

Ανατοκισμός - Ίσες καταθέσεις

Οι γεωμετρικές πρόοδοι μας βοηθούν να λύνουμε προβλήματα οικονομικής φύσεως που συχνά παρουσιάζονται στις οικονομικές συναλλαγές με διάφορους πιστωτικούς οργανισμούς.

1.9 Ανατοκισμός

Πρόβλημα

Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο 500.000 δρχ/ με ετήσιο επιτόκιο 8%. Με τη συμπλήρωση ενός χρόνου οι τόκοι προσθέτονται στο κεφάλαιο και το ποσό που προκύπτει γίνεται το νέο κεφάλαιο που τοκίζεται με το ίδιο επιτόκιο για τον επόμενο χρόνο. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί για n χρόνια, να βρεθεί πόσα χρήματα θα πάρουμε στο τέλος του νιοστού χρόνου.

Λύση

Ο τόκος της μίας δραχμής σ' ένα χρόνο $\tau = \frac{8}{100}$.

Στο τέλος του 1ου χρόνου το κεφάλαιο των 500.000 δρχ. θα δώσει τόκο $500.000 \cdot \frac{8}{100}$.

Επομένως το νέο κεφάλαιο θα είναι:

$$a_1 = 500.000 + 500.000 \cdot \frac{8}{100} = 500.000 \left(1 + \frac{8}{100} \right).$$

Στο τέλος του 2ου χρόνου το κεφάλαιο $a_1 = 500.000 \left(1 + \frac{8}{100} \right)$ θα δώσει

τόκο $a_1 \cdot \frac{8}{100}$.

Το νέο κεφάλαιο θα είναι:

$$a_2 = a_1 + a_1 \cdot \frac{8}{100} = a_1 \left(1 + \frac{8}{100} \right) = 500.000 \left(1 + \frac{8}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{8}{100} \right) = 500.000 \left(1 + \frac{8}{100} \right)^2.$$

Στο τέλος του 3ου χρόνου το κεφάλαιο $\alpha_2 = 500.000 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^2$ θα δώσει τόκο

$\alpha_2 \cdot \frac{8}{100}$ και το νέο κεφάλαιο θα είναι

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_2 \cdot \frac{8}{100} = \alpha_2 \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 500.000 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 500.000 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^3.$$

Παρατηρούμε ότι το κεφάλαιο των 500.000 δρχ. στο τέλος του νιοστού χρόνου θα γίνει ίσο με το νιοστό όρο γεωμετρικής προόδου που έχει πρώτο όρο

$$\alpha_1 = 500.000 \left(1 + \frac{8}{100}\right) \text{ και λόγο } \lambda = 1 + \frac{8}{100}.$$

Δηλαδή, έχουμε $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$.

$$\text{Έτσι } \alpha_v = 500.000 \left(1 + \frac{8}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{v-1} = 500.000 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^v.$$

Γενικά : Αν α είναι το κεφάλαιο και $\varepsilon\%$ το επιτόκιο, θα έχουμε:

$$\alpha_v = \alpha \cdot (1 + \tau)^v \quad \text{όπου } \tau = \frac{\varepsilon}{100}$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως **τύπος ανατοκισμού**.

Παράδειγμα

Κάποιος καταθέτει ποσό 100.000 δρχ. με επιτόκιο 10%. Πόσα χρήματα θα εισπράξει ο γιος του μετά από 50 χρόνια;

Λύση

Σύμφωνα με τον τύπο: $\alpha_v = \alpha(1 + \tau)^v$, όπου $\tau = 10/100 = 0,1$. Ο γιος λοιπόν θα εισπράξει:

$$\alpha_{50} = 100000(1 + 0,1)^{50} = 100000(1,1)^{50} = 1173905,28.$$

1.10 Ίσες καταθέσεις

Πρόβλημα

Κάποιος καταθέτει σε μία τράπεζα στην αρχή κάθε χρόνου α δραχμές με ανατοκισμό και επιτόκιο $\varepsilon\%$. Τι ποσό θα πάρει μετά από n χρόνια;

Λύση

Η πρώτη κατάθεση θα ανατοκιστεί για n έτη και, επομένως, θα γίνει

$$\alpha(1+\tau)^n, \text{ όπου } \tau = \frac{\varepsilon}{100}.$$

Η δεύτερη κατάθεση ανατοκίζεται για $n-1$ έτη θα γίνει

$$\alpha(1+\tau)^{n-1}.$$

Η τρίτη κατάθεση ανατοκίζεται για $n-2$ έτη θα γίνει

$$\alpha(1+\tau)^{n-2}.$$

Με όμοιο τρόπο η τελευταία κατάθεση θα παραμείνει για ένα έτος και, επομένως, θα γίνει

$$\alpha(1+\tau).$$

Συνεπώς το ποσό που θα πάρει ο καταθέτης μετά από n έτη θα είναι :

$$\Sigma = \alpha(1+\tau) + \alpha(1+\tau)^2 + \alpha(1+\tau)^3 + \dots + \alpha(1+\tau)^{n-1} + \alpha(1+\tau)^n$$

$$= \alpha(1+\tau) \frac{(1+\tau)^n - 1}{(1+\tau) - 1}.$$

Άρα

$$\Sigma = \alpha(1+\tau) \cdot \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau}$$

Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως **τύπος των ίσων καταθέσεων**.

Παράδειγμα

Παππούς κατέθεσε την ημέρα γέννησης της εγγονής του 10.000 δρχ. με επιτόκιο 10% και επαναλάμβανε την κατάθεση σε κάθε επέτειο γέννησής της. Μετά από 20 χρόνια η εγγονή έκανε την ανάληψη των χρημάτων. Πόσα χρήματα πήρε;

Λύση

Εφαρμόζοντας τον τύπο των ίσων καταθέσεων, το ποσό των χρημάτων που θα πάρει μετά από 20 χρόνια θα είναι :

$$\Sigma = 10000(1 + 0.1) \frac{(1 + 0.1)^{20} - 1}{0.1} = 1000000 \cdot [(1.1)^{20} - 1] = 6727499,94.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Καταθέτει κάποιος στην τράπεζα κεφάλαιο 2.000.000 δρχ. με ανατοκισμό και επιτόκιο 10%.
 - Πόσα χρήματα θα πάρει μετά από 6 χρόνια;
 - Αν ήθελε να διπλασιάσει το αρχικό κεφάλαιο, μετά πόσα χρόνια θα συνέβαινε αυτό;
- Ένα κεφάλαιο 500.000 δρχ. ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 15%. Ένα άλλο 770.000 δρχ. ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 9%. Μετά από πόσα χρόνια τα κεφάλαια θα γίνουν ίσα;
- Στην αρχή κάθε χρόνου ο πατέρας του Κώστα κατάθετε 300.000 δρχ. με ετήσιο επιτόκιο 10%, γιζ να αντιμετωπίσει τα έξοδα των μελλοντικών σπουδών του γιου του. Μετά από 20 χρόνια, έδωσε τα χρήματα στο γιο του, που σπούδαζε πλέον. Πόσα χρήματα πήρε ο Κώστας;
- Κάποιος κάνει ασφάλεια ζωής για 25 χρόνια και πληρώνει στην αρχή κάθε χρόνου 200.000 δρχ. Μετά από 25 χρόνια η ασφαλιστική εταιρία θα επιστρέψει τα χρήματά του ανατοκισμένα με 12%. Πόσα χρήματα θα πάρει ο ασφαλισμένος;

5. Κάποιος δανείζεται 30.000.000 δρχ. με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 10% για 20 χρόνια. Μετά από 10 χρόνια πέθανε. Τι χρέος άφησε στους κληρονόμους του;
6. Σύμφωνα με τις στατιστικές, ο πληθυσμός της γης το 1990 ήταν 5,35 δισεκ. και αυξάνει 1,8 % το χρόνο. Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της γης το έτος 2000;
7. Για την αγορά αυτοκινήτου κόστους 4.450.000 δρχ. κάποιος δίνει προκαταβολή 3.450.000 δρχ. και το υπόλοιπο θα το πληρώσει σε 12 ίσες μηνιαίες δόσεις που θα καταβάλλονται στο τέλος κάθε μήνα. Αν το επιτόκιο είναι 3% το μήνα, να βρεθεί το ποσό της δόσης.
8. Ποσό 3000 ECU εξοφλείται μέσα σε 5 χρόνια με επιτόκιο 4%. Να βρεθεί το χρέος που μένει μετά την πληρωμή της πρώτης, της δεύτερης και της τρίτης δόσης.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ένας καπνιστής δαπανά την ημέρα 680 δρχ. και, επομένως, το εξάμηνο 122.400. Αν το ποσό αυτό το κατέθετε στην αρχή κάθε εξαμήνου στην τράπεζα με επιτόκιο 8% (ανατοκισμός), πόσα χρήματα θα έπαιρνε μετά από 30 χρόνια;
2. Ελαστική σφαίρα αφήνεται από ύψος h . Η σφαίρα, αφού χτυπήσει σε λείο δάπεδο, ανέρχεται στα τρία τέταρτα του προηγούμενου ύψους. Ζητείται μετά από πόσα χτυπήματα στο δάπεδο, το ύψος στο οποίο θα ανέλθει είναι μικρότερο του $0.001h$.
3. Στέγη σχήματος ισόπλευρου τριγώνου καλύπτεται από n σειρές κεραμιδιών. Αν η σειρά με τα περισσότερα κεραμίδια περιέχει 100 και κάθε επομένη σειρά ένα λιγότερο, ζητείται ο αριθμός n των σειρών καθώς και ο αριθμός των κεραμιδιών της στέγης.
4. Μια κοινωνία βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε ώρα. Αν αρχικά υπήρχαν 2 βακτηρίδια, πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν μετά από 12 ώρες;
5. Ο πληθυσμός μιας χώρας 6.000.000 παρουσιάζει ετήσια αύξηση 2%. Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από n χρόνια. Εφαρμογή για $n=10$.

6. Ποσό ενός εκατομμυρίου θα τοκισθεί με ετήσιο επιτόκιο 100% και με δυνατότητα ανατοκισμού του 1, 2, 3 ,4... ή ν φορές το χρόνο, σε ίσα χρονικά διαστήματα, ανάλογα με τη επιθυμία του καταθέτη.
- Ποια χρονική περίοδο πρέπει να επιλέξει ο καταθέτης ;
 - Να δείξετε ότι ο καταθέτης στο τέλος του έτους δεν μπορεί να εισπράξει ποσό μεγαλύτερο των 3.000.000 δρχ.
7. Αν αφήσουμε ανοιχτό το καπάκι ενός δοχείου 5 λίτρων με βενζίνη , η βενζίνη εξατμίζεται με ρυθμό 20% ανά εβδομάδα.
- Να βρεθεί η συνάρτηση(ακολουθία) που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από ν εβδομάδες.
 - Να βρεθεί η ποσότητα που θα έχει απομείνει μετά από τη συμπλήρωση 20 εβδομάδων (με χρήση υπολογιστή τσέπης)
8. Ο Κώστας για την επιτυχία του στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας έχει να επιλέξει μια από τις δύο προτάσεις
- 1^η «5000 με την απονομή του επαίνου και διπλασιασμό του ποσού ανά έτος, για 10 χρόνια»
 - 2^η «50000 με την απονομή του επαίνου και αύξηση του ποσού κατά 3000 ανά έτος, για 10 χρόνια»
- Αν κριτήριο είναι το ποσό των χρημάτων, ποια πρόταση θα επιλέξει ο Κώστας;