Η επίδοση μαθητών ηλικίας 13-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας

Αχιλλέας Δραμαλίδης, *Π.Τ.Δ.Ε., Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης*

Χαράλαμπος Σακονίδης, *Π.Τ.Δ.Ε., Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης*

Περίληψη

Η άλγεβρα παρέχει τη δυνατότητα να χειριζόμαστε και να αναπαριστούμε με συντομία, ακρίβεια και σαφήνεια τις μαθηματικές ιδέες και να αναπτύσσουμε αποτελεσματικές διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. Ωστόσο, για πολλούς από τους μαθητές αποτελεί μια από τις δυσκολότερες ενότητες των σχολικών μαθηματικών. Η εργασία επικεντρώνεται στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα και παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας εμπειρικής μελέτης, που στόχευε στη διερεύνηση της επίδοσης Ελλήνων μαθητών ηλικίας 13-15 χρόνων σε συγκεκριμένες αλγεβρικές δραστηριότητες. Σύμφωνα με αυτά, τα εξαιρετικά χαμηλά ποσοστά επιτυχίας των μαθητών οφείλονται κυρίως στην προσέγγιση που ακολουθείται σήμερα στη διδασκαλία των σχετικών ενοτήτων.

Παράγοντες δυσκολίας στην κατανόηση των αλγεβρικών ιδεών από τους μαθητές

Οι δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα αποτέλεσαν το θέμα πολλών ερευνών από τη δεκαετία ακόμη του 1970. Πολλές από αυτές τις δυσκολίες αποδόθηκαν στο υψηλό επίπεδο γενίκευσης και αφαίρεσης των αλγεβρικών ιδεών και στην ιδιομορφία

Ο κ. Αχιλλέας Δραμαλίδης είναι Λέκτορας στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Δ.Π.Θ.

Ο κ. Χαράλαμπος Σακονίδης είναι Αναπληρωτής Καθηγητής στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Δ.Π.Θ.

της αλγεβρικής σκέψης. Για παράδειγμα, ο Thwaites (1982) αναφέρει τέσσερις παράγοντες που καθιστούν τη διδασκαλία της άλγεβρας δύσκολη: την αδυναμία οπτικοποίησης των αλγεβρικών ιδεών, την αυθαίρετη φύση των αλγεβρικών ιδεών, την πολύπλοκη φύση τους και τη σχέση μεταξύ αλγεβρικού συμβολισμού και πλαισίου αναφοράς.

Αρκετές έρευνες έχουν επικεντρώσει το ενδιαφέρον τους στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ αριθμητικών και αλγεβρικών ιδεών και στον τρόπο με τον οποίο αυτή η σχέση αξιοποιείται στο πλαίσιο της διδασκαλίας. Η συνήθης διδακτική πρακτική, όταν εισάγεται μια αλγεβρική ιδέα, είναι η αναφορά στις προηγούμενες σχετικές αριθμητικές εμπειρίες των μαθητών και η εξαγωγή λογικών συμπερασμάτων. Αμέσως μετά οι μαθητές ασκούνται εκτεταμένα στο χειρισμό συμβολικών αναπαραστάσεων της αλγεβρικής ιδέας, με την εφαρμογή συγκεκριμένων κανόνων. Αυτή η προσέγγιση στηρίζεται στην αρχή ότι, εφόσον η αριθμητική και η άλγεβρα αφορούν σε αριθμούς και οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τις ιδιότητες των αριθμών και τις πράξεις με αυτούς, υπάρχουν πολύ λίγα πράγματα που χρειάζεται να προστεθούν σε αυτήν τη γνώση, για να μπορέσουν να προσεγγίσουν τις αλγεβρικές ιδέες. Ωστόσο, αυτό δεν είναι αλήθεια. Τα στοιχεία και οι κανόνες της άλγεβρας αποτελούν αφαιρέσεις των αντίστοιχων στοιχείων και κανόνων της αριθμητικής, δηλαδή αποτελούν αφαιρέσεις αφαιρέσεων και, επομένως, η κατανόησή τους αποτελεί μια ιδιαίτερα απαιτητική διαδικασία. Οι σχετικές έρευνες υποδεικνύουν ότι πολλά παιδιά τείνουν να μεταφέρουν τους κανόνες της αριθμητικής στο αλγεβρικό πεδίο χωρίς καμία προσαρμογή, κυρίως εξαιτίας της έμφασης που δίνεται κατά τη διδασκαλία των αλγεβρικών ιδεών στην αντίληψη ότι «τα γράμματα είναι όπως οι αριθμοί», καθώς και του γεγονότος ότι οι μοναδικές «εικόνες αριθμών», τις οποίες διαθέτουν οι μαθητές, προέρχονται από την αριθμητική τους εμπειρία (π.χ., Bednarz et al., 1992).

Ένας άλλος παράγοντας που φαίνεται να ευθύνεται σημαντικά για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα είναι η εκτεταμένη χρήση συμβόλων που τη διακρίνει. Οι δυσκολίες των μαθητών συνδέονται με μια σειρά από χαρακτηριστικά γνωρίσματα των συμβόλων, όπως: α) το επίπεδο αφαίρεσης των ιδεών που αναπαριστούν, β) η πυκνότητα του νοήματος που μεταφέρουν, γ) η εξάρτηση της σημασίας τους από τα σύμβολα με τα οποία γειτονεύουν, δ) η έμφαση που δίνεται κατά τη διδασκαλία στο χειρισμό τους, χωρίς παράλληλη εστίαση στις αλγεβρικές ιδέες που αναπαριστούν. Με άλλα λόγια, οι μαθητές ωθούνται πολύ γρήγορα στο χειρισμό ενός ιδιαίτερα αφαιρετικού συστήματος αναπαράστασης, του συμβολικού, έχοντας μικρή εξοικείωση με αυτό, καθώς και ανεπαρκή και συχνά επισφαλή κατανόηση των ιδεών που αυτό αναπαριστά.

Μια άλλη πηγή προβλημάτων στην άλγεβρα αποτελεί η ιδιαιτερότητα της φυσικής γλώσσας που χρησιμοποιείται για την επεξεργασία των αλγεβρικών ιδεών (π.χ. Pimm, 1987). Εκφράσεις όπως «έστω α ένας τυχαίος θετικός αριθμός» δεν είναι εύκολο να γίνουν κατανοητές από τους μαθητές. Αυτό επιβαρύνεται και από το γεγονός ότι οι ρυθμοί μάθησης που επιβάλλει το Αναλυτικό Πρόγραμμα είναι συχνά τόσο ταχείς, ώστε δε δίνεται αρκετός χρόνος στους μαθητές, για να αφομοιώσουν τις σχετικές ιδέες και να οικειοποιηθούν τη γλωσσική τους έκφραση. Επιπλέον, η συνεχής εναλλαγή μεταξύ μαθηματικών συμβόλων και φυσικής γλώσσας, την οποία απαιτεί η μελέτη των αλγεβρικών ιδεών, προϋποθέτει μια σχετική ευχέρεια στη μετάβαση από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, η οποία δεν επιτυγχάνεται με ευκολία από όλους τους μαθητές (π.χ. Ryan & Williams, 1998).

Είναι φανερό ότι η ιδιαίτερα αφαιρετική φύση των αλγεβρικών εννοιών και διαδικασιών, η προσέγγισή τους ως γενίκευση των αντίστοιχων αριθμητικών, η ποικιλία και η απαιτούμενη συχνή εναλλαγή συστημάτων αναπαράστασης, καθώς και η υπερβολική έμφαση στους μηχανισμούς χειρισμού αυτών των συστημάτων αναπαράστασης καθιστούν την κατανόηση των αλγεβρικών ιδεών μια ιδιαίτερα πολύπλοκη και επίπονη μαθησιακή εμπειρία για τους μαθητές. Η μετάβαση από το πεδίο της αριθμητικής σε αυτό της άλγεβρας δεν συνιστά μια απλή διαδικασία επέκτασης ή γενίκευσης της αριθμητικής γνώσης ή εκμάθησης επιτυχούς διαχείρισης ενός συμβολικού συστήματος. Θα μπορούσε να υποστηριχτεί ότι η προσέγγιση των αλγεβρικών ιδεών προϋποθέτει τη συνειδητοποίηση των δυνατοτήτων του νου να αντιλαμβάνεται σχέσεις.

Δυσκολίες και λάθη των μαθητών στην άλγεβρα

Η διδασκαλία της άλγεβρας στην υποχρεωτική εκπαίδευση επικεντρώνεται σε τέσσερις βασικούς μαθησιακούς στόχους: στην κατανόηση και μελέτη αλγεβρικών παραστάσεων, στην επίλυση γραμμικών και μεγαλύτερου (κυρίως δεύτερου) βαθμού εξισώσεων, στην επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις και στη μελέτη συναρτήσεων. Παρακάτω παρουσιάζονται μερικές από τις βασικότερες δυσκολίες των μαθητών σε καθεμιά από τις αντίστοιχες ενότητες, με εξαίρεση αυτή των συναρτήσεων, που αποτελεί μια ιδιαίτερα σημαντική ενότητα της άλγεβρας, η μελέτη της οποίας δεν εντάσσεται στους στόχους της παρούσας εργασίας.

(α) Αλγεβρικές παραστάσεις-χρήση των γραμμάτων: Μεγάλο μέρος της σχολικής άλγεβρας αφορά στην κατανόηση και διαχείριση αλγεβρικών αναπαραστάσεων. Παρόλα αυτά, οι σχετικές έρευνες καταγράφουν πολύ χαμηλά επίπεδα επίδοσης των μαθητών σε σχετικές δραστηριότητες. Αρκετοί ερευνητές αποδίδουν αυτήν την αποτυχία στην άγνοια βασικών ιδιοτήτων και δομικών χαρακτηριστικών των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής από πολλούς μαθητές. Για παράδειγμα, η Booth (1984) υποστήριξε ότι, όταν ένας μαθητής αδυνατεί να κατανοήσει (ή να αποδεχτεί) ότι ο συνολικός αριθμός των αντικειμένων που περιέχονται σε δύο σύνολα με 3 και 5 αντικείμενα είναι 3+5 (και όχι μόνον 8), τότε είναι πολύ πιθανό να δυσκολεύεται να αναγνωρίσει ότι η έκφραση μ+ν παριστάνει το σύνολο των αντικειμένων δύο συνόλων με μ και ν αντικείμενα αντιστοίχως.

Σημαντικός αριθμός ερευνών επικεντρώνεται στην περιορισμένη κατανόηση από τους μαθητές του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα γράμματα στις αλγεβρικές παραστάσεις. Τα περισσότερα ευρήματα συγκλίνουν στο γεγονός ότι οι μαθητές τείνουν να ερμηνεύουν ένα γράμμα ως το όνομα ενός συγκεκριμένου αριθμού, δηλαδή ως συγκεκριμένο άγνωστο (π.χ. Booth, 1988). Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι οι εξισώσεις 5ν+14=89 και 5μ+14=89 έχουν διαφορετικές λύσεις.

Σημαντική συμβολή στην κατανόηση του τρόπου, με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται πώς χρησιμοποιούνται τα γράμματα στην άλγεβρα είχε η έρευνα του Kuchemann (1981) στη Βρετανία. Η συγκεκριμένη έρευνα αποτελούσε μέρος του ερευνητικού προγράμματος Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS), στο πλαίσιο του οποίου κατασκευάστηκε ένας αριθμός από δοκιμασίες για διάφορες ενότητες των μαθηματικών. Η δοκιμασία της άλγεβρας σχεδιάστηκε για την αξιολόγηση της αλγεβρικής κατανόησης μαθητών ηλικίας 13+ έως 15+ ετών, από τους οποίους ζητήθηκε να εργαστούν σε μια ποικιλία από τυπικές δραστηριότητες της σχολικής άλγεβρας. Ο Kuchemann κατηγοριοποίησε καθεμιά από τις 51 υπο-ερωτήσεις της δοκιμασίας σε μια από τις παρακάτω έξι κατηγορίες που περιγράφουν χρήσεις του γράμματος σε μια αλγεβρική έκφραση. Η σειρά με την οποία αναφέρονται αυτές οι κατηγορίες αντικατοπτρίζει και το επίπεδο δυσκολίας των αντίστοιχων ερωτήσεων:

η τιμή του γράμματος μπορεί να υπολογιστεί, δηλαδή να του δοθεί μια συγκεκριμένη τιμή (π.χ. α+5=15, α=;)

το γράμμα μπορεί να αγνοηθεί ή να του δοθεί κάποια συγκεκριμένη τιμή (π.χ. α+β=5, α+β+4=;)

- το γράμμα μπορεί να θεωρηθεί ως κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο, π.χ. αν χ είναι η πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου, τότε η περίμετρός του Π=;)
- το γράμμα γίνεται αντιληπτό ως κάποιος συγκεκριμένος άγνωστος (π.χ. α+β=8, α+β+γ=;)
- το γράμμα μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπαριστά ένα γενικευμένο αριθμό, δηλαδή μπορεί να πάρει διάφορες τιμές (π.χ. η ισότητα α+β+γ=α+δ+γ είναι αληθής πάντοτε, μερικές φορές ή ποτέ;)
- το γράμμα γίνεται κατανοητό ως μια μεταβλητή (π.χ. ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος, ο 2α ή ο α+2;).

Τα αποτελέσματα της έρευνας του Kuchemann έδειξαν ότι, αν και η ερμηνεία που επέλεξαν οι μαθητές να υιοθετήσουν σε κάθε περίπτωση σχετιζόταν με τη φύση και την πολυπλοκότητα της ερώτησης, πολύ λίγοι από αυτούς ήταν σε θέση να θεωρήσουν το γράμμα ως γενικευμένο αριθμό, παρά την εμπειρία τους σε δραστηριότητες που επικεντρώνονταν στην έκφραση αριθμητικών κανονικοτήτων. Ακόμη λιγότεροι ήταν οι μαθητές του δείγματος που μπόρεσαν να ερμηνεύσουν το γράμμα ως μεταβλητή. Η πλειοψηφία τους είτε αγνόησε τα γράμματα, είτε επέλεξε να τα χειριστεί ως συγκεκριμένα αντικείμενα, ενώ αρκετοί τα αντιμετώπισαν ως συγκεκριμένους αγνώστους. Για παράδειγμα, για τους 3.000 μαθητές ηλικίας 14 περίπου χρόνων που συμμετείχαν στην έρευνα τα ποσοστά επιτυχίας σε ερωτήσεις όπου το γράμμα μπορούσε να ερμηνευτεί ως αντικείμενο, να αγνοηθεί ή να υπολογιστεί η τιμή του, κυμάνθηκαν μεταξύ του 60% και του 97%, σε ερωτήσεις στις οποίες το γράμμα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως συγκεκριμένος άγνωστος ή ως γενικευμένος αριθμός ήταν μεταξύ του 5% και του 41% και, τέλος, στη μοναδική ερώτηση όπου το γράμμα έπρεπε να αντιμετωπιστεί ως μεταβλητή, το ποσοστό επιτυχίας ανήλθε μόλις στο 6%.

(β) Εξισώσεις: Μια από τις βασικές διαπιστώσεις ενός μεγάλου αριθμού ερευνών, που ασχολήθηκαν με τις επιδόσεις των μαθητών στις εξισώσεις, είναι ότι πολλοί από τους μαθητές θεωρούν το '=' ως ένα σημάδι για «να κάνεις κάτι» και συχνά «να δώσεις την απάντηση, έναν αριθμό» και όχι ως το σύμβολο της ισότητας μεταξύ του δεξιού και του αριστερού σκέλους. Αυτή η αντίληψη του συμβόλου της ισότητας δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση και στο χειρισμό των μετασχηματισμών της εξίσωσης, που απαιτούνται για την επίλυσή της.

Η επίλυση μιας εξίσωσης προϋποθέτει την ικανότητα του μαθητή να τη χειρίζεται ως αντικείμενο, εκτελώντας τις ίδιες πράξεις και στις δύο πλευρές της (τυπική μέθοδος επίλυσης). Ωστόσο, η σχετική έρευνα αποκαλύπτει ότι συχνά οι μαθητές είτε ακολουθούν άλλες μεθόδους επίλυσης μιας εξίσωσης (π.χ. Kieran, 1992), που έχουν μικρή εμβέλεια, είτε υιοθετούν την τυπική μέθοδο, αλλά εργάζονται μηχανικά, χωρίς να αντιλαμβάνονται τους χειρισμούς που εκτελούν. Και στις δύο περιπτώσεις, σύντομα οδηγούνται σε αδιέξοδο. Τα αποτελέσματα των σχετικών ερευνών συγκλίνουν στην άποψη ότι οι μαθητές που κατανοούν και εφαρμόζουν με επιτυχία την τυπική μέθοδο έχουν κατανοήσει την εξίσωση ως μια κατάσταση «ισορροπίας» μεταξύ δύο ποσοτήτων (π.χ. MacGregor & Stacey, 1998).

Καθώς οι μαθητές προχωρούν στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων, καλούνται να ασχοληθούν με περιπτώσεις εξισώσεων στις οποίες εμπλέκονται πολλές πράξεις και απαιτούνται κατάλληλοι μετασχηματισμοί. Η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται και συχνά υιοθετούν φτωχές ή και περιορισμένης εμβέλειας στρατηγικές για την επίλυσή τους (π.χ. Farmaki et al., 2004). Συγκεκριμένα, η βασική τους δυσκολία φαίνεται να έγκειται στο γεγονός ότι αδυνατούν να διαμορφώσουν και να διατηρήσουν μια σαφή αντίληψη των χαρακτηριστικών μιας εξίσωσης, στα οποία θα πρέπει να επικεντρωθούν, προκειμένου να αποφασίζουν ποιος είναι ο επόμενος μετασχηματισμός που θα πρέπει να εκτελεστεί, όπως η ύπαρξη ή μη κλασμάτων, οι αλγεβρικές πράξεις που υφίστανται, κ.ά.

Αρκετές έρευνες εντόπισαν τη δυσκολία των μαθητών να μεταβούν από τη διαδικαστική αντίληψη της αλγεβρικής εξίσωσης (έμφαση στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων, με στόχο την εύρεση ενός αριθμητικού αποτελέσματος) στη δομική της αντίληψη (έμφαση στην εκτέλεση πράξεων με αλγεβρικές παραστάσεις και στην εύρεση αλγεβρικού αποτελέσματος). Για παράδειγμα, οι Wagner et al. (1984) ζήτησαν από 15χρονους μαθητές να λύσουν την εξίσωση $κ/8-3=14$ και στη συνέχεια την εξίσωση $λ/8-3=14$. Οι περισσότεροι από αυτούς αντιλήφτηκαν ότι οι λύσεις των δύο εξισώσεων δε θα διέφεραν. Ωστόσο, όταν στην πρώτη εξίσωση το κ αντικαταστάθηκε με το κ+1 και ζητήθηκε από τους ίδιους μαθητές η τιμή του κ+1, οι περισσότεροι έλυσαν την εξίσωση ως προς κ και κάποιοι ως προς κ+1 και στη συνέχεια υπολόγισαν την τιμή του κ. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν τη δυσκολία των μαθητών να αναγνωρίσουν ομοιότητες επιφανειακής δομής μεταξύ εξισώσεων.

(γ) Προβλήματα με εξισώσεις: Τα πορίσματα των σχετικών ερευνών προτείνουν την αναζήτηση των χαμηλών επιδόσεων που καταγράφονται στις δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων με εξισώσεις στις πρώτες κιόλας μαθηματικές εμπειρίες των μαθητών στο Δημοτικό Σχολείο (π.χ., Carpenter & Moser, 1982). Συγκεκριμένα, υποστηρίζεται ότι σε όλη τη διάρκεια της πρωτοβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης, η

έμφαση στην επίλυση προβλημάτων βρίσκεται στις πράξεις που πρέπει να εκτελεστούν και όχι στην αναπαράστασή τους. Κατά συνέπεια, όταν ζητηθεί από τους μαθητές να σκεφτούν με αλγεβρικούς όρους, η σκέψη τους θα πρέπει να κάνει ένα μεγάλο άλμα, καθώς επιβάλλεται να επικεντρωθεί στη δομή του προβλήματος και όχι στις πράξεις που απαιτούνται για την επίλυσή του.

Η έρευνα που εστιάζεται στις διαδικασίες αναπαράστασης που χρησιμοποιούν οι μαθητές, όταν επιλύουν ένα πρόβλημα με εξισώσεις, εντοπίζει δύο κυρίαρχες προσεγγίσεις. Στην πρώτη, το πρόβλημα «μεταφράζεται» φράση προς φράση σε αλγεβρική μορφή. Ο σχηματισμός των αντίστοιχων εξισώσεων απαιτεί κάποια σημασιολογική γνώση, αλλά συχνά οι μαθητές που υιοθετούν αυτήν την προσέγγιση εργάζονται αποκλειστικά με βάση τη γλωσσική σύνταξη του προβλήματος. Η δεύτερη προσέγγιση αφορά στη χρησιμοποίηση ενός μαθηματικού τύπου ή κανόνα. Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές αυτής της προσέγγισης διαβάζουν σε ένα πρόβλημα «ένα αυτοκίνητο κινείται σε μία ευθεία ….» υποθέτουν ότι πρόκειται για ένα πρόβλημα σχετικό με χρόνο, απόσταση και ταχύτητα, δηλαδή το κατηγοριοποιούν άμεσα με βάση κάποια ερμηνεία μαθηματικού περιεχομένου.

Γενικά, έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα να εντοπίσουν τις ομοιότητες δομής μεταξύ προβλημάτων με εξισώσεις, τα οποία διαθέτουν διαφορετικά σενάρια. Συχνά καταφεύγουν σε στρατηγικές «μετάφρασης» ή αντικαθιστούν διάφορες τιμές στις εξισώσεις που κατασκευάζουν, για να διαπιστώσουν αν είναι σωστές και, μερικές φορές, χρησιμοποιούν πίνακες τιμών, για να εντοπίσουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών του προβλήματος. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, η πλειοψηφία των μαθητών δυσκολεύεται να αναγνωρίσει τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών ενός προβλήματος. Η ελάχιστη διαφοροποίηση στο σενάριο ενός προβλήματος μπορεί να τους οδηγήσει σε αποτυχία στην κατασκευή της κατάλληλης εξίσωσης (Kieran, 1992).

Η μελέτη

Η έρευνα που παρουσιάζεται σε αυτήν την εργασία αφορά στα αποτελέσματα μιας δοκιμασίας που σχεδιάστηκε για την αξιολόγηση του επιπέδου κατανόησης βασικών αλγεβρικών εννοιών από παιδιά ηλικίας 13-15 χρόνων. Συγκεκριμένα, στόχος της ήταν η καταγραφή της επίδοσης μαθητών αυτής της ηλικίας σε μια ποικιλία από τυπικές εργασίες της σχολικής άλγεβρας. Για το σκοπό αυτό, αξιοποιήθηκε η αντίστοιχη δοκιμασία, που συγκροτήθηκε στο πλαίσιο της έρευνας CSMS στη Βρετανία, οι ερωτήσεις της οποίας επιδίωκαν την αποτύπωση του επιπέδου κατανόησης βασικών αλγεβρικών ιδεών από τους μαθητές, παρά τη δυνατότητα εφαρμογής κανόνων και αλγορίθμων από αυτούς (Kuchemann, 1981). Από τις 23 ερωτήσεις της δοκιμασίας, 21 μεταφράστηκαν και προσαρμόστηκαν στα ελληνικά δεδομένα. Πέντε από τις ερωτήσεις αφορούσαν στην αντικατάσταση τιμών σε μια αλγεβρική παράσταση, μία στην απλοποίηση μιας αλγεβρικής παράστασης, δέκα στην κατασκευή και ερμηνεία εξισώσεων ή τύπων, καθώς και την επίλυση εξισώσεων, τρεις στην αναγνώριση σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών μιας αλγεβρικής παράστασης, δύο στη σύγκριση δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων και μία ερώτηση σε απλές πράξεις με αλγεβρικές παραστάσεις (βλ. παράρτημα).

Η δοκιμασία δόθηκε σε 329 συνολικά μαθητές των τριών τάξεων του Γυμνασίου που φοιτούσαν σε σχολικές μονάδες του Ν. Έβρου. Συγκεκριμένα, στην έρευνα συμμετείχαν 110 μαθητές της Α΄ Γυμνασίου (54 αγόρια και 56 κορίτσια), 103 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου (49 αγόρια και 54 κορίτσια) και 116 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου (62 αγόρια και 54 κορίτσια). Τα δεδομένα της έρευνας συγκεντρώθηκαν ένα μήνα πριν τη λήξη της σχολικής χρονιάς και σε διάστημα ενός μηνός. Μετά από σχετικές συνεννοήσεις με τον διευθυντή της σχολικής μονάδας και τους εκπαιδευτικούς (μαθηματικούς) που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην έρευνα, η δοκιμασία διανεμήθηκε στα τμήματα που δίδασκαν και συμπληρώθηκε από τους μαθητές τους κατά τη διάρκεια δύο συνεχόμενων διδακτικών ωρών.

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται αρχικά στη μελέτη της μεταβλητής «επίδοση κατά ερώτηση» και στη συνέχεια στη διμεταβλητή «φύλο – επίδοση κατά ερώτηση». Για την πρώτη μεταβλητή συγκροτήθηκε ο πίνακας συχνοτήτων «σωστού-λάθους» κατά ερώτηση, ενώ για τη σχέση φύλου και επίδοσης κατά ερώτηση υπολογίστηκε ο δείκτης συνάφειας Φ (προσδιορισμός του μεγέθους της συνάφειας των δύο κατηγορικών μεταβλητών) σε συνδυασμό με το χ^2-κριτήριο (διαπίστωση του αν το μέγεθος της συνάφειας είναι ή όχι σημαντικό και σε ποιο επίπεδο σημαντικότητας).

Όπως και στην περίπτωση της βρετανικής έρευνας, τα κριτήρια τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων ήταν κυρίως δύο: η πολυπλοκότητα της αλγεβρικής δομής και η σημασία των γραμμάτων, δηλαδή σε ποιο βαθμό οι μαθητές ήταν σε θέση να αποδώσουν στα γράμματα το μαθηματικό τους νόημα. Για τη συγκρότηση του τελευταίου κριτηρίου αξιοποιήθηκε η κατηγοριοποίηση που πρότεινε ο Kuchemann ως προς τη χρήση του γράμματος σε μια αλγεβρική πρόταση: μπορεί να υπολογιστεί ή να αγνοηθεί, να θεωρηθεί ως αντικείμενο, ως συγκεκριμένος άγνωστος, ως γενικευμένος αριθμός και ως μεταβλητή.

Ανάλυση δεδομένων και συζήτηση

Ο πίνακας 1 παρακάτω παρουσιάζει το ποσοστό των σωστών απαντήσεων των μαθητών του δείγματος κατά ερώτηση.

Πίνακας 1 Οι επιδόσεις των μαθητών κατά ερώτηση, τάξη και φύλο

	Α΄Γυμνασίου			*Β΄Γυμνασίου*			*Γ΄Γυμνασίου*		
	Α	*Κ*	*Σύνολο*	*Α*	*Κ*	*Σύνολο*	*Α*	*Κ*	*Σύνολο*
1	9,3	8,9	9,1	36,7	37,0	36,9	45,2	59,3	51,7
2	35,2	28,6	31,8	49,0	51,9	50,5	50,0	57,4	53,4
3	1,9	0,0	0,9	2,0	7,4	4,8	12,9	9,3	11,2
4	5,6	12,5	9,1	24,5	33,3	29,1	40,3	46,3	43,1
5	18,5	32,1	25,5	42,9	66,7	55,3	72,6	68,5	70,7
6	9,3	14,3	11,8	30,6	53,7	42,7	43,5	44,4	44,0
7	16,7	14,3	15,5	30,6	35,2	33,0	24,2	7,4	16,4
8	79,6	87,5	83,6	81,6	85,2	83,5	77,4	96,3	86,2
9	9,3	16,1	12,7	34,7	48,1	41,7	19,4	37,0	27,6
10	5,6	8,9	7,3	16,3	29,6	23,3	19,4	38,9	28,4
11	42,6	41,1	41,8	55,1	63,0	59,2	64,5	77,8	70,7
12	53,7	41,1	47,3	65,3	85,2	75,7	71,0	81,5	75,9
13	0,0	1,8	0,9	4,1	7,4	5,8	25,8	18,5	22,4
14	14,8	12,5	13,6	28,6	55,6	42,7	37,1	55,6	45,7
15	13,0	16,1	14,5	16,3	16,7	16,5	33,9	51,8	42,2
16	3,7	1,8	2,7	6,1	14,8	10,7	9,7	27,8	18,1
17	9,3	5,4	7,3	24,5	24,1	24,3	32,3	46,3	38,8
18	0,0	1,8	0,9	0,0	7,4	3,9	11,3	7,4	9,5
19	9,3	3,6	6,4	18,4	44,4	32,0	22,6	48,2	34,5
20	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0	1,0	6,4	0,0	3,4
21	3,7	3,6	3,6	18,4	33,3	26,2	33,9	61,1	46,6

Σημείωση: Στις ερωτήσεις του τεστ που περιλάμβαναν περισσότερα από ένα ερωτήματα, για να χαρακτηριστεί μια απάντηση ως «σωστή», θα έπρεπε ο μαθητής να απαντήσει σωστά τουλάχιστον στα 2/3 των υπο-ερωτημάτων της.

Σύμφωνα με τον πίνακα 1, οι επιδόσεις των μαθητών των τριών τάξεων που συμμετείχαν στην έρευνα είχαν ως εξής:

Α΄ Γυμνασίου: Η επίδοση των μαθητών του δείγματος αυτής της τάξης ήταν γενικά πολύ χαμηλή. Συγκεκριμένα, σε 16 από τις 21 ερωτήσεις του τεστ, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων δεν ξεπέρασε το 15%, ενώ σε 4 ερωτήσεις κυμάνθηκε από 25% - 48% (ερωτήσεις 2, 5, 11, 12). Στη μοναδική ερώτηση που καταγράφηκαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας (ερώτηση 8 - 83,6%), οι μαθητές έπρεπε απλώς να υπολογίσουν την περίμετρο ενός σχήματος με γνωστά μήκη πλευρών, δεν επρόκειτο δηλαδή για μια «αλγεβρική» ερώτηση.

Οι ερωτήσεις, στις οποίες σημειώθηκε μέτρια επίδοση (ερωτήσεις 2, 5, 11 και 12), είναι εκείνες όπου το γράμμα μπορεί να ερμηνευτεί έως και ως αντικείμενο (βλ. παραπάνω ιεράρχηση κατηγοριών χρήσης του γράμματος σε μια αλγεβρική έκφραση κατά Kuchemann). Από την άλλη, οι ερωτήσεις στις οποίες σημειώθηκαν σχεδόν μηδενικά ποσοστά επιτυχίας είναι κυρίως αυτές που απαιτούν είτε την ερμηνεία του γράμματος, τουλάχιστον ως συγκεκριμένου αγνώστου (ερωτήσεις 3 και 18 αντιστοίχως), είτε την εφαρμογή μετασχηματισμών σε μια αλγεβρική παράσταση (ερώτηση 13), ή μια εξίσωση για την επίλυσή της (ερώτηση 20). Τα απογοητευτικά αυτά αποτελέσματα υποδηλώνουν την απουσία κατανόησης βασικών στοιχείων της άλγεβρας από τους μαθητές αυτής της τάξης.

Β΄ Γυμνασίου: Τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών αυτής της τάξης στις ερωτήσεις της δοκιμασίας ήταν γενικά υψηλότερα των αντίστοιχων της Α΄ τάξης. Συγκεκριμένα, σε 12 από τις 21 ερωτήσεις η διαφορά αυτή κυμάνθηκε από 18% - 30%, σε δύο προσέγγισε το 15% (ερωτήσεις 10 και 17), ενώ στις υπόλοιπες επτά ήταν μικρότερη του 8% περίπου.

Οι ερωτήσεις, όπου παρατηρούνται ικανοποιητικά ποσοστά επιτυχίας (50% - 75% περίπου), είναι αυτές στις οποίες και οι μαθητές της προηγούμενης τάξης τα κατάφεραν σε κάποιο βαθμό, ενώ εκείνες όπου παρατηρούνται μέτρια ποσοστά επιτυχίας (μεταξύ του 30% και του 43%) είναι ερωτήσεις στις οποίες οι μαθητές της Β΄ τάξης ανταποκρίθηκαν πολύ καλύτερα από τους μαθητές της Α΄ τάξης (ερωτήσεις 1, 6, 7, 9, 14 και 19). Επιπλέον, στις πρώτες εντάσσονται κυρίως αλγεβρικές παραστάσεις όπου το γράμμα μπορεί να ερμηνευτεί έως και ως αντικείμενο, ενώ στις δεύτερες αλγεβρικές παραστάσεις στις οποίες το γράμμα απαιτείται να ερμηνευτεί έως και ως συγκεκριμένος άγνωστος.

Τέλος, οι ερωτήσεις με τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας (1% - 25% περίπου) είναι αυτές στις οποίες δεν παρατηρήθηκε ουσιαστική διαφορά στην επίδοση σε σχέση με την προηγούμενη τάξη. Οι ερωτήσεις που ανήκουν σε αυτήν την ομάδα είτε απαιτούν την ερμηνεία του γράμματος τουλάχιστον ως συγκεκριμένου αγνώστου (ερωτήσεις 3, 15, 16, και 18), είτε αφορούν σε κάποιο μετασχηματισμό μιας αλγεβρικής παράστασης ή μιας εξίσωσης (ερωτήσεις 13 και 20 αντιστοίχως).

Γ΄ Γυμνασίου: Οι επιδόσεις των μαθητών της Γ΄ τάξης του δείγματος εμφανίζονται γενικά λίγο υψηλότερες από τις αντίστοιχες της Β΄ τάξης. Σε 8 από τις 21 ερωτήσεις, αυτή η διαφορά επίδοσης κυμαίνεται από 10% - 26% περίπου, ενώ στις υπόλοιπες είναι μικρότερη του 8%, πάντοτε υπέρ των μαθητών της τελευταίας τάξης του Γυμνασίου. Ωστόσο, σε δύο ερωτήσεις (7 και 9) σημειώνεται μια αρκετά χαμηλότερη επίδοση των μαθητών αυτής της τάξης σε σύγκριση με εκείνην των μαθητών της προηγούμενης τάξης (κατά 15% περίπου). Επειδή και οι δύο αυτές ερωτήσεις αφορούν σε θέματα μέτρησης και απαιτούν την ερμηνεία του γράμματος ως αντικειμένου ή ως γενικευμένου αριθμού, η αιτιολογία αυτής της πτώσης θα πρέπει να αναζητηθεί τόσο στο Αναλυτικό Πρόγραμμα (μικρή ενασχόληση των μαθητών αυτής της τάξης τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο με θέματα μέτρησης στη Γεωμετρία) όσο και στην «αστάθεια» της κατάκτησης της χρήσης ενός γράμματος με τους παραπάνω τρόπους, που αποτελεί αντικείμενο μελέτης κυρίως της Β΄ τάξης.

Οι ικανοποιητικές, οι μέτριες και οι χαμηλές επιδόσεις σε αυτήν την τάξη (περίπου 50% - 76%, 36% - 47% και 3% - 29% αντιστοίχως) κυμαίνονται στα ίδια επίπεδα και παρατηρούνται στις ίδιες γενικά ερωτήσεις σε σχέση με τη Β΄ τάξη. Θα μπορούσε λοιπόν να ισχυριστεί κανείς ότι στη Γ΄ τάξη παρατηρείται κάποια σταθεροποίηση σε ό,τι αφορά την επίδοση των μαθητών σε δραστηριότητες στις οποίες είτε επιβάλλεται η ερμηνεία του γράμματος έως και ως συγκεκριμένου αριθμού, είτε απαιτείται ο μετασχηματισμός μιας αλγεβρικής έκφρασης. Ωστόσο, τα ποσοστά επιτυχίας σε δραστηριότητες που απαιτούν την κατανόηση του γράμματος τουλάχιστον ως γενικευμένου αριθμού και ακόμη περισσότερο ως μεταβλητής παραμένουν σε πολύ χαμηλά επίπεδα.

Συνοψίζοντας, οι επιδόσεις των μαθητών σε δραστηριότητες με αλγεβρικές εκφράσεις που απαιτούν είτε την ερμηνεία του γράμματος το πολύ ως αντικειμένου, είτε κάποιο μετασχηματισμό των αλγεβρικών εκφράσεων, βρίσκονται σε πολύ χαμηλά επίπεδα στην Α΄ Γυμνασίου, είναι σε ικανοποιητικό βαθμό υψηλότερες στη Β΄ Γυμνασίου και καταγράφονται στα ίδια περίπου επίπεδα στη Γ΄ Γυμνασίου. Σε ό,τι αφορά τις δραστηριότητες στις οποίες απαιτείται η ερμηνεία του γράμματος το πολύ ως συγκεκριμένου αριθμού, η επίδοση των μαθητών του δείγματος είναι σχεδόν μηδενική στην Α΄ Γυμνασίου, σημαντικά υψηλότερη στη Β΄ Γυμνασίου χωρίς, ωστόσο, να ξεπεράσει το 45% και στα ίδια επίπεδα στη Γ΄ Γυμνασίου. Τέλος, το ποσοστό επιτυχίας σε ερωτήσεις που απαιτούν την ερμηνεία του γράμματος τουλάχιστον ως γενικευμένου αριθμού κυμαίνεται και στις τρεις τάξεις σε πολύ χαμηλά επίπεδα (κάτω του 10%). Τα παραπάνω συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό με τα σχετικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας, επιβεβαιώνοντας τις καταλυτικές επιπτώσεις:

α) των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών στο Δημοτικό Σχολείο (χαμηλό σημείο εκκίνησης στην Α΄ Γυμνασίου, που συνεπάγεται μέτριες επιδόσεις σε δραστηριότητες που απαιτούν απλώς τον υπολογισμό της τιμής του γράμματος και ακόμη πιο μέτριες

σε αυτές όπου απαιτείται το γράμμα είτε να αγνοηθεί είτε να γίνει αντιληπτό ως αντικείμενο),
β) της ιδιαίτερα αφαιρετικής φύσης της ερμηνείας του γράμματος ως γενικευμένου αριθμού και ακόμη περισσότερο ως μεταβλητής (εξαιρετικά χαμηλά ποσοστά επίδοσης στις αντίστοιχες ερωτήσεις σε όλες τις ηλικίες) και
γ) της προσέγγισης που ακολουθείται στη διδασκαλία της άλγεβρας στο Γυμνάσιο, με τους καταιγιστικούς ρυθμούς επεξεργασίας της αλγεβρικής γνώσης και την έμφαση στο μηχανικό χειρισμό των αλγεβρικών συμβόλων (μόλις λιγότεροι από τους μισούς μαθητές του δείγματος της Β΄ και της Γ΄ Γυμνασίου ήταν σε θέση να ανταποκριθούν σε δραστηριότητες που προϋποθέτουν την ανάπτυξη κάποιας αλγεβρικής σκέψης, αν και όχι στα αναμενόμενα επίπεδα, με δεδομένη την εκτεταμένη αλγεβρική τους εμπειρία στην τάξη).

Από τον πίνακα 1 γίνεται φανερό ότι υπάρχουν ορισμένες ερωτήσεις, στις οποίες παρατηρείται μια αξιοσημείωτη διαφορά μεταξύ των επιδόσεων των δύο φύλων (π.χ. ερωτήσεις 5 και 6 στη Β΄ Γυμνασίου). Έτσι, θεωρήθηκε ενδιαφέρον να εξεταστεί η συνάφεια των μεταβλητών φύλο και επίδοση κατά ερώτηση. Για το σκοπό αυτό υπολογίστηκαν ο δείκτης Φ και το χ^2-κριτήριο για τις συγκεκριμένες διμεταβλητές και για κάθε ερώτηση της δοκιμασίας χωριστά. Ο πίνακας 2 παρακάτω παρουσιάζει τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης μόνο για τις περιπτώσεις στις οποίες εντοπίστηκε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο μεταβλητών (στην Α΄ Γυμνασίου δεν εντοπίστηκε καμία στατιστικά σημαντική διαφορά επίδοσης μεταξύ των δύο φύλων).

Πίνακας 2 Ο δείκτης Φ για τις μεταβλητές φύλο και επίδοση κατά ερώτηση

Ερώτηση	*Β΄ Γυμνασίου*		*Γ΄ Γυμνασίου*	
	Φ	χ^2	*Φ*	χ^2
5	-0,24	6,9*		
6	-0,23	6,58**		
8			-0,27	10,31*
9			-0,20	5,45**
10			-0,22	6,41**
12	-0,23	6,66*		
14	-0,27	8,79*	-0,18	4,74**
15			-0,18	4,60**
16			-0,23	7,66*
19	-0,28	9,27*	-0,027	9,52*
21			-0,27	9,74*

*: Επίπεδο σημαντικότητας 1%, **: Επίπεδο σημαντικότητας 5%

Από τον πίνακα 2 γίνεται φανερό ότι οι περισσότερες στατιστικά σημαντικές διαφορές στην επίδοση των δύο φύλων εμφανίζονται στη Γ΄ Γυμνασίου και είναι πάντοτε υπέρ των κοριτσιών. Συγκεκριμένα, τα κορίτσια της Β΄ Γυμνασίου και ακόμη περισσότερο της Γ΄ Γυμνασίου τα κατάφεραν καλύτερα από τα αγόρια κυρίως σε προβλήματα, η επίλυση των οποίων απαιτεί την ερμηνεία του γράμματος έως και ως συγκεκριμένου αγνώστου. Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με μέρος της σχετικής βιβλιογραφίας που υποστηρίζει ότι τα κορίτσια ηλικίας 14-15 χρόνων σημειώνουν συχνά υψηλότερες επιδόσεις από τα αγόρια της ίδιας ηλικίας σε μαθηματικές δραστηριότητες που απαιτούν γλωσσικές ικανότητες (Malone & Miller, 1993), καθώς και σε διάφορες αλγεβρικές δοκιμασίες (π.χ. Hanna, 1989).

Συμπεράσματα

Είναι φανερό από την ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας ότι η άλγεβρα, παρά την αξία της για τη μαθηματική και για την ευρύτερη εκπαίδευση των μαθητών και παρά το σημαντικό αριθμό διδακτικών ωρών που αφιερώνονται στο σχολείο για τη μελέτη της, παραμένει για τους περισσότερους από τους μαθητές μια από τις δυσκολότερες περιοχές του Αναλυτικού Προγράμματος των μαθηματικών. Είναι, λοιπόν, αναγκαία η συνέχιση τής σε βάθος διερεύνησης των τρόπων, με τους οποίους οι μαθητές προσεγγίζουν τις αλγεβρικές ιδέες. Η μελέτη που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία εντάσσεται σε αυτήν την προσπάθεια. Συγκεκριμένα, στόχος της ήταν η ουσιαστικότερη κατανόηση του τρόπου, με τον οποίο αντιλαμβάνονται οι μαθητές συγκεκριμένες πτυχές της σχολικής άλγεβρας και ειδικότερα τις χρήσεις γραμμάτων στις διάφορες αλγεβρικές παραστάσεις και ισότητες.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η πλειοψηφία των 13-15 χρόνων μαθητών του δείγματος δεν ήταν σε θέση να απαντήσουν με επιτυχία σε ερωτήσεις οι οποίες απαιτούσαν την αντιμετώπιση του γράμματος ως γενικευμένου αριθμού ή ακόμη και ως συγκεκριμένου αριθμού. Η αποτυχία αυτή δεν μπορεί να ερμηνευτεί στη βάση του χαμηλού γνωστικού επιπέδου των μαθητών, καθώς μια τέτοια ερμηνεία θα αδυνατούσε να εξηγήσει τη μεγάλη ποικιλία λαθών που παρατηρήθηκαν στις απαντήσεις των μαθητών του δείγματος. Οι τελευταίες φανερώνουν ότι οι μαθητές, για να ερμηνεύσουν γράμματα και αλγεβρικές εκφράσεις, στηρίζονται συχνά στη διαίσθησή τους, σε εικασίες, αναλογίες με άλλα συμβολικά συστήματα που γνωρίζουν και λανθασμένες αντιλήψεις που αποτελούν προϊόν αποτυχημένης διδασκαλίας. Επιπλέον, αρκετές φορές φαίνεται να αγνοούν βασικές αρχές του συμβολικού συστήματος των μαθηματικών, όπως η αρχή της συμβατότητας, και να μη συνειδητοποιούν την ισχύ του. Οι παρανοήσεις τους οδηγούν σε σοβαρές δυσκολίες στην προσέγγιση των αλγεβρικών ιδεών, οι οποίες είναι δυνατόν να παραμείνουν για πολλά χρόνια, αν δεν εντοπιστούν και αντιμετωπιστούν. Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι, στους άπειρους στην άλγεβρα μαθητές, οι παρανοήσεις και τα λάθη υποδηλώνουν χαμηλό επίπεδο κατάκτησης της αλγεβρικής γνώσης και αποτελούν προϊόν της προσπάθειάς τους να κατανοήσουν ένα νέο σύστημα συμβολισμού ή να μεταφέρουν νοήματα από άλλα πλαίσια. Ωστόσο, στους πιο έμπειρους στην άλγεβρα μαθητές, τα λάθη και οι παρανοήσεις υποδηλώνουν αποτυχία στη σταθεροποίηση της μάθησης, η οποία μπορεί να οφείλεται σε πολλούς παράγοντες και, κυρίως, στις σχετικές εμπειρίες μάθησης που τους παρέχονται στο σχολείο. Τα παραπάνω φανερώνουν ότι, καθώς οι μαθητές του δείγματος πλησιάζουν στο τέλος της γυμνασιακής τους εκπαίδευσης, η αλγεβρική τους σκέψη εμφανίζεται να αναπτύσσεται με ιδιαίτερα αργούς ρυθμούς, παρουσιάζοντας κατακτήσεις σε ζητήματα που αφορούν, κυρίως, σε διαδικαστικά χαρακτηριστικά της αλγεβρικής γνώσης αλλά και σοβαρά κενά και παρανοήσεις, που συνδέονται με εννοιολογικά και δομικά δεδομένα της, γεγονός που σηματοδοτεί χαμηλά επίπεδα τυποποίησης αυτής της γνώσης και συνιστά ένα ασταθές υπόβαθρο για την περαιτέρω μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών. Η διαπίστωση αυτή καθιστά φανερή την αναγκαιότητα επίγνωσης εκ μέρους των εκπαιδευτικών των αντιλήψεων που διαμορφώνουν οι μαθητές, καθώς και των προηγούμενων γνώσεών τους σχετικά με τη σημασία των γραμμάτων και τον αλγεβρικό συμβολισμό ώστε να είναι σε θέση να σχεδιάσουν και να υλοποιήσουν κατάλληλα τη διδασκαλία των αντίστοιχων ενοτήτων του Αναλυτικού Προγράμματος των μαθηματικών. Ιδιαίτερα, αποτελεί ευθύνη τους να εξασφαλίσουν ότι οι πρώτες, κυρίως, εμπειρίες των μαθητών στη χρήση γραμμάτων στην άλγεβρα θα θέσουν τις βάσεις για μια σαφούς δομής αλγεβρική γνώση. Η δοκιμασία που αξιοποιήθηκε στην παρούσα εργασία μπορεί να αποτελέσει ένα πλαίσιο προσέγγισης και ερμηνείας των προσπαθειών των μαθητών τους προς αυτήν την κατεύθυνση.

Βιβλιογραφία

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B. & Lepage, A. (1992). Arithmetic and algebraic thinking in problem-solving. In W. Geeslin & Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 65-72). Durham, N. Hampshire: Program Committee.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor, U.K.: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (20-32). Reston, V.A.: N.C.T.M.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: a cognitive perspective* (9-24). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Farmaki, B., Klaoudatos, N., & Verikios, P. (2004). From functions to equations: introduction to algebraic thinking to 13 year-old students. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. IV, 393-400). Bergen, Norway: Program Committee.

Hanna, J. (1989). Mathematics achievement of girls and boys in grade eight: research from twenty countries. *Educational Studies in Mathematics*, 20 (2), 225-232.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (390-419). New York: MacMillan Publishing.

Kuchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.) *Children's Understanding of Mathematics,* 11-16 (102-119). London: John Murray.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1998). Cognitive models underlying algebraic and non-algebraic solutions to unequal partition problems. *Mathematics Education Research Journal*, 10 (2), 46-60.

Malone, J., & Miller, D. (1993). Communicating mathematical terms in writing: some influential variables. In M. Stephens, A. Waywood, D. Clarke, & J. Izard (Eds.), *Communicated mathematics: Perspectives from classroom practice and current research* (177-190). Hawthorn, VIC.: Australian Council for Educational Research.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms*. London: Routledge Kegan & Paul.

Ryan, J., & Williams, J. (1998). The search for pattern: student understanding of the table of values representation for function. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds), *Teaching mathematics in New Times. Proceedings of the 18th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 2, Brisbane: MERGA.

Thwaites, G. N. (1982). Why do children find algebra difficult? *Mathematics in School*, 11 (4), 16-17.

Wagner, S., Rachlin, S. L., & Jensen, R. J. (1984). *Algebra Learning Project: Final report*. Athens: University of Georgia, Dpt. of Mathematics.

Παράρτημα - Δοκιμασία

ΦΥΛΟ: Αγόρι Κορίτσι ΤΑΞΗ: …….

1. Συμπλήρωσε τα κενά: α) $\chi \to \chi+2$, $6 \to$ … $r \to$ … β) $\chi \to 4\chi$, $3 \to$ …

2. Αν η είναι φυσικός αριθμός, γράψε το μικρότερο και τον μεγαλύτερο από τους:
   $n+1$, $n+4$, $n-3$, $n-7$ μικρότερος ………………… μεγαλύτερος ……..

3. Αν n είναι φυσικός αριθμός, ποιος είναι μεγαλύτερος, $2n$ ή $n+2$;
   Απάντηση: …………………………….
   Επεξήγηση: ……………………………

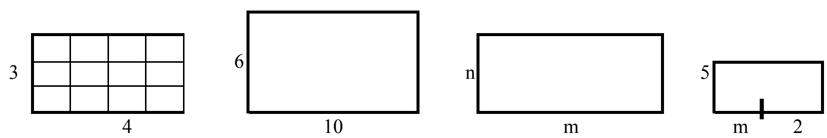
4. α. Το 4 προστιθέμενο στο n μπορεί να γραφεί ως $n+4$. Πρόσθεσε το 4 σε καθένα από τα επόμενα:
   8 ………… $n+5$ …………. $3n$ ………….

   β. Το n πολλαπλασιαζόμενο επί 4 μπορεί να γραφεί ως $4n$. Πολλαπλασίασε καθένα από τα επόμενα με 4:
   8 ………… $n+5$ …………. $3n$ ………….

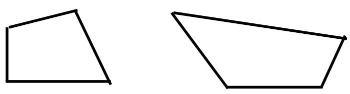
5. Αν $a+b = 43 \longrightarrow a+b+2 =$ …. Αν $n-246 = 762 \longrightarrow n-247=$ ……… Αν $e+f=8 \longrightarrow e+f+g=$ ….

6. Τι μπορείς να πεις για το a, αν $a+5=8$ …………………………
   Τι μπορείς να πεις για το b, αν $b+2$ είναι ίσο με $2b$ …………………………

7. Ποια είναι τα εμβαδά των σχημάτων;



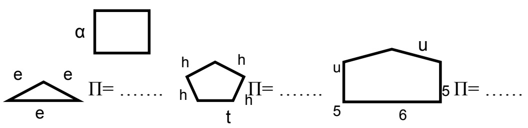
E= ………….. E= ………….. E= ………….. E= …………..

8. 

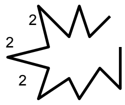
Η περίμετρος του πρώτου σχήματος είναι ίση με 6+3+4+2, που είναι ίσο με 15. Να βρεθεί η περίμετρος του δεύτερου σχήματος Π= ……..

9. Το τετράγωνο έχει πλευρά μήκους α. Έτσι για την περίμετρό του μπορούμε να γράψουμε Π= 4α

   Τι μπορούμε να γράψουμε για την περίμετρο καθενός από τα διπλανά σχήματα;



Μέρος του παρακάτω σχήματος δεν έχει σχεδιαστεί. Υπάρχουν n πλευρές συνολικά, όλες μήκους 2. Ποια είναι η περίμετρός του;



Π = …….

10. Τα μπλε χαρτόνια κοστίζουν 8 λεπτά το ένα και τα κόκκινα 6 λεπτά το ένα. Αν μ είναι ο αριθμός των μπλε χαρτονιών και κ ο αριθμός των κόκκινων, που αγοράστηκαν για να φτιάξουμε μια μάσκα, τι αντιπροσωπεύει το 8μ+6κ; ………..

Ποιος είναι ο συνολικός αριθμός χαρτονιών που αγοράστηκαν; ……..

11. Τι μπορείς να πείς για το u, αν u=v+3 και v=1; ……………………………………………….. Τι μπορείς να πείς για το m, αν m=3n+1 και n=4; ………………………………………………..

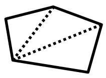
12. Αν ο Γιάννης έχει ζ βώλους και ο Πέτρος έχει λ βώλους, τι θα μπορούσες να γράψεις για τον αριθμό των βώλων που έχουν και οι δυο μαζί; …………………………………………

13. Το a+3a μπορεί να γραφεί πιο απλά ως 4a.Γράψε, όπου είναι δυνατό, τις παρακάτω πιο απλά:

2a+5a= ……. 2a+5b=……. 3a-(b+a)=…………. a+4+a-4= … (a+b)+a= ………

2a+5b+a=….. (a-b)+b= …… 3ab+a= …… (a+b)+(ab)= ……….

14. Σ' ένα σχήμα σαν το παρακάτω, μπορείς να βρεις τον αριθμό των διαγωνίων από μια συγκεκριμένη κορυφή, αφαιρώντας 3 απ' τον αριθμό των πλευρών του



Έτσι ένα σχήμα με 5 πλευρές έχει 2 διαγωνίους
Έτσι ένα σχήμα με 57 πλευρές έχει …... διαγωνίους
Έτσι ένα σχήμα με k πλευρές έχει …... διαγωνίους

15. Τι μπορείς να πεις για το c, αν c+d = 10 και c είναι μικρότερος του d; …………………………

16. Ο βασικός εβδομαδιαίος μισθός της Μαρίας είναι 150 ευρώ. Πληρώνεται επίσης άλλα 8 ευρώ για κάθε ώρα υπερωρίας. Αν h είναι ο αριθμός των ωρών υπερωρίας της και w η συνολική εβδομαδιαία αμοιβή της σε ευρώ, γράψε μια ισότητα που να συνδέει τα w και h. ....

Ποια θα ήταν η συνολική εβδομαδιαία αμοιβή της αν εργαζόταν 4 ώρες υπερωρία κάθε εβδομάδα; …………

17. Πότε είναι τα επόμενα αληθή; Πάντοτε, ποτέ ή μερικές φορές; Υπογράμμισε τη σωστή απάντηση

A+B+C = C+A+B Πάντοτε, ποτέ , μερικές φορές, όταν.........
L+M+N = L+P+N Πάντοτε, ποτέ , μερικές φορές, όταν.........

18. a = b+3 Τι θα συμβεί στο a, αν το b μεγαλώσει κατά 2 ; ………………………

f = 3g+1 Τι θα συμβεί στο f, αν το g μεγαλώσει κατά 2 ; ………………………

19. Το σταφιδόψωμο κοστίζει σ λεπτά το καθένα και το κουλούρι κ λεπτά το καθένα.Αν αγοράσω 4 σταφιδόψωμα και 3 κουλούρια, τι σημαίνει το 4σ+3κ; ……………

20. Αν η ισότητα $(x+1)3 + x = 349$ είναι αληθής όταν x=6, τότε ποια τιμη του χ κάνει την ισότητα $(5x+1)^3 +5x=349$ αληθή;

21. Τα μπλε μολύβια κοστίζουν 30 λεπτά το ένα και τα κόκκινα μολύβια κοστίζουν 25 λεπτά το ένα. Αγοράζω μερικά μπλε και κόκκινα μολύβια και όλα μαζί κοστίζουν 2,5 ευρώ. Αν μ είναι ο αριθμός των μπλε μολυβιών που αγοράστηκαν και κ ο αριθμός των κόκκινων μολυβιών που αγοράστηκαν, γράψε τη σχέση που συνδέει τα μ και κ. ……..