 52 – 25. 'Ομοια συμπεράσματα έχουμε και για τα υπόλοιπα στοιχεία.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων, όπου αυτά ορίζονται:

(α) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(β) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

(δ) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(ε) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(στ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

'Ασκηση 2

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$. Ποιό γενικότερο συμπέρασμα εξάγεται;

'Ασκηση 3

Αν α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου ΑΒΓ και για τους πίνακες:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad M = \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & -\beta \end{bmatrix}$$

ισχύει $\Lambda^2 = M^2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

'Ασκηση 4

Θεωρούμε τους 3×3 διαγώνιους πίνακες Α και Β.

(α) Δείξτε ότι:

(i) ΑΒ διαγώνιος (ii) ΑΒ = ΒΑ

(β) Ισχύουν τα ίδια αν οι πίνακες είναι 3×3 τριγωνικοί άνω (ή κάτω);

'Ασκηση 5

Ποιοί από τους επόμενους πίνακες είναι σίγουρα ίσοι με τον πίνακα $(A + B)^2$;

(i) $(B + A)^2$

(ii) $A^2 + 2AB + B^2$

(iii) $A(A + B) + B(A + B)$

(iv) $A^2 + AB + BA + B^2$

Για κάθε έναν που νομίζετε ότι είναι ίσος με τον $(A + B)^2$, δικαιολογήστε την απάντησή σας.

'Ασκηση 6

Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ όπου $\alpha, \beta \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι $A^2 = \alpha \cdot A$.

(β) Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι από την ισότητα $A^2 = \alpha \cdot A$ προκύπτει η ισότητα $A = \alpha \cdot I$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

'Ασκηση 7

Θεωρούμε δύο πίνακες 3×3 A και B. Σημειώστε ποιους από τους επόμενους ισχυρισμούς θεωρείτε σωστούς (Σ) ή λάθος (Λ). Δικαιολογήστε την απάντησή σας στους σωστούς ισχυρισμούς και δώστε ένα αριθμητικό αντιπαράδειγμα στους λάθος ισχυρισμούς.

(α) Αν η πρώτη και η τρίτη στήλη του B είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη στήλη του AB είναι ίδιες.

(β) Αν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του B είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη γραμμή του AB είναι ίδιες.

(γ) Αν η πρώτη και η τρίτη γραμμή του A είναι ίδιες, τότε και η πρώτη με την τρίτη γραμμή του AB είναι ίδιες.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Αν ο A είναι πίνακας τύπου $\mu \times 1999$, ο B είναι πίνακας τύπου $\kappa \times \lambda$ και ισχύει $AB = BA$, να βρείτε τους κ, λ, μ.

'Ασκηση 2

Βρείτε, με δοκιμές, πίνακες 2×2 τέτοιους ώστε:

(α) $A^2 = -I$, με στοιχεία του A πραγματικούς αριθμούς.

(β) $B^2 = \mathbb{O}$, με κάποια στοιχεία του B διάφορα του μηδενός.
(γ) $\Gamma\Delta = -\Delta\Gamma$, εκτός της περίπτωσης όπου $\Gamma\Delta = \mathbb{O}$.
(δ) $EZ = \mathbb{O}$, με όλα τα στοιχεία των E και Z μη μηδενικά.

'Ασκηση 3

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & -2 \end{bmatrix}$.

(α) Δείξτε ότι $A^2 + A - (2 + \beta\gamma)I = \mathbb{O}$.
(β) Ισχύει $AB = BA$ τότε και μόνο τότε αν $A^2B = BA^2$.

'Ασκηση 4

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ βρείτε πραγματικούς αριθμούς x, y ώστε να ισχύει $A^2 = xA + yI$. Κατόπιν υπολογίστε τον πίνακα A^3 ως συνάρτηση των A και I.

'Ασκηση 5

Αν για τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2+3 & -\lambda \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ισχύει $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ υπολογίστε τον αριθμό λ. Για ποιές τιμές του λ ισχύει $AB + BA = \mathbb{O}$;

'Ασκηση 6

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ -\dfrac{2}{\lambda} & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $A^2 = -I$, $A^3 = -A$, $A^4 = I$
(β) $A^{99} + A^{100} + A^{101} = I$

1.7. Γραμμικά Συστήματα

Τα γραμμικά συστήματα παρουσιάζονται σε όλους τους κλάδους των θετικών και τεχνολογικών επιστημών. Στα Μαθηματικά, στη Μηχανική, στη Μηχανολογία, στις Επιχειρησιακές έρευνες κ.λπ. καλούμαστε να επιλύσουμε γραμμικά συστήματα. Τα συστήματα που παρουσιάζονται στην πράξη είναι πολύ μεγαλύτερα από αυτά που συναντά ο μαθητής. Τα γραμμικά συστήματα χωρίζονται σε μικρά (πλήθος εξισώσεων $\leqslant 100$), στα μεσαία ($100 <$ πλήθος εξισώσεων $\leqslant 500$) και στα μεγάλα (πλήθος εξισώσεων > 500).

Στη σύγχρονη τεχνολογία, τα συστήματα που παρουσιάζονται είναι συνήθως μεσαία και μεγάλα. Για την επίλυση τέτοιου μεγέθους γραμμικών συστημάτων απαιτείται η χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή (Η/Υ). Είναι αξιοσημείωτο ότι τα προγράμματα που χρησιμοποιούνται στον Η/Υ βασίζονται στον αλγόριθμο Gauss και απαιτούνται μόνο λίγα λεπτά για την επίλυση ενός μεσαίου συστήματος. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι ένα σύστημα 361 εξισώσεων με ισάριθμους αγνώστους ειδικής μορφής λύθηκε από την ομάδα Αριθμητικής Ανάλυσης του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων σε 2 μόλις λεπτά.

Παράδειγμα

Μια βιομηχανία χρησιμοποιεί τέσσερις μηχανές, με τις οποίες κατασκευάζει πέντε βιομηχανικά είδη. Ο αριθμός των ωρών που χρησιμοποιείται κάθε μηχανή για την κατασκευή μιας μονάδας από κάθε είδος δίνεται από τον πίνακα:

Μηχανές \ Είδη	1^o	2^o	3^o	4^o	5^o
$1^η$	1	1	2	2	1
$2^η$	2	1	3	1	0
$3^η$	0	2	1	1	1
$4^η$	1	1	0	0	3

Να βρείτε πόσες μονάδες από κάθε είδος θα κατασκευασθούν σε μια ημέρα, αν κάθε μηχανή λειτουργεί 8 ώρες την ημέρα.

Αν ονομάσουμε x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 τον αριθμό τον μονάδων που παράγονται από κάθε είδος μέσα σε μια ημέρα, τότε από την $1^η$ μηχανή παίρνουμε την εξίσωση: $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 8$. Αυτή ονομάζεται γραμμική εξίσωση με 5 αγνώστους. Μια λύση αυτής της εξίσωσης είναι η εξής:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1 \quad \text{ή αλλιώς} \quad (2, 3, 0, 1, 1)$$

Ορισμός 1: Κάθε εξίσωση με μορφή $\boldsymbol{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_\nu x_\nu = \beta}$ λέγεται γραμμική εξίσωση με ν αγνώστους. Οι πραγματικοί αριθμοί $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$, …, $\boldsymbol{\alpha_\nu}$ λέγονται συντελεστές των αγνώστων $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, …, $\mathbf{x_\nu}$ και ο πραγματικός αριθμός $\boldsymbol{\beta}$ λέγεται σταθερός όρος.

Ορισμός 2: **Λύση** της γραμμικής εξίσωσης λέγεται κάθε διατεταγμένη ν-άδα αριθμών $(s_1, s_2, \ldots, s_\nu)$ τέτοια ώστε η εξίσωση να επαληθεύεται αν θέσουμε $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_\nu = s_\nu$.

Το σύνολο των εξισώσεων που παίρνουμε από την παραγωγή των τεσσάρων μηχανών σε 8 ώρες είναι:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 0x_5 &= 8 \\ 0x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 8 \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 3x_5 &= 8 \end{aligned}$$

και λέγεται γραμμικό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με πέντε αγνώστους ή συντομότερα γραμμικό σύστημα $4{\times}5$. Γενικότερα, έχουμε ότι:

Ορισμός 3: 'Ενα πλήθος **μ** γραμμικών εξισώσεων με **ν** αγνώστους των οποίων ζητούμε τις κοινές λύσεις, λέγεται **γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους** ή πιο απλά **γραμμικό σύστημα μ×ν**.

Ορισμός 4: **Λύση** ενός γραμμικού συστήματος μ×ν λέγεται **κάθε διατεταγμένη ν-άδα αριθμών** που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις του συστήματος.

Μια λύση του παραπάνω γραμμικού συστήματος είναι η 5άδα (2, 3, 0, 1, 1) αφού επαληθεύει και τις τέσσερις εξισώσεις.

Ορισμός 5: **Συμβιβαστό** θα λέγεται ένα γραμμικό σύστημα μ×ν αν έχει λύση. 'Ενα συμβιβαστό σύστημα έχει ή μία λύση ή άπειρες.

Ορισμός 6: **Ισοδύναμα** θα λέγονται δύο γραμμικά συστήματα αν έχουν **ακριβώς τις ίδιες λύσεις**. Γράφουμε συμβολικά $(\Sigma_1) \sim (\Sigma_2)$ ή $(\Sigma_1) \Leftrightarrow (\Sigma_2)$.

Π.χ. $$\left\{\begin{array}{c} 2x + 4y = 6 \\ x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{array}\right\}$$

αφού έχουν και τα δύο μοναδική λύση τη δυάδα $(x, y) = (1, 1)$.

Ορισμός 7: **Αδύνατο** θα λέγεται το γραμμικό σύστημα που δεν έχει λύση.

- **Μορφή γραμμικού συστήματος με τη βοήθεια πινάκων**

Το σύστημα του προβλήματός μας γράφεται με τη βοήθεια πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

όπου ο 4×5 πίνακας Α είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, ο 5×1 πίνακας στήλη Χ είναι ο πίνακας των αγνώστων του προβλήματος και ο 4×1 πίνακας στήλη Β είναι ο πίνακας των σταθερών όρων. 'Ετσι απλούστερα γράφουμε το σύστημα με τη μορφή $A \cdot X = B$, δηλαδή με τη μορφή μιας εξίσωσης πινάκων.

Γενικότερα, ένα γραμμικό σύστημα $\mu\times\nu$ έχει τη μορφή:

$$\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu + \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_{\mu1}x_1 + \alpha_{\mu2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu = \beta_\mu \end{array}$$

Ο διπλός δείκτης κάθε συντελεστή του αγνώστου καθορίζει τη θέση του συντελεστή στο σύστημα. Ο πρώτος δείκτης κάθε συντελεστή δείχνει την εξίσωση στην οποία ανήκει ο συντελεστής και ο δεύτερος δείκτης δείχνει με ποιον άγνωστο πολλαπλασιάζεται. Π.χ. ο α_{23} είναι ο συντελεστής της δεύτερης εξίσωσης του τρίτου αγνώστου x_3.

Με τη βοήθεια πινάκων, το παραπάνω γραμμικό σύστημα $\mu\times\nu$ γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

ή $A \cdot X = B$, όπου A είναι ο πίνακας των συντελεστών, X ο πίνακας των αγνώστων και B ο πίνακας των σταθερών όρων.

- Αν όλοι οι σταθεροί όροι του γραμμικού συστήματος είναι μηδέν, τότε το σύστημα λέγεται ομογενές και γράφεται $A \cdot X = \mathbb{0}$.
- Ο πίνακας που προκύπτει από τους συντελεστές των αγνώστων και τους σταθερούς όρους ενός γραμμικού συστήματος:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{array}\right]$$

  λέγεται επαυξημένος πίνακας του συστήματος και παίζει σημαντικό ρόλο στην επίλυση του συστήματος. Η κατακόρυφη διακεκομμένη γραμμή απλώς χωρίζει τους συντελεστές των αγνώστων από τη στήλη των σταθερών όρων.

- **Επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss**

Αν σε ένα γραμμικό σύστημα εφαρμόσουμε μια από τις επόμενες διαδικασίες, τότε προκύπτει ισοδύναμο σύστημα.

- Μπορούμε να αλλάζουμε τη θέση δύο εξισώσεων.
- Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε με ένα μη μηδενικό αριθμό και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης.
- Μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη δύο εξισώσεις αφού πρώτα έχουμε πολλαπλασιάσει τη μία από αυτές με ένα μη μηδενικό αριθμό.

'Ετσι, όταν έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα, προσπαθούμε με τις παραπάνω διαδικασίες, να το μετασχηματίσουμε σε ένα άλλο ισοδύναμο σύστημα με φανερή λύση.

Παράδειγμα

Να επιλύσετε το 4×3 γραμμικό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} y+2\omega=1 \\ 2x+2y+2\omega=4 \\ -x+y+3\omega=0 \\ 2x-y+\omega=6 \end{array}\right\}$$

Λύση

$$\left.\begin{array}{r} y+2\omega=1 \\ 2x+2y+2\omega=4 \\ -x+y+3\omega=0 \\ 2x-y+\omega=6 \end{array}\right\} \underset{\sim}{\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2}$$

Ο συμβολισμός $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$ σημαίνει ότι αλλάζουμε τη θέση της πρώτης με τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. (Αυτό γίνεται για να υπάρχει στην πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη του συστήματος, άγνωστος με μη μηδενικό συντελεστή)

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y+2\omega=4 \\ y+2\omega=1 \\ -x+y+3\omega=0 \\ 2x-y+\omega=6 \end{array}\right\} \underset{\sim}{\varepsilon_1 \to \frac{1}{2}\varepsilon_1}$$

Ο συμβολισμός $\varepsilon_1 \to \frac{1}{2}\varepsilon_1$ σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης με $\frac{1}{2}$. (Αυτό γίνεται, γιατί μας διευκολύνει όπως θα δούμε παρακάτω, ο συντελεστής του πρώτου αγνώστου της πρώτης εξίσωσης να είναι 1)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\omega=2 \\ y+2\omega=1 \\ -x+y+3\omega=0 \\ 2x-y+\omega=6 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \varepsilon_3 \to \varepsilon_3+\varepsilon_1 \\ \sim \\ \varepsilon_4 \to \varepsilon_4+(-2)\varepsilon_1 \end{array}$$

Ο συμβολισμός $\varepsilon_3 \to \varepsilon_3 + \varepsilon_1$ σημαίνει ότι η τρίτη εξίσωση αντικαθίσταται από το άθροισμα της τρίτης με την πρώτη. (Αυτό γίνεται για να απαλείψουμε από την τρίτη εξίσωση τον άγνωστο x). 'Ομοια $\varepsilon_4 \to \varepsilon_4 + (-2)\varepsilon_1$ σημαίνει ότι η τέταρτη εξίσωση αντικαθίσταται από το άθροισμα της τέταρτης με το γινόμενο της πρώτης επί (–2). (Επίσης απαλείφεται ο άγνωστος x από την τέταρτη εξίσωση)

$$\left.\begin{array}{r} x+\ y\ +\omega=2 \\ y\ +2\omega=1 \\ 2y\ +4\omega=2 \\ -3y-\ \omega=2 \end{array}\right\} \underset{\varepsilon_4\to\varepsilon_4+3\varepsilon_2}{\overset{\varepsilon_3\to\varepsilon_3+(-2)\varepsilon_2}{\sim}}$$

'Ομοια απαλείφουμε τον άγνωστο y από την τρίτη και τέταρτη εξίσωση.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\omega=2 \\ y+2\omega=1 \\ 0y+0\omega=0 \\ 5\omega=5 \end{array}\right\} \overset{\varepsilon_4\to\frac{1}{5}\varepsilon_4}{\sim}$$

Η τρίτη εξίσωση παραλείπεται γιατί αληθεύει για οποιεσδήποτε τιμές των αγνώστων και για την τέταρτη εξίσωση γνωρίζουμε ήδη τον συμβολισμό.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\omega=2 \\ y+2\omega=1 \\ \omega=1 \end{array}\right\} \underset{\varepsilon_2\to\varepsilon_2+(-2)\varepsilon_3}{\overset{\varepsilon_1\to\varepsilon_1+(-1)\varepsilon_3}{\sim}}$$

Μπορούμε εδώ να σταματήσουμε τη διαδικασία και με αντικαταστάσεις να υπολογίσουμε τους αγνώστους. Συνεχίζουμε όμως και παριστάνουμε συμβολικά τους μετασχηματισμούς του συστήματος ώστε να καταλήξουμε στη λύση.

$$\left.\begin{array}{r} x+y\quad=1 \\ y\quad=-1 \\ \omega=1 \end{array}\right\} \overset{\varepsilon_1\to\varepsilon_1+(-1)\varepsilon_2}{\sim} \left\{\begin{array}{r} x\quad=2 \\ y\quad=-1 \\ \omega=1 \end{array}\right\}$$

και η λύση είναι (x, y, ω) = (2, –1, 1).

Είναι απλό να αντιληφθεί κανείς ότι οι άγνωστοι στην επίλυση του συστήματος δεν παίζουν ιδιαίτερο ρόλο. Το βασικό ρόλο τον έχουν οι συντελεστές των αγνώστων και οι σταθεροί όροι. Για το λόγο αυτό η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια του επαυξημένου πίνακα, του πίνακα δηλαδή των συντελεστών και των σταθερών όρων του συστήματος. Η διαδικασία που θα χρησιμοποιηθεί είναι αντίστοιχη αυτής που γνωρίσαμε με τις πράξεις μεταξύ των εξισώσεων και γίνεται με τη βοήθεια των γραμμών του επαυξημένου πίνακα που ονομάζονται γραμμοπράξεις. Ο συμβολισμός διατηρείται, αλλά αναφέρεται πλέον σε γραμμοπράξεις.

Αν Ε ονομάσουμε τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος τότε:

$$E=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \overset{\gamma_1\leftrightarrow\gamma_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \overset{\gamma_1\to\frac{1}{2}\gamma_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \underset{\gamma_4 \to \gamma_4 + (-2)\gamma_1}{\overset{\gamma_3 \to \gamma_3 + \gamma_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{\gamma_4 \to \gamma_4 + 3\gamma_2}{\overset{\gamma_3 \to \gamma_3 + (-2)\gamma_2}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \overset{\gamma_4 \to \frac{1}{5}\gamma_4}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_3}{\overset{\gamma_1 \to \gamma_1 + (-1)\gamma_3}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\gamma_1 \to \gamma_1 + (-1)\gamma_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x, y, \omega) = (2, -1, 1)$.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να περιγραφεί με τον επόμενο αλγόριθμο:

Βήμα 1^{ο}: Βρίσκουμε την πρώτη στήλη του πίνακα που περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.

Βήμα 2^{ο}: Μεταφέρουμε στον πίνακα, πρώτη τη γραμμή που περιέχει το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης (1^{η} γραμμοπράξη).

Βήμα 3^{ο}: Κάνουμε το μη μηδενικό στοιχείο της στήλης μονάδα (2^{η} γραμμοπράξη).

Βήμα 4^{ο}: Κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που είναι κάτω από τη μονάδα, μηδενικά (3^{η} γραμμοπράξη)

Βήμα 5^{ο}: Αγνοούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 4 για τις επόμενες γραμμές του πίνακα. Αν όμως οι γραμμές που απέμειναν είναι μηδενικές, πηγαίνουμε στο 6^{ο} βήμα.

Βήμα 6^{ο}: Από γραμμή σε γραμμή, χρησιμοποιώντας το πρώτο αριστερά 1 κάθε γραμμής και την 3^{η} γραμμοπράξη, κάνουμε όλα τα στοιχεία της στήλης που βρίσκεται η μονάδα αυτή, μηδενικά. Δηλαδή κάνουμε μηδενικά και τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από τη μονάδα.

Ο παραπάνω αλγόριθμος ολοκληρώνεται όταν σε κάθε μη μηδενική γραμμή το πρώτο αριστερά 1 είναι και το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει. Ονομάζεται και αλγόριθμος του Gauss.

Ο αλγόριθμος αυτός γίνεται εύκολα πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση γραμμικών συστημάτων πολλών εξισώσεων με πολλούς αγνώστους.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Ας επανέλθουμε στο εισαγωγικό μας πρόβλημα για να βρούμε πόσες μονάδες από κάθε είδος θα κατασκευασθούν σε μια μέρα. Το σύστημά μας ήταν:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 8\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 0x_5 &= 8\\
0x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 8\\
x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 3x_5 &= 8
\end{aligned}$$

και με τη βοήθεια του επαυξημένου πίνακα και του αλγορίθμου του Gauss έχουμε:

$$E = \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8\\
2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 8\\
0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 8\\
1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 8
\end{array}\right] \begin{array}{c} \gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_1 \\ \sim \\ \gamma_4 \to \gamma_4 + (-1)\gamma_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8\\
0 & -1 & -1 & -3 & -2 & -8\\
0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 8\\
0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0
\end{array}\right] \begin{array}{c} \gamma_2 \to (-1)\gamma_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8\\
0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 8\\
0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 8\\
0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0
\end{array}\right] \begin{array}{c} \gamma_3 \to \gamma_3 + (-2)\gamma_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 8\\
0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 8\\
0 & 0 & -1 & -5 & -3 & -8\\
0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0
\end{array}\right] \begin{array}{c} \gamma_3 \to (-1)\gamma_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & | & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\gamma_4 \to \gamma_4 + 2\gamma_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & | & 16 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\gamma_4 \to \frac{1}{8}\gamma_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \gamma_1 \to \gamma_1 + (-2)\gamma_4 \\ \gamma_2 \to \gamma_2 + (-3)\gamma_4 \\ \sim \\ \gamma_3 \to \gamma_3 + (-5)\gamma_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \gamma_1 \to \gamma_1 + (-2)\gamma_3 \\ \sim \\ \gamma_2 \to \gamma_2 + (-1)\gamma_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & | & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\gamma_1 \to \gamma_1 + (-1)\gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} x_1 + 2x_5 = 4 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_3 - 2x_5 = -2 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{matrix}\right\}$$

και αν θέσουμε $x_5 = t$ έχουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - 2t \\ x_2 &= 4 - t \\ x_3 &= -2 + 2t \\ x_4 &= 2 - t \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

που έχει **άπειρες λύσεις** για τις διάφορες πραγματικές τιμές του t. Επειδή οι μονάδες από κάθε είδος που παράγουν οι μηχανές είναι αριθμοί θετικοί ακέραιοι, πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες:

$$\begin{aligned} 4 - 2t &\geqslant 0 \\ 4 - t &\geqslant 0 \\ -2 + 2t &\geqslant 0 \\ 2 - t &\geqslant 0 \\ t &\geqslant 0 \end{aligned}$$

που δίνουν τον περιορισμό για το t: $1 \leqslant t \leqslant 2$.

Για $t = 1$ παίρνουμε ως λύση $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 3, 0, 1, 1)$ και για $t = 2$ παίρνουμε ως λύση $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 2, 0, 2)$.

Εφαρμογή 2

Να εξετάσετε αν το ακόλουθο σύστημα είναι συμβιβαστό:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Λύση

Το σύστημα με τη βοήθεια πινάκων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

και ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right] \underset{\gamma_4 \to \gamma_4 + 4\gamma_1}{\overset{\substack{\gamma_2 \to \gamma_2 + 2\gamma_1 \\ \gamma_3 \to \gamma_3 + 3\gamma_1}}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 9 \\ 0 & 1 & -3 & | & 22 \\ 0 & 2 & -2 & | & 33 \\ 0 & 3 & -2 & | & 43 \end{bmatrix} \underset{\gamma_4 \to \gamma_4 + (-3)\gamma_2}{\overset{\gamma_3 \to \gamma_3 + (-2)\gamma_2}{\sim}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 9 \\ 0 & 1 & -3 & | & 22 \\ 0 & 0 & 4 & | & -11 \\ 0 & 0 & 7 & | & -23 \end{bmatrix} \underset{\gamma_3 \to \frac{1}{4}\gamma_3}{\overset{\gamma_1 \to (-1)\gamma_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & -9 \\ 0 & 1 & -3 & | & 22 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 7 & | & -23 \end{bmatrix} \overset{\gamma_4 \to \gamma_4 + (-7)\gamma_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & -9 \\ 0 & 1 & -3 & | & 22 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

Η τελευταία εξίσωση μορφής $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -\frac{15}{4}$ είναι αδύνατη, άρα και το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Σημείωση:

(i) Αν κατά τη διάρκεια επίλυσης του συστήματος με τη μέθοδο Gauss εμφανισθεί στον επαυξημένο πίνακα γραμμή μορφής:

$$0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 \;|\; \alpha \neq 0$$

τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Αν εμφανισθεί γραμμή μορφής:

$$0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 \;|\; 0$$

τότε αυτή παραλείπεται και η διαδικασία συνεχίζεται.

(ii) 'Οταν σε ένα γραμμικό σύστημα το πλήθος των εξισώσεων είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό των αγνώστων, επιλέγουμε συνήθως τόσες εξισώσεις όσες είναι και οι άγνωστοι και λύνουμε με τη γνωστή διαδικασία το σύστημα αυτό. Κατόπιν εξετάζουμε αν η λύση που προκύπτει (αν το σύστημα είναι συμβιβαστό) επαληθεύει και τις υπόλοιπες εξισώσεις του συστήματος. Αν τις επαληθεύει τότε αυτή είναι η λύση του αρχικού συστήματος. Αν δεν τις επαληθεύει, το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο (παράδειγμα θεωρίας και εφαρμογή 2).

(iii) 'Οταν σε ένα γραμμικό σύστημα το πλήθος των εξισώσεων είναι μικρότερο από τον αριθμό των αγνώστων τότε το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις (εφαρμογή 1).

Εφαρμογή 3

Ας πάρουμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση AX = 3X είναι ομογενές σύστημα. Κατόπιν, να λύσετε το σύστημα αυτό με τη μέθοδο Gauss.

Λύση

(α) $AX = 3X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 5x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 5x_1 - x_2 + x_3 = 3x_1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3x_3 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

που είναι ομογενές σύστημα και έχει **μία προφανή λύση**, την $\mathbf{(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)}$.

(β) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$E = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\gamma_3 \to \gamma_3 + (-4)\gamma_1}{\overset{\gamma_2 \to \gamma_2 + (-2)\gamma_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & 14 & 0 \end{array}\right] \overset{\gamma_3 \to \gamma_3 + (-2)\gamma_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\gamma_2 \to \left(-\frac{1}{3}\right)\gamma_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 0 \end{array}\right] \overset{\gamma_1 \to \gamma_1 + (-1)\gamma_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$\left. \begin{matrix} x_1 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{3}x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

και αν θέσουμε $x_3 = t$ έχουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}t \\ x_2 &= \frac{7}{3}t \\ x_3 &= \ \ t \end{aligned}\right\}$$

που έχει άπειρες λύσεις για τις διάφορες πραγματικές τιμές του t $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2}{3}t, \frac{7}{3}t, t\right)$. Ο πραγματικός αριθμός t ονομάζεται «ελεύθερος άγνωστος».

Σημείωση:

Το ομογενές σύστημα όπως είδαμε στο (α) ερώτημα της εφαρμογής 3 έχει πάντα μια φανερή λύση που λέγεται μηδενική λύση. 'Αρα δεν είναι ποτέ αδύνατο. Σε αυτού του είδους τα συστήματα λοιπόν ή θα έχουμε μοναδική λύση τη μηδενική ή θα έχουμε άπειρες λύσεις.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

'Ασκηση 1

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} (2\lambda - 1)x + \mu y &= 7 \\ (\lambda - 2)x + (\mu - 1)y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει λύση $(x, y) = (2, 2)$.

'Ασκηση 2

Να επιλυθούν τα γραμμικά συστήματα:

(α) $\left.\begin{aligned} -y + \omega &= 4 \\ 2x + 2y + 6\omega &= 4 \\ 3x + 6y + 15\omega &= 9 \end{aligned}\right\}$ (β) $\left.\begin{aligned} x + 4y - 2\omega &= 4 \\ -x - 4y + 5\omega &= 13 \\ 2x + 8y - 2\omega &= -2 \end{aligned}\right\}$ (γ) $\left.\begin{aligned} -2x + 2y - 2\omega &= -18 \\ x - y - \omega &= 1 \\ 2x - 2y + 5\omega &= 33 \end{aligned}\right\}$

'Ασκηση 3

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(α) Υπολογίστε το γινόμενο $A \cdot B$.

(β) Αν $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ γράψτε το σύστημα που εκφράζει η εξίσωση πινάκων $A \cdot X = \mathbb{O}$ και διαπιστώστε ότι ο πίνακας B είναι μια λύση αυτού του συστήματος. Μπορείτε να βρείτε και άλλες λύσεις αυτού του συστήματος;

'Ασκηση 4

Δίνεται ο πίνακας A τύπου $(\kappa + \lambda) \times (2\kappa + \lambda - 1)$ και ο πίνακας B τύπου $(2\lambda - \kappa) \times (3\kappa - \lambda + 2)$. Να βρείτε τους ακέραιους κ, λ ώστε να ορίζεται το άθροισμα $A + B$ και το γινόμενο $A \cdot B$.

Σύνθετες Ασκήσεις

'Ασκηση 1

Να επιλυθούν τα γραμμικά συστήματα:

(α) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= -1 \\ 2x + y &= 1 \\ 5x + 4y &= -5 \end{aligned}\right\}$ (β) $\left.\begin{aligned} \lambda x + y &= 1 \\ x + y &= 1 \\ x + \lambda y &= 1 \end{aligned}\right\}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

'Ασκηση 2

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σύστημα:

$$\left\{ \begin{matrix} [\,x \;\; y \;\; \omega\,] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = [\,y \;\; -2\omega \;\; -x\,] \\ x + y - 3\omega = 2\lambda \end{matrix} \right\}$$

είναι συμβιβαστό.

'Ασκηση 3

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 1 \\ \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

έχει λύση. Γι' αυτές τις τιμές του λ να υπολογίσετε τον πίνακα $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Πρακτικές Εφαρμογές

'Ασκηση 1

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ μία γωνία του είναι 10° μεγαλύτερη από τη δεύτερη και η δεύτερη διπλάσια από την τρίτη. Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου.

'Ασκηση 2

Ο ανοξείδωτος χάλυβας περιέχει σίδηρο (Fe), άνθρακα (C), νικέλιο (Ni) και χρώμιο (Cr). Η ανάλυση έδειξε ότι το 80% του χάλυβα αποτελείται από σίδηρο και νικέλιο, υπάρχει 5% χρώμιο και η ποσότητα του Fe είναι τετραπλάσια της ποσότητας του C. Να βρεθεί η % κατά βάρος σύσταση του χάλυβα σε Fe, C, Ni, Cr.

'Ασκηση 3

'Ενα ξενοδοχείο έχει x μονόκλινα, y δίκλινα και ω τρίκλινα δωμάτια.

(α) Να εκφράσετε το πλήθος των δωματίων και κλινών με τη βοήθεια των x, y, ω.

(β) Αν το πλήθος όλων των δωματίων είναι 18, το πλήθος των κλινών 33 και το πλήθος των δίκλινων δωματίων όσο των μονόκλινων και τρίκλινων μαζί, να βρείτε πόσα είναι τα μονόκλινα, δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια.

'Ασκηση 4

Ο μπρούτζος είναι κράμα χαλκού (Cu) και κασσίτερου (Sn). 'Ενα κομμάτι μπρούτζου ζυγίζει 81,877 gr και έχει όγκο 10 cm^3. Αν η πυκνότητα του Cu είναι 8,92 gr/cm^3 και του Sn είναι 7,29 gr/cm^3, να βρεθεί η % κατά βάρος σύσταση του μπρούτζου σε χαλκό και κασσίτερο. (Θυμίζουμε ότι: πυκνότητα $= \frac{\text{μάζα}}{\text{όγκος}}$, $\rho = \frac{m}{V}$).

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

'Ασκηση 1

Θεωρούμε ένα ν×μ πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ ώστε για το κάθε στοιχείο του πίνακα να ισχύει $\alpha_{ij} = i \cdot j$. Αν το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της i στήλης, δείξτε ότι ο πίνακας είναι τετραγωνικός.

'Ασκηση 2

Σ' έναν πίνακα 6×6 τοποθετούμε τους αριθμούς 1, 2, 3, …, 36 κατά σειρά, ξεκινώντας από την πρώτη γραμμή και γράφοντας διαδοχικά τους παραπάνω αριθμούς. Μπορείτε να τοποθετήσετε τους αριθμούς αυτούς έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης να είναι περιττός αριθμός;

'Ασκηση 3

Αν ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 - \beta\gamma & \beta^2 - \alpha\gamma \\ \beta^3 - \gamma^2\alpha & \alpha\beta\gamma & \gamma^2 - \alpha\beta \\ \gamma^3 - \alpha^2\beta & \alpha^3 - \beta^2\gamma & \beta\gamma^2 \end{bmatrix}$$

με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι τριγωνικός κάτω, να δείξετε ότι είναι και διαγώνιος.

'Ασκηση 4

Θεωρούμε έναν πίνακα A τύπου 2×3 και έναν πίνακα B τύπου 3×4. Πόσους πολλαπλασιασμούς και πόσες προσθέσεις πρέπει να κάνουμε για να υπολογίσουμε το γινόμενο A·B;

'Ασκηση 5

Θεωρούμε έναν 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

(α) Βρείτε τον τύπο του πίνακα X για τον οποίο έχει έννοια η εξίσωση $AX - XA = I$ (1).

(β) Δείξτε ότι δεν υπάρχει πίνακας X για τον οποίο αληθεύει η (1).

'Ασκηση 6

Θεωρούμε δύο ν×ν πίνακες A, B και τον τύπου ν×1 πίνακα στήλη:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(α) Ποιά στοιχεία του γινομένου AB είναι αποτέλεσμα της πράξης (AB)X;

(β) Γνωρίζοντας ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων, ποιά στοιχεία του γινομένου AB εκφράζει το γινόμενο A(BX);

'Ασκηση 7

Θεωρούμε τους ν×ν πίνακες A, B για τους οποίους ισχύει $A - B = 2I$ και $A^2 + B^2 = 6I$.

(α) Δείξτε ότι $AB = BA = I$.

(β) Υπολογίστε τον πίνακα $A^3 - B^2 - A^2 - B^2$.

'Ασκηση 8

Να βρείτε τις τιμές των λ, $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ισοδύναμα τα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\quad \left.\begin{array}{r} -x + 2y = 4 \\ 2x + \lambda^2 y = 0 \end{array}\right\} \qquad (\Sigma_2)\quad \left.\begin{array}{r} x + 2y = 0 \\ x + \mu y = \lambda + \mu \end{array}\right\}$$

'Ασκηση 9

Μια βιομηχανία, χρησιμοποιεί τρεις μηχανές, με τις οποίες κατασκευάζει τέσσερα βιομηχανικά είδη. Κάθε μηχανή δουλεύει 8 ώρες την ημέρα και ο αριθμός των ωρών που χρησιμοποιείται κάθε μηχανή για την παραγωγή μιας μονάδας από κάθε είδος δίνεται από τον πίνακα:

Μηχανή \ Είδη	1^o	2^o	3^o	4^o
$1^η$	1	2	1	2
$2^η$	2	0	1	1
$3^η$	1	2	3	0

Να βρείτε πόσες μονάδες από κάθε είδος θα κατασκευαστούν μέσα σε μια ημέρα.

Ανακεφαλαίωση

- Οι δείκτες του στοιχείου $α_{ij}$ μας πληροφορούν ότι αυτό βρίσκεται στην i γραμμή και τη j στήλη.
- Δύο πίνακες του ίδιου τύπου $μ\times ν$ είναι ίσοι όταν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.
- Τα βασικότερα είδη πινάκων είναι:
  (α) Πίνακας στήλη ή πίνακας γραμμή
  (β) Τετραγωνικός πίνακας
  (γ) Τριγωνικός άνω ή κάτω
  (δ) Διαγώνιος
- Προσθέτουμε μόνο πίνακες του ίδιου τύπου. Κάθε στοιχείο του αθροίσματος προκύπτει αν προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο (ή περισσοτέρων) πινάκων.

  Ιδιότητες:
  - $A + B = B + A$
  - $(A + B) + Γ = A + (B + Γ)$
  - $A + \mathbb{0} = \mathbb{0} + A = A$
  - $A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{0}$
- Το γινόμενο αριθμού επί πίνακα προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του πίνακα με τον αριθμό.

  Ιδιότητες:
  - $(λ + μ)A = λA + μA$
  - $λ(A + B) = λA + λB$
  - $(λμ)A = λ(μA)$
  - $1\cdot A = A$

  Επίσης ισχύει $λA = \mathbb{0} \Leftrightarrow λ = 0$ ή $A = \mathbb{0}$.
- Για να πολλαπλασιάσουμε πίνακες πρέπει το πλήθος των στηλών του πρώτου πίνακα να είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου πίνακα. Σχηματικά: $A_{μ\times ρ}\cdot B_{ρ\times ν} = Γ_{μ\times ν}$. Για το στοιχείο $γ_{ij}$ της i γραμμής και j στήλης του γινομένου AB ισχύει:

$$γ_{ij} = α_{i1}β_{1j} + α_{i2}β_{2j} + \cdots + α_{iρ}β_{ρj}$$

Ιδιότητες:

- $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$
- $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$ και $(B + \Gamma)A = BA + \Gamma A$
- $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$
- $A \cdot I_\nu = I_\nu \cdot A = A$

Προσοχή!! **<u>ΔΕΝ</u>** ισχύουν:

– $A \cdot B = B \cdot A$

– $A \cdot B = \mathbb{O} \Leftrightarrow A = \mathbb{O}$ ή $B = \mathbb{O}$

- Ένα γραμμικό σύστημα μ εξισώσεων με ν αγνώστους έχει μορφή:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}x_\nu &+ \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}x_\nu &= \beta_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ \alpha_{\mu1}x_1 + \alpha_{\mu2}x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}x_\nu &= \beta_\mu \end{aligned}$$

  και μπορεί συνοπτικά να γραφεί $A \cdot X = B$ όπου $A_{\mu\times\nu}$ είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $X_{\nu\times1}$ είναι ο πίνακας στήλη των αγνώστων και $B_{\mu\times1}$ είναι ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων.

- Το ομογενές γραμμικό σύστημα γράφεται $A \cdot X = \mathbb{O}$.
- Ισοδύναμα λέγονται δύο συστήματα που έχουν ίδιες λύσεις.
- Η γρηγορότερη μέθοδος επίλυσης ενός μ×ν γραμμικού συστήματος είναι η μέθοδος διαδοχικών απαλειφών του Gauss. Ο αλγόριθμος του Gauss χρησιμοποιεί τις γραμμοπράξεις για το μηδενισμό όσο το δυνατόν περισσοτέρων στοιχείων του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων. Ο παραπάνω αλγόριθμος ολοκληρώνεται όταν σε κάθε μη μηδενική γραμμή το πρώτο αριστερά 1 είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Τι είναι ένας πίνακας $\mu\times\nu$; Πόσα στοιχεία έχει;
2. Τι μας πληροφορούν οι δείκτες του στοιχείου α_{23};
3. Δύο πίνακες ίδιου τύπου $\mu\times\nu$ είναι ίσοι; Αν όχι, τι πρέπει να ισχύει για να είναι ίσοι;
4. Σημειώστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι σωστοί (Σ) ή λάθος (Λ) και δικαιολογήστε την απάντησή σας:
   (α) Οι μηδενικοί πίνακες είναι πάντα ίσοι.
   (β) Οι μηδενικοί πίνακες είναι πάντα τετραγωνικοί.
   (γ) Αν ο πίνακας Α είναι τύπου $\mu\times\nu$ και ισχύει $A\cdot I_\nu = I_\nu\cdot A = A$ τότε $\mu = \nu$.
   (δ) Αν ο πίνακας Α είναι $\mu\times\nu$ και ο Β είναι $\nu\times\mu$, τότε ορίζονται τα γινόμενα ΑΒ και ΒΑ.
   (ε) Τα παραπάνω γινόμενα ΑΒ και ΒΑ είναι ίσοι πίνακες.
   (στ) Για να ορίζεται ο A^2 πρέπει να είναι τετραγωνικός.
   (ζ) Αν Α είναι $\nu\times\nu$ πίνακας, τότε $A\cdot A^2 = A^2\cdot A$.
   (η) Αν Α είναι $\nu\times\nu$ πίνακας, τότε $A^{10}\cdot A^{10} = A^{100}$.
   (θ) Αν Α, Β πίνακες $\nu\times\nu$ και λ πραγματικός αριθμός ισχύει:
   (i) $(\lambda\cdot A)^2 = \lambda^2 A^2$
   (ii) $(AB)^2 = A^2B^2$
5. Σημειώστε τη σωστή απάντηση και δικαιολογήστε:
   (α) Αν δύο πίνακες είναι $\nu\times\mu$ τότε ορίζεται:
   (i) Το γινόμενο ΑΒ (iii) Και τα δύο
   (ii) Το άθροισμα $A + B$ (iv) Τίποτα απ' τα δύο
   (β) Αν για δύο πίνακες $\nu\times\nu$ ισχύει $A^2 = B^2$, τότε:
   (i) $A = B$ (iii) Μπορεί να μην ισχύει κανένα απ' τα δύο
   (ii) $A = -B$ (iv) Ισχύουν και τα δύο
   (γ) Αν για δύο πίνακες $\nu\times\nu$ ισχύει $(A - B)^2 = \mathbb{O}$, τότε:
   (i) $A = B$
   (ii) $A = B = \mathbb{O}$
   (iii) Δεν είναι απαραίτητο να ισχύει το (i) ή το (ii)

(δ) Αν Α, Β δύο ν×ν πίνακες και Ι ο μοναδιαίος ν×ν τότε:

(i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ii) $(\lambda A + \mu B)^2 = \lambda^2 A^2 + 2\lambda\mu AB + \mu^2 B^2$

(iii) $(\lambda A + \mu I)^2 = \lambda^2 A^2 + 2\lambda\mu A + \mu^2 I^2$

(iv) Κανένα από τα προηγούμενα

6. Σημειώστε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) ή λάθος (Λ) και δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(α) Τα ισοδύναμα συστήματα έχουν πάντα το ίδιο πλήθος εξισώσεων.

(β) Τα ισοδύναμα συστήματα έχουν πάντα το ίδιο πλήθος αγνώστων.

(γ) Το ομογενές σύστημα έχει πάντα λύση.

(δ) Αν κατά τη διαδικασία των διαδοχικών απαλειφών Gauss καταλήξουμε σε γραμμή «$0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 \mid 0$» τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

(ε) Αν όμοια καταλήξουμε σε γραμμή «$0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 \mid \alpha \neq 0$» τότε το σύστημα είναι αδύνατο.