Η επίλυση προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών

Μιχάλης Βόσκογλου, *Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών Α.Τ.Ε.Ι. Πάτρας*

Περίληψη

Ο στόχος αυτού του άρθρου είναι η μελέτη του ρόλου που διαδραματίζει το πρόβλημα στη διδασκαλία και εκμάθηση των μαθηματικών. Για τον λόγο αυτό επιχειρείται μια ανασκόπηση των ιδεών, που εμφανίσθηκαν στη μαθηματική εκπαίδευση σχετικά με το θέμα αυτό, από την εποχή που ο Polya διατύπωσε τις πρώτες σκέψεις του για την επίλυση προβλημάτων (problem-solving) μέχρι σήμερα. Οι ιδέες αυτές αντιπαραβάλλονται με απόψεις που δίδουν έμφαση σε άλλους παράγοντες για τη μάθηση, όπως είναι η εστίαση στο περιεχόμενο των διαφόρων ενοτήτων, ο αυτοματισμός των κανόνων μέσα από τη μελέτη υποδειγματικά λυμένων παραδειγμάτων, η απόκτηση των κατάλληλων σχημάτων γνώσης κ.τ.λ. Μέσα από την αντιπαραβολή αυτή καταλήγουμε στην τεκμηριωμένη διατύπωση των προσωπικών μας θέσεων και απόψεων πάνω σε αυτό το θεμελιώδες για τη μαθηματική εκπαίδευση θέμα.

Εισαγωγή

Από τις απαρχές σχεδόν των μαθηματικών εμφανίσθηκαν δύο ακραίες φιλοσοφίες για τον προσανατολισμό τους (παρουσίαση, διδασκαλία, έρευνα κ.τ.λ.): Ο *φορμαλισμός (formalism),* όπου έμφαση δίδεται στο περιεχόμενο και την αξιωματική θεμελίωση και ο *ενορατισμός (intuitionism)*, όπου η προσοχή στρέφεται κυρίως προς τις διαισθητικές διαδικασίες και την επίλυση προβλημάτων.

Ο κ. Μιχάλης Βόσκογλου είναι Καθηγητής στη Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών Α.Τ.Ε.Ι. Πάτρας.

Η αξιωματική θεμελίωση της κλασικής Γεωμετρίας στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της φορμαλιστικής έκφρασης των μαθηματικών κατά την αρχαιότητα. Ένα ανάλογο παράδειγμα για την ενορατική φιλοσοφία αποτελεί το λιγότερο γνωστό στον δυτικό κόσμο σύγγραμμα της αρχαίας Κίνας με τίτλο *Jiu Zhang Suan Shu (Εννέα Κεφάλαια από τα Μαθηματικά).* Αν και πολύ διαφορετικό στη μορφή και τη δομή του από το σύγγραμμα του Ευκλείδη, απετέλεσε επί αιώνες το βασικό διδακτικό βιβλίο των μαθηματικών στην αρχαία Κίνα αλλά και στις περισσότερες άλλες χώρες της Ανατολικής Ασίας. Ο τίτλος του έχει μεταφρασθεί με διάφορους τρόπους. Αν και το «μαθηματικά» μοιάζει να είναι μια ακριβέστερη μετάφραση του “suan shu” από ό,τι η «μαθηματική τέχνη», φαίνεται ωστόσο ότι τα μαθηματικά την εποχή εκείνη στην Ανατολή αντιμετωπίζονταν περισσότερο ως τέχνη σε σύγκριση με τον τρόπο αντιμετώπισής τους στη Δύση ως επιστήμης (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Βόσκογλου, 2005).

Πάρα πολλούς αιώνες αργότερα, κατά τη διάρκεια του 19^{ου} και των αρχών του 20^{ού} αιώνα, τα γνωστά παράδοξα της θεωρίας των συνόλων στάθηκαν η αφορμή μιας έντονης διαμάχης μεταξύ των υποστηρικτών των δύο αυτών φιλοσοφιών, που ωστόσο επεκτάθηκε πολύ βαθύτερα στη μαθηματική σκέψη (π.χ. Βόσκογλου, 1999/2006).

Τα τελευταία εκατό περίπου χρόνια το «εκκρεμές των μαθηματικών» ταλαντεύεται από το ένα άκρο στο άλλο. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την εξέλιξη από τα βασισμένα αυστηρά στην αξιωματική θεμελίωση μαθηματικά των Bourbaki με την πλήρη απουσία της διαίσθησης-ενόρασης από το περιεχόμενό τους, στη σημερινή, με τη βοήθεια των Η/Υ, άνθιση των πειραματικών μαθηματικών (μέθοδοι παρουσίασης της ύλης, προσεγγιστικές αποδείξεις, γραφικά Η/Υ κ.τ.λ.), που αποτελούν πλέον αναπόσπαστο τμήμα της μαθηματικής σκέψης και έρευνας. Αναφέρουμε ακόμη την εξέλιξη από την ανακάλυψη «παθολογικών τεράτων», όπως η καμπύλη του Peano, το σύνολο του Cantor κ.τ.λ. -για τα οποία ο Poincaré έλεγε ότι πρέπει να τα πετάξουμε μακριά σε ένα «ζωολογικό κήπο των μαθηματικών» και να μην τα επισκεφθούμε ποτέ ξανά- στην ανακάλυψη μιας νέας γεωμετρίας, της Μορφοκλασματικής Γεωμετρίας της Φύσης. Πράγματι, με έκπληξη ο δημιουργός της Madelbrot (1983) διαπίστωσε ότι τα παράξενα αυτά αντικείμενα, που από το 1975 πήραν την ονομασία fractals, δεν αποτελούν μαθηματικές ανωμαλίες, αλλά μάλλον τα ίδια τα σχέδια του χάους της Φύσης!

Ως συνέπεια αυτής της διαρκούς ταλάντωσης του «μαθηματικού εκκρεμούς» δραματικές αλλαγές συνέβησαν τα τελευταία 50-60 χρόνια και στον χώρο της -σχολικής κυρίως- μαθηματικής εκπαίδευσης, που από την εποχή περίπου του Μ.

Ναπολέοντα παρέμεινε αυστηρά προσκολλημένη στο παραδοσιακό σχήμα «Πρακτική Αριθμητική – Άλγεβρα – Γεωμετρία – Τριγωνομετρία».

Πράγματι, οι ραγδαίες εξελίξεις στον χώρο των μαθηματικών, όπως είχαν διαμορφωθεί από το τελευταίο τέταρτο του 19ου αιώνα, δημιούργησαν ένα διαρκώς διευρυνόμενο χάσμα μεταξύ των σχολικών και των σύγχρονων μαθηματικών. Το αποτέλεσμα, λοιπόν, της μεταπολεμικής προσπάθειας, ώστε τα μαθηματικά ως θέμα διδασκαλίας να παρουσιασθούν σε αρμονία με τα μαθηματικά ως επιστήμη, ήταν η εισαγωγή κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του ’60 των *«Νέων Μαθηματικών»* στα σχολικά προγράμματα των περισσοτέρων ανεπτυγμένων χωρών (βλ. Βόσκογλου, 1986, παράγραφος 6).

Δεν χρειάσθηκε, ωστόσο, να περάσουν πολλά χρόνια για να γίνει αντιληπτό ότι τα νέα αυτά προγράμματα σπουδών δεν λειτουργούσαν καθόλου ικανοποιητικά. ΄Ετσι και μετά το μάλλον ασαφές σύνθημα *«πίσω στα βασικά»*, μεγάλη έμφαση δόθηκε κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του ’80 στη χρήση του προβλήματος ως εργαλείου, αλλά και κινήτρου, για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία και κατανόηση των μαθηματικών.

Ο στόχος του παρόντος άρθρου είναι να μελετηθεί αυτός ακριβώς ο ρόλος του προβλήματος, σε αντιδιαστολή με υφιστάμενες εναλλακτικές απόψεις, που δίδουν έμφαση σε άλλους παράγοντες για τη μάθηση.

Μια ανασκόπηση των ιδεών για την επίλυση προβλημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση

Η εκμάθηση των μαθηματικών μέσα από τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων είναι βασισμένη στην ιδέα της επανα-ανακάλυψης (rediscovery). Ο Polya (1963), υποστηρίζοντας ότι κάθε νέα γνώση στα μαθηματικά μπορεί να προκύψει μέσα από την επίλυση ενός κατάλληλα επιλεγμένου προβλήματος, δηλαδή με τη χρήση ήδη υπάρχουσας γνώσης, θεωρεί την επανα-ανακάλυψη ως το κύριο εργαλείο για την υλοποίηση της ιδέας του Piaget για την *ενεργό μάθηση (active learning).*

Για τη διαδικασία της επανα-ανακάλυψης διακρίνει τρεις *διαδοχικές φάσεις (consequtive phases):* Την εξερεύνηση, τη διαμόρφωση και την αφομοίωση. Τέλος, *το επιθυμητό κίνητρο (best motivation)*, δηλαδή ο καλύτερος τρόπος με τον οποίο ο δάσκαλος δημιουργεί την κατάλληλη κατάσταση μάθησης, είναι το τρίτο, αλλά όχι και λιγότερο σημαντικό, από τα φημισμένα του *αξιώματα μάθησης (axioms of learning)*. Για τα αξιώματα αυτά ο ίδιος ο Polya συνήθιζε να λέει ότι δεν αποτελούν δική του επινόηση αλλά ότι έχουν προκύψει μέσα από την πείρα πολλών ετών των ειδικών της μάθησης, ψυχολόγων και παιδαγωγών.

Ο Polya (1945, 1954, 1962/65) έθεσε, επίσης, τις βάσεις για την εξερεύνηση των *ευρετικών στρατηγικών (heuristics)* για την επίλυση προβλημάτων, αφού ήταν ο πρώτος που τις περιέγραψε με τέτοιο τρόπο, ώστε να μπορούν να διδαχθούν. Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο ευρετική στρατηγική εννοούμε μια γενική πρόταση ή τεχνική, η οποίο βοηθά τον λύτη να καταλάβει ή να λύσει ένα δοσμένο πρόβλημα. Ο Polya εισηγήθηκε, ακόμη, και κάποιους *κανόνες προτίμησης (rules of preference),* που βοηθούν τον λύτη να βάλει σε κάποια τάξη τις ευρετικές που έχει στη διάθεσή του για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Για παράδειγμα, το λιγότερο δύσκολο προηγείται του δυσκολότερου, ό,τι έχει περισσότερα κοινά στοιχεία με το πρόβλημα προηγείται αυτού που έχει λιγότερα κοινά στοιχεία κ.τ.λ.

Πολλοί ερευνητές στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως οι Lucas, Goldberg, Hatfield, Cantowski, Putt, Wickelgren κ.ά. εργάσθηκαν πάνω στις ιδέες του Polya, προσπαθώντας να δείξουν ότι οι ευρετικές μπορούν να βοηθήσουν αποτελεσματικά κατά την επίλυση προβλημάτων. Το βασικό συμπέρασμα, στο οποίο κατέληξαν, είναι ότι οι μαθητές πρέπει να διδαχθούν να λύνουν τα προβλήματα με τους τρόπους που εφαρμόζουν οι έμπειροι λύτες.

Ένα μεγάλο μέρος της έμφασης που δόθηκε κατά τη δεκαετία του '80 στη χρήση των ευρετικών για την επίλυση προβλημάτων, φαίνεται να προέρχεται από παρατηρήσεις ότι συχνά οι μαθητές είναι ανίκανοι να χρησιμοποιήσουν έξυπνα και αποτελεσματικά τις μαθηματικές τους γνώσεις για την επίλυση προβλημάτων. Το συμπέρασμα ήταν ότι αυτό συμβαίνει, επειδή ακριβώς δεν γνωρίζουν να χρησιμοποιούν τις κατάλληλες ευρετικές στρατηγικές.

Ο Schoenfeld (1980, παράγραφος 1) συμβουλεύει τον λύτη να προσπαθεί να ανακαλύψει στη διατύπωση του κάθε προβλήματος τις κατάλληλες λέξεις ή εκφράσεις *(cues)* που θα τον βοηθήσουν στην επιλογή της κατάλληλης ευρετικής για την επίλυσή του. Για παράδειγμα, η λέξη «μοναδική» συνήθως παραπέμπει στη χρήση της σε άτοπο απαγωγής, η φράση «για κάθε φυσικό αριθμό» προϋποθέτει την εφαρμογή της τέλειας επαγωγής κ.τ.λ.

Εντούτοις, η γνώση μιας στρατηγικής δεν είναι αρκετή. Ο λύτης πρέπει, επίσης, να γνωρίζει πώς να τη χρησιμοποιεί κατάλληλα για την επίλυση του κάθε προβλήματος. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1980, παράγραφος 4) μπορούμε να θεωρήσουμε μια ευρετική ως ένα «κλειδί» για να ξεκλειδώσουμε το πρόβλημα. Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός διαθέσιμων «κλειδιών» και το δοσμένο πρόβλημα συνήθως «ανοίγει» με μερικά (ή ένα) μόνο από αυτά. Επομένως, μια στρατηγική για την εύρεση του κατάλληλου «κλειδιού» μάς είναι ενδεχομένως απαραίτητη. Κάθε τέτοια στρατηγική ο Schoenfeld την ονομάζει *σφαιρική ευρετική* *(global heuristic)*, π.χ. για τη λύση ενός πολύπλοκου προβλήματος συνήθως βοηθά η εξέταση και επίλυση ενός ανάλογου απλούστερου προβλήματος και στη συνέχεια η μεταφορά των συμπερασμάτων της λύσης του στο αρχικό πρόβλημα.

Χρησιμοποιώντας μια σφαιρική ευρετική ο λύτης πρέπει να την εξειδικεύει κάθε φορά ανάλογα με τη μορφή του δοσμένου προβλήματος. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας την παραπάνω ευρετική του *«ανάλογου προβλήματος»* για ένα σύνθετο πρόβλημα με πολλές μεταβλητές μπορεί να εξετάσει πρώτα ένα ανάλογο πρόβλημα με λιγότερες μεταβλητές, χρησιμοποιώντας την για την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος στον χώρο μπορεί να επιλύσει πρώτα το αντίστοιχο πρόβλημα στο επίπεδο κ.τ.λ.

Στο *«πρότυπο απόδοσης του έμπειρου λύτη» (expert performance model)*, που αποτελεί στην ουσία μια βελτιωμένη παραλλαγή των ιδεών του Polya, ο Schoenfeld (1980, παράγραφος 5) διακρίνει συνολικά πέντε στάδια στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων: Την *ανάλυση* του προβλήματος, την *εξερεύνηση (exploration),* τον *σχεδιασμό (design)* της λύσης, την *εκτέλεση (implementation)* και την *επαλήθευση (verification).* Η πραγματική του, ωστόσο, επιτυχία είναι ότι για καθένα από τα στάδια αυτά ο Schoenfeld παραθέτει ένα κατάλογο πιθανών ευρετικών, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον λύτη για την επιτυχή διεκπεραίωσή του (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Βόσκογλου, 1991).

Η μελέτη του επιπέδου και των δυνατοτήτων των μαθητών για την επίλυση προβλημάτων, αλλά και της αποτελεσματικότητας των εκπαιδευτικών προγραμμάτων που σχεδιάζονται για τον σκοπό αυτό, απαιτεί μέτρηση και αρκετές προσπάθειες έχουν γίνει προς την κατεύθυνση αυτή (Malone et al., 1980· Schoen & Oehmke, 1980· Schoenfeld, 1982 κ.ά.).

Οι Voskoglou και Perdikaris (1991, 1993 & 1994) ανέπτυξαν ένα Μαρκοβιανό πρότυπο για τη μέτρηση των ικανοτήτων μιας ομάδας λυτών προβλημάτων και παρουσίασαν διάφορα παραδείγματα για να απεικονίσουν την αποτελεσματική χρήση του στην πράξη. Οι καταστάσεις (states) της πεπερασμένης αλυσίδας Markov, που εισήγαγαν στο μοντέλο τους, συμπίπτουν με τα αντίστοιχα στάδια του μοντέλου του Schoenfeld για την επίλυση προβλημάτων, που περιγράψαμε παραπάνω.

Οι Stillman και Galbraith (1998) σε μια συστηματική μελέτη τους πάνω στις δραστηριότητες ομάδων κοριτσιών των τελευταίων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά την επίλυση προβλημάτων διαπίστωσαν ότι περισσότερος χρόνος αφιερώθηκε για τις διαδικασίες προσανατολισμού (εξερεύνηση) και εκτέλεσης της λύσης παρά για τις διαδικασίες οργάνωσης (σχεδιασμός) και επαλήθευσης.

Πράγματι, συχνά οι άπειροι λύτες δεν μπορούν να συνειδητοποιήσουν ότι η λύση που βρέθηκε σε ένα πρόβλημα πρέπει να περάσει από όλες τις απαραίτητες δοκιμές (π.χ. να επαληθεύει ειδικές περιπτώσεις, να ικανοποιεί τους φυσικούς περιορισμούς που επιβάλλονται από το πρόβλημα, να συμφωνεί με ήδη γνωστά δεδομένα κ.τ.λ.) προκειμένου να γίνει τελικά αποδεκτή. Θεωρούν, δηλαδή, την εκτέλεση της λύσης ως το τελευταίο στάδιο της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος παραλείποντας την επαλήθευση, η οποία ωστόσο απαιτεί κάποια προσοχή. Πράγματι, εκτός από τον εντοπισμό πιθανών ανόητων λαθών, μια αναθεώρηση της λύσης του προβλήματος πολλές φορές βοηθά στη διευκρίνιση και εμπέδωση μιας συγκεκριμένης τεχνικής, που μπορεί και στο μέλλον να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση ανάλογων προβλημάτων.

Οι έρευνες, που έχουν γίνει για την επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια ήδη γνωστών ανάλογων προβλημάτων *(analogical problem-solving)*, έχουν δείξει ότι οι μαθητές δεν μπορούν να στηριχθούν εύκολα πάνω σε ανάλογες καταστάσεις και να τις συνδέσουν μεταξύ τους (Gick & Holyoak, 1980 & 1983· Needham & Begg, 1991· Voskoglou, 2003 κ.ά.). Προκύπτει, λοιπόν, η ανάγκη να οικοδομήσουν οι μαθητές με τη βοήθεια του διδάσκοντα τράπεζες ανάλογων προβλημάτων που να μπορούν να τα χρησιμοποιούν κατάλληλα, όταν χρειάζεται.

Γενικά, έχει παρατηρηθεί ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων οφείλονται, πολλές φορές, στη σχετική απειρία τους πάνω στο αντικείμενο. Αυτό φαίνεται να εξηγείται από το γεγονός ότι οι άπειροι λύτες έχουν πολύ μικρότερες και ατελέστερα δομημένες βάσεις γνώσεων σε σχέση με τους έμπειρους, με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ποιες πληροφορίες είναι σχετικές με την επίλυση του κάθε προβλήματος και ποιες είναι οι κατάλληλες κινήσεις που πρέπει να κάμουν κάθε φορά για να πετύχουν τον στόχο τους. Αντίθετα, οι έμπειροι λύτες έχουν αποκτήσει την ικανότητα να κάμουν τις κινήσεις αυτές με σχετική άνεση (Sternberg, 1997, σ. 149).

Συμπερασματικά, περισσότερη έρευνα χρειάζεται να γίνει για τους μηχανισμούς με τους οποίους οι έμπειροι λύτες λύνουν τα προβλήματα, καθώς και για τις σχέσεις (ομοιότητες-διαφορές) μεταξύ των μηχανισμών αυτών και των διαδικασιών που εφαρμόζουν οι άπειροι λύτες. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να διευκρινισθούν καλύτερα και οι διασυνδέσεις-αλληλεπιδράσεις που υπάρχουν μεταξύ των διαφόρων σταδίων της διαδικασίας πρόβλημα-λύση.

΄Ενας ιδιαίτερα σημαντικός κλάδος της επίλυσης προβλημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση είναι η *«Μαθηματική Μοντελοποίηση και Εφαρμογές» (Mathematical Modelling and Applications)* που αφορά μια κατηγορία προβλημάτων που προκύπτουν μέσα από αντίστοιχες καταστάσεις του πραγματικού κόσμου (Βόσκογλου, 2000, παράγραφος 1). Η μαθηματική μοντελοποίηση εμφανίζεται σήμερα ως ένα δυναμικό εργαλείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών, αφού τα συνδέει με την καθημερινή μας ζωή, δίνοντας έτσι στους μαθητές τη δυνατότητα να συνειδητοποιήσουν τη χρησιμότητά τους στην πράξη (Voskoglou, 2006).

Τέλος, πρέπει να επισημανθεί ο σημαντικός ρόλος που μπορεί να διαδραματίσει σήμερα η ορθολογική χρήση της νέας τεχνολογίας (μαθηματικά λογισμικά πακέτα, πολυμέσα κ.τ.λ.) στην περαιτέρω ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών για την επίλυση προβλημάτων. Πράγματι, η κίνηση των σχημάτων, οι εύκολοι και γρήγοροι μετασχηματισμοί των αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων, η άνετη και ακριβής κατασκευή των σχετικών γραφημάτων κ.τ.λ. αυξάνουν τη φαντασία των μαθητών και τους βοηθούν να «ανιχνεύουν» ευκολότερα τις λύσεις των αντίστοιχων προβλημάτων. Ο ρόλος της μαθηματικής θεωρίας μετά από μια τέτοια διαδικασία δεν είναι πλέον να πείσει αλλά απλά να επεξηγήσει (Sarrazy, 2006).

Λύση προβλημάτων, μεταφορά και σχήματα της γνώσης

Οι Owen και Sweller (1989) πιστεύουν ότι η διδασκαλία των ευρετικών στρατηγικών για τη λύση προβλημάτων δεν συνεισφέρει ουσιαστικά στην εκμάθηση των μαθηματικών, αφού δεν βοηθά τους μαθητές να ξεπεράσουν τα προβλήματα που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία μεταφοράς της γνώσης (δηλαδή τη χρήση της ήδη υπάρχουσας γνώσης για την παραγωγή της νέας γνώσης).

Κατά την άποψή τους, η αποτυχία των μαθητών κατά τη μεταφορά οφείλεται περισσότερο στη μη απόκτηση από αυτούς των κατάλληλων *σχημάτων γνώσης (schemas)* και στην ατελή αυτοματοποίηση των κανόνων. Κατά συνέπεια, ο χρόνος που αφιερώνεται για τη διδασκαλία των ευρετικών, θα μπορούσε να αξιοποιηθεί αποδοτικότερα με τη συστηματικότερη μελέτη των αντίστοιχων μαθηματικών γνώσεων και την πρακτική εξάσκηση των μαθητών πάνω σε υποδειγματικά λυμένα παραδείγματα αλλά και προβλήματα με *τροποποιημένο στόχο (goal modified problems).*

Υπενθυμίζουμε ότι ένα σχήμα είναι μια αφηρημένη γνωστική δομή, που συνοψίζει τις πληροφορίες για μια κατηγορία περιπτώσεων με κοινά χαρακτηριστικά, καθώς και τις σχέσεις που συνδέουν τις περιπτώσεις αυτές μεταξύ τους (Anderson, 1984). Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, οι Owen και Sweller δέχονται ότι ένα σχήμα προσδιορίζει την κατηγορία στην οποία ανήκει ένα πρόβλημα, καθώς και τις κατάλληλες κινήσεις που απαιτούνται για την επίλυση των προβλημάτων της κατηγορίας αυτής.

Διευκρινίζουμε, επίσης, ότι ο όρος προβλήματα με τροποποιημένο στόχο αναφέρεται σε μια κατηγορία προβλημάτων, στα οποία ο επιδιωκόμενος στόχος δεν προσδιορίζεται με απόλυτη σαφήνεια. Τέτοιου είδους είναι, συνήθως, τα κλασικά προβλήματα μετασχηματισμών, στα οποία απαιτείται ο υπολογισμός όλων των αγνώστων παραμέτρων αντί μιας (Greeno, 1978). Αυτός ο τύπος προβλημάτων αποτρέπει τον λύτη να χρησιμοποιήσει την αναλυτική μέθοδο για την επίλυσή τους, ξεκινώντας από το ζητούμενο και καταλήγοντας με αντίστροφη πορεία στα δεδομένα (Anderson, 1985). Σύμφωνα με τους Owen και Sweller, η εφαρμογή αυτής της τεχνικής για την επίλυση προβλημάτων παρεμποδίζει την απόκτηση των σχημάτων γνώσης, επειδή επιβάλλει βαρύ νοητικό φορτίο στον λύτη.

Ο Lawson (1990) επισημαίνει ότι είναι σημαντικό να διακρίνουμε τις ευρετικές σε τρεις τύπους: τις *στρατηγικές προσανατολισμού (task orientation strategies)*, τις *εκτελεστικές (executive strategies)* και τις *ειδικές στρατηγικές πεδίου (specific-domain strategies)*. Όσον αφορά την άποψη των Owen και Sweller για την αποτελεσματικότητά τους, πιστεύει ότι απορρέει από τη θέση που αυτοί παίρνουν για τη φύση της μάθησης και τη μεταφορά της γνώσης.

Κατά τον Lawson η επιτυχής μεταφορά δεν εξαρτάται μόνο από την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των δομικών στοιχείων του υπό μελέτη αντικειμένου, την επαγωγή σχημάτων και την αυτοματοποίηση των απαιτούμενων χειρισμών (Cooper & Sweller, 1987), αλλά στη σύνθετή της μορφή *(high-road transfer)* περιλαμβάνει μια προσεκτική αφαιρετική διαδικασία των γενικών χαρακτηριστικών γνωρισμάτων του περιεχομένου της γνώσης (Salomon & Perkins, 1989). Είναι, δηλαδή, μια διεργασία αρκετά διαφορετική από την αυθόρμητη-αυτόματη απόκτηση της γνώσης, που είναι αποτέλεσμα της γενίκευσης και αναφέρεται ως μεταφορά χαμηλού επιπέδου *(low-road transfer)*.

Μέσα σε αυτή τη σύνθετη διεργασία είναι σημαντικός ο ρόλος που καλούνται να παίξουν οι ευρετικές στρατηγικές. Μια στρατηγική προσανατολισμού, για παράδειγμα, βοηθά ουσιαστικά τη λειτουργία ενός μηχανισμού αντίληψης της υπό μελέτη κατάστασης. Ακόμη, η ομοιότητα στη δομή των παλαιών και του νέου προβλήματος συνειδητοποιείται μέσα από τη λειτουργία μιας εκτελεστικής στρατηγικής, που, ξεκινώντας από την ανάλυση της δομής του νέου προβλήματος, συγκρίνει τα προϊόντα της ανάλυσης αυτής με τις ήδη καθιερωμένες μορφές και σχήματα.

Κατά συνέπεια, η μελέτη του ρόλου των ευρετικών στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων αλλά εν μέρει και η προσοχή που δίδεται σε αυτές κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει, κατά τον Lawson, να συνεχισθούν. Συμφωνεί δε με την άποψη των Owen και Sweller μόνο όσον αφορά τον χρόνο και την προσπάθεια που αφιερώνονται τελευταία για τη διδασκαλία των ευρετικών στα σχολεία, που είναι πράγματι σε υπερβολικό βαθμό. Υπάρχει, τονίζει, ο κίνδυνος το φαινόμενο αυτό να μετατραπεί σε μια μόδα που θα φέρει αποτελέσματα αντίθετα από τα προσδοκώμενα, όπως συχνά συμβαίνει με τις καινοτομίες στην εκπαίδευση (βλ. «Νέα Μαθηματικά»).

Προσωπικές πεποιθήσεις και συμπεράσματα

Θα ξεκινήσουμε με κάποια σχόλια πάνω στις ιδέες των Owen και Sweller για τις ευρετικές που συνοψίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Σύμφωνα με τα όσα δέχονται, ένα σχήμα διευκρινίζει όχι μόνο την κατηγορία στην οποία ανήκει ένα πρόβλημα αλλά και τις κατάλληλες *κινήσεις* για την επίλυση των προβλημάτων της κατηγορίας αυτής. Ποιες είναι όμως οι κινήσεις αυτές; Δεν είναι οι κατάλληλες ευρετικές που βοηθούν στην κατανόηση και επίλυση των προβλημάτων; Αν ναι, τότε πρέπει να δεχθούμε ότι οι ευρετικές αυτές αποτελούν αναπόσπαστο μέρος του αντίστοιχου σχήματος!

Ακόμη και ο θεμελιωτής της σύγχρονης θεωρίας των σχημάτων Marshall (1995) δέχεται ότι τα σχήματα αποτελούν τα «οχήματα» για την επίλυση των προβλημάτων, που μπορούν να απλοποιήσουν ή και να ανακατασκευάσουν ένα πρόβλημα, προκειμένου να το καταστήσουν πιο ευπρόσιτο για τον λύτη. Γιατί, λοιπόν, τέτοια απαξίωση για τις ευρετικές και την επίλυση προβλημάτων γενικότερα; Διαφωνούμε, επίσης, ριζικά με την άποψή τους ότι η εφαρμογή της αναλυτικής μεθόδου παρεμποδίζει την απόκτηση των σχημάτων, επειδή τάχα επιβάλλει βαρύ νοητικό φορτίο στους λύτες προβλημάτων. Πεποίθησή μας είναι ότι, για να μάθει κάποιος μαθηματικά, *πρέπει να μάθει να σκέπτεται με μαθηματικό τρόπο* και ένας βασικότατος παράγοντας για να το πετύχει είναι η εμπειρία που αποκτά μέσα από την προσωπική του προσπάθεια και τα δικά του λάθη. Η πρακτική εξάσκηση πάνω σε υποδειγματικά, έστω, λυμένα παραδείγματα και η αυτοματοποίηση των κανόνων βοηθούν προς την κατεύθυνση αυτή, δεν είναι όμως τα ίδια αρκετά για τη σωστή εκμάθηση των μαθηματικών.

Πολλοί ερευνητές της εκπαίδευσης και ψυχολόγοι έχουν συνδέσει τη μάθηση -όχι μόνο των μαθηματικών αλλά κάθε θέματος γενικά- με τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Ο Voss (1987), για παράδειγμα, επεκτείνοντας την άποψη του Ferguson (1956) ότι η απόκτηση κάθε νέας γνώσης προϋποθέτει μια διαδικασία μεταφοράς της γνώσης, δέχεται ότι η μάθηση είναι στην ουσία μια διαδοχική διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Τα δεδομένα της εισόδου στη διαδικασία αυτή αποτελούνται από ήδη υπάρχουσα γνώση και η λύση (νέα γνώση) εμφανίζεται, όταν τα δεδομένα αυτά ερμηνευθούν κατάλληλα. Ακολουθεί η *γενίκευση* της νέας γνώσης σε μια επαρκή ποικιλία ειδικών περιπτώσεων, ενώ τέλος, όταν η νέα γνώση καταστεί ουσιαστική, ένα σημαντικό μέρος της διαδικασίας της μάθησης περιλαμβάνει την *κατηγοριοποίησή* της, την ένταξή της δηλαδή στις κατάλληλες νοητικές δομές (σχήματα) του ατόμου.

Θεωρούμε, επομένως, ότι οι απόψεις του Lawson για τον ρόλο των ευρετικών στρατηγικών στη διαδικασία της μάθησης και της μεταφοράς είναι πολύ περισσότερο ρεαλιστικές από αυτές των Owen και Sweller. Επισημαίνουμε ότι κατά την άποψή μας η διδασκαλία των ευρετικών -όπως και των αποδεικτικών μεθόδων- δεν χρειάζεται να αποτελεί ένα ξεχωριστό θέμα στα σχολικά προγράμματα των μαθηματικών. Πρέπει και μπορεί να υλοποιείται από τον διδάσκοντα σε κάθε ευκαιρία μέσα από τη λύση των κατάλληλων προβλημάτων αλλά και τις αποδείξεις των αντίστοιχων θεωρημάτων.

Ισχυρή μας πεποίθηση είναι ότι, σε σχολικό επίπεδο, η *Ευκλείδεια Γεωμετρία* προσφέρει πολλές τέτοιες ευκαιρίες στον διδάσκοντα, αφού είναι το μάθημα εκείνο που καλλιεργεί κατ' εξοχή τη μαθηματική σκέψη και εναρμονίζεται περισσότερο από κάθε άλλο στην πνευματική ωριμότητα των παιδιών αυτής της ηλικίας (έννοιες στέρεες και συγκεκριμένες, μπορούν να «βλέπουν» αυτό που κάνουν κ.τ.λ.). Κατά συνέπεια, οι πρόσφατες κινήσεις σε αρκετές χώρες να αποδυναμώσουν τη διδασκαλία της κλασικής γεωμετρίας στο σχολείο -και ιδιαίτερα στις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης- με το σκεπτικό της εισαγωγής σύγχρονων ενοτήτων στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών (Αναλυτική Γεωμετρία, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός κ.τ.λ.), πιστεύουμε ότι αποτελούν ένα μεγάλο παιδαγωγικό σφάλμα. Ειδικά για την πατρίδα μας, την Ελλάδα, με μια τόσο λαμπρή παράδοση στον τομέα αυτόν από την αρχαιότητα, είναι λυπηρό το ότι έχουμε φθάσει σήμερα στο σημείο η Στερεομετρία να μην διδάσκεται καθόλου στο Λύκειο!

Επίλογος

Σύμφωνα με τους Davis και Hersh (1981, σ. 183) στη μαθηματική εκπαίδευση υπάρχει μια συνεχής ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων φιλοσοφιών των μαθηματικών, όπως εξάλλου έχει σκιαγραφηθεί και στην εισαγωγή του παρόντος άρθρου.

Κατά τον Verstappen (1988) η περίοδος αυτής της ταλάντωσης είναι περίπου 50 έτη, συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει -με διαφορετική μεθοδολογία- και ο Galbraith (1988). Αν η εκτίμηση αυτή αληθεύει, σημαίνει ότι περίπου κάθε 50 έτη επέρχονται σημαντικές αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση!

Εξάλλου, όπως παρατηρεί και ο Κλαουδάτος (1990), η αποτυχία και το άδοξο τέλος της περιόδου των «Νέων Μαθηματικών» στη σχολική εκπαίδευση σηματοδοτεί τη μετακίνηση αυτής της ταλάντωσης από τον φορμαλισμό προς την ενορατική-διαισθητική φιλοσοφία των μαθηματικών. Φαίνεται μάλιστα ότι οι αντιλήψεις αυτής της μετακίνησης εκφράζονται μέσα από τη στροφή προς τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων και τη μαθηματική μοντελοποίηση, που υποστηρίζονται σημαντικά από τις νέες τεχνολογίες και την εισαγωγή της πληροφορικής στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Κατά συνέπεια και ανεξάρτητα από τις προσωπικές πεποιθήσεις και επιλογές του καθενός, θα πρέπει όλοι μας, δάσκαλοι, παιδαγωγοί και ερευνητές να προετοιμάσουμε κατάλληλα τις συνθήκες κάτω από τις οποίες οι επερχόμενες αλλαγές θα αφομοιωθούν ήπια και δημιουργικά. Με τον τρόπο αυτό η μαθηματική εκπαίδευση, που τόσο έχει ταλαιπωρηθεί από απότομες αναταράξεις τα τελευταία 50-60 χρόνια, θα μπορέσει να κερδίσει όσο γίνεται περισσότερα από τις αλλαγές αυτές.

Στην κινέζικη φιλοσοφία οι όροι Yin καιYang αντιπροσωπεύουν όλες τις αντίθετες αρχές (Ma Li, 2005). Είναι, ωστόσο, σημαντικό να παρατηρηθεί ότι αυτές οι δύο πτυχές συμπληρώνουν περισσότερο παρά αντιτίθενται η μία στην άλλη, αφού η κάθε μία εμπεριέχει μέρος της άλλης. Κατ' αναλογία, κάθε μια από τις υφιστάμενες φιλοσοφίες των μαθηματικών έχει τη δική της ιστορία και προσφορά στα μαθηματικά παρουσιάζοντας τα δικά της πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα (Βόσκογλου, 2006). Εκείνο, ωστόσο, που πραγματικά έχει σημασία και χρησιμότητα, είναι όχι απλά ο καθένας μας να ασπάζεται -ανάλογα με τα προσωπικά του βιώματα και πιστεύω- μια από τις φιλοσοφίες αυτές πολεμώντας ή αδιαφορώντας για τις αντίθετες απόψεις, αλλά όλοι μαζί να αναζητήσουμε ήρεμα και αντικειμενικά την κατάλληλη ισορροπία μεταξύ τους.

Βιβλιογραφία

Anderson, R. C. (1984). Some reflections on the acquisition of knowledge. *Educational Researcher*, 13, 5-10.

Anderson, J. (1985^2). *Cognitive Psychology*. San Fransisco: W. H Freeman.

Βόσκογλου, Μ. (1986). Στοιχεία από τη Διδακτική των Μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ'*, 34-51.

Βόσκογλου, Μ. (1991). Επιλογή της κατάλληλης ευρετικής στη διαδικασία Πρόβλημα-Λύση. *Σύγχρονη Εκπαίδευση,* 59, 40-42.

Βόσκογλου, Μ. (1999). Φορμαλισμός και Ενορατισμός στα Μαθηματικά. *Το Σχολείο και το Σπίτι,* 5, 253-257.

Βόσκογλου, Μ. (2000). Μέτρα αποτελεσματικότητας για τη διαδικασία της Μαθηματικής Μοντελοποίησης. *Επιθεώρηση Επιστημονικών και Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 3, 119-129.

Βόσκογλου, Μ. (2005). Διδάσκοντας τα Μαθηματικά με εφαρμογές: Από την αρχαία Κίνα μέχρι σήμερα, *Πρακτικά 22ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας Ε.Μ.Ε.,* 557-566, Λαμία.

Βόσκογλου, Μ. (2006). Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών και οι Σχολές της μαθηματικής σκέψης, *Πρακτικά 23ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας Ε.Μ.Ε.,* 142-151, Πάτρα.

Cooper, G., & Sweller, J. (1987). The effects of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer. *J. of Educational Psychology,* 79, 347-362.

Davis, P., & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience.* London: Penguin Books.

Ferguson, G. (1956). On transfer and the abilities of man. *Canadian J. of Psychology,* 10, 121-131.

Galbraith, P. (1988). Mathematics Education and the Future: A long wave view of Change. *For the Learning of Mathematics*, 8 (3), 27-33.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem-solving. *Cognitive Psychology*, 12, 306-355.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology,* 15, 1-38.

Greeno, J. (1978). Nature of problem solving abilities. In W. K. Estes (Ed.), *Handbook of learning and cognitive processes*, 5, 239-270.

Κλαουδάτος, Ν. (1990). Μοντελοποίηση: Ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο. *Ευκλείδης Γ',* 28, 42-61.

Lawson, M. (1990). The case of instruction in the use of general Problem Solving strategies in Mathematics teaching: A comment on Owen and Sweller. *J. for Research in Mathematics Education,* 21, 403-410.

Ma Li (2005). Towards a Yin-Yang Balance in Mathematics Education. *Proceed. 4th Mediterranean. Conf. Math. Educ.,* 685-689, Palermo.

Malone, J. et al. (1980). Measuring problem-solving ability. In S. Krulik (Ed.), *Problem-solving in school mathematics,* N.C.T.M., 204-225.

Mandelbrot, B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature.* U.S.A.: W. H. Freeman and Company.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. N.Y., Cambridge Univ. Press.

Needham, D. R., & Begg I. M. (1991). Problem-oriented training promotes spontaneous analogical transfer; memory-orientated training promotes memory for training. *Memory and Cognition*, 19, 543-557.

Owen, E., & Sweller, J. (1989). Should Problem Solving be used as a learning device in Mathematics? *J. for Research in Mathematics Education,* 20, 322-328.

Perdikaris, S. C., & Voskoglou, M. G. (1994). Probability in problem-solving. *Int.*

J. Math. Educ. Sci. Technol., 25, 475-489.
Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton Univ. Press.
Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning.* Princeton: Princeton Univ. Press.
Polya, G. (1963). On learning, teaching and learning teaching. *Amer. Math. Monthly,* 70, 605-619.
Polya, G. (1962/65). *Mathematical Discovery* (2 Vols). New York: J. Wilet & Sons.
Salomon, G., & Perkings, D. (1989). Rocky words to transfer: Rethinking mechanisms of a neglected phenomenon. *Educational Psychologist,* 24, 113-142.
Sarrazy, B. (2006). Paradoxes de la prise en compte des disparités culturelles et des individualités dans l'enseignement des mathématiques. *Proceed. CIEAEM,* 58, 42-47, Czech Republic.
Schoen, P., & Oehmke, T. (1980). A new approach to the measurement of problem-solving skills. In S. Krulik (Ed.), *Problem-solving in School Mathematics.* N.C.T.M., 216-227.
Schoenfeld, A. (1980). Teaching Problem-Solving skills. *Amer. Math. Monthly,* 87, 794-805.
Schoenfeld, A. (1982). Measures of problem-solving performance and of problem-solving instruction. *J. Res. Math. Educ.*, 13, 31-49.
Sternberg, R. J. (1997). In P. J. Feltovich, K. M. Ford & R. R. Hoffman (Eds), *Expertise in Context* (Menlo Park, CA: AAAI Press/The MIT Press).
Stillman, G. A., & Galbraith, P. (1998). Applying mathematics with real world connections: Metacognitive characteristics of secondary students. *Educ. Studies in Mathematics*, 96, 157-189.
Verstappen, P. F. L. (1988). The pupil as a problem-solver. In H. G. Steiner & A. Vermandel (Eds) *Foundation and Methodology of the discipline mathematics education*, *Proceed. 2nd m.t.e. Conference*, Bielefeld, Andwerp.
Voskoglou, M. G., & Perdikaris, S. C. (1991). A Markov chain model in problem-solving. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 22, 909-914.
Voskoglou, M. G., & Perdikaris, S. C. (1993). Measuring problem-solving skills. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.,* 24, 443-447.
Voskoglou, M. G. (2003). Analogical problem-solving and transfer. *Proceed. 3d Mediterranean. Conf. Math. Educ.,* 295-303, Athens.
Voskoglou, M. G. (2006). The use of mathematical modeling as a learning tool of mathematics. *Quaderni di Ricerca in Didactica* (Palermo), 16, 53-60.
Voss, J. F. (1987). Learning and transfer in subject matter learning: a problem-solving model. *Int. J. Educ. Research,* 11, 607-622.