Δραστηριότητες και διδακτική πράξη
Από την ανάπτυξη της εμπειρίας στη μαθηματικοποίησή της

Αθανάσιος Σ. Σκούρας
Παιδαγωγικό Ινστιτούτο

Περίληψη

Η διαμόρφωση σχέσεων μεταξύ μαθηματικού περιεχομένου και διαδικασίας κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών αποτελεί προϋπόθεση της μάθησης με κατανόηση. Άλλωστε με έμφαση τονίζεται η ιδιαίτερη σύνδεση μαθηματικού περιεχομένου και διαδικασιών σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης των μαθηματικών γνώσεων στα προγράμματα σπουδών διάφορων χωρών. Η διαμόρφωση σχέσεων θα πρέπει να υλοποιείται μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες Ο όρος «δραστηριότητα» χρησιμοποιείται πολύ συχνά και με πολλές σημασίες κατά τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται ένα πλαίσιο λειτουργίας του όρου «δραστηριότητα» που είναι προσανατολισμένο στη λογική της ταυτόχρονης παρουσίας (και παρουσίασης) περιεχομένου και διαδικασίας, αφού η ταυτόχρονη ανάπτυξη και εξέλιξη εννοιών και διαδικασιών προσφέρεται ως ένα σύγχρονο πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Abstract

The formation connections between the mathematical content and process during the tuition of Mathematics, is a condition of learning with comprehension. Besides, the special link between the mathematical content and processes of conception, consolidation and organization of mathematical knowledge is highly emphasized in the curriculum of several countries.

Ο κ. Αθανάσιος Σκούρας είναι μαθηματικός, πάρεδρος του Π.Ι.

The formation of connections should be encouraged through suitable activities. The term “activity”, is used very often with many different meaning during the tuition and learning of Mathematics. In the present study a framework of function of the term “activity” is presented which aims at the simultaneous presentation of content and process since the simultaneous development of concepts and processes constitutes a modern framework of learning and teaching Mathematics.

Εισαγωγή

Η επίτευξη των γενικών στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης αποτελεί –όπως είναι φυσικό– αντικείμενο συνεχούς αναζήτησης και προβληματισμού. Τα αποτελέσματα όμως που προκύπτουν από τις σχολικές τάξεις σε διάφορες χώρες δείχνουν μια «ασυμβατότητα» μεταξύ των επιδιωκόμενων στόχων που η κοινωνία θέτει για τη μαθηματική εκπαίδευση και των αποτελεσμάτων της διδασκαλίας (Niss, M., 1993, σ. 33). Με το δεδομένο δε ότι η μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί απαραίτητο στοιχείο της γενικής εκπαίδευσης, θα πρέπει να τεθούν και να μελετηθούν στο παραπάνω πλαίσιο ερωτήματα (Keitel, C., 2000, σ. 159) όπως:

1. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα μιας μαθηματικής εκπαίδευσης που θα απελευθερώνει και θα φωτίζει το κρυμμένο δυναμικό των Μαθηματικών;
2. Τι πρέπει να αλλάξει στα αναλυτικά προγράμματα των Μαθηματικών, αλλά και στη διδασκαλία μέσα στην τάξη, αν λάβουμε υπόψη τη μεταβαλλόμενη πραγματικότητα και τη μαθηματικοποίηση της κοινωνικής μας ζωής;
3. Η διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω των εφαρμογών τους έχει άραγε τα χαρακτηριστικά της μαθηματικής εκπαίδευσης που επιθυμούμε;
4. Τι θα ορίζαμε σήμερα ως μαθηματικό αλφαβητισμό;

Οι απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα (όπως και σε άλλα) συσχετίζονται άμεσα με την αντίληψη για τη φύση των Μαθηματικών. Η συνήθης άποψη για τα Μαθηματικά δίνει έμφαση στο τελικό «προϊόν» της μαθηματικής δημιουργίας, με συνέπεια να συντηρούνται και αντίστοιχες πρακτικές στην καθημερινή διδακτική πράξη. Ασφαλώς και αποτελεί σημαντικό τμήμα των Μαθηματικών το τελικό «προϊόν» της μαθηματικής δημιουργίας, αφού αυτό το «προϊόν» μπορεί να διατυπώνεται κατά τρόπο σαφή και κατηγορηματικό. Όμως η έμφαση στα αποτελέσματα και (αναπόφευκτα;) ο τρόπος παρουσίασής τους –τυπική και απαγωγικά δομημένη μορφή– υποβαθμίζουν τη διαδικασία μέσω της οποίας φθάνουμε σ' αυτά, αφού το «zig-zag» της ανακάλυψης δεν μπορεί να αποτυπωθεί σ' αυτά (Lacatos, I., 1976, σ. 42). Οι σύγχρονες φιλοσοφικές αντιλήψεις θεωρούν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως το αποτέλεσμα των προσπαθειών των μαθηματικών, αλλά και ως τη δραστηριότητα μέσω της οποίας παράγεται αυτό το αποτέλεσμα. Με αυτή την έννοια, τα Μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο ένα σύστημα γνώσεων, αλλά και μια διαδικασία (Tymoczko, T., 1986).

Δεχόμενοι λοιπόν τα Μαθηματικά όχι μόνο ως πληροφοριακό περιεχόμενο, αλλά και ως διαδικασία σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης του περιεχομένου αυτού, τόσο η επιλογή περιεχομένων όσο και η επιλογή μεθόδου είναι άρρηκτα συνδεδεμένες σε κάθε προσπάθεια παρουσίασης ή διδασκαλίας των Μαθηματικών, με την κατανόηση αυτών των διαδικασιών σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης των επιμέρους μαθηματικών γνώσεων (Τζανάκης, Κ. & Κούρκουλος, Μ., 2000, σ. 72).

Η ταυτόχρονη παρουσία περιεχομένου-διαδικασίας κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών τονίζεται με έμφαση στα προγράμματα σπουδών (Π.Σ.) των Μαθηματικών διάφορων χωρών. Το NCTM διατυπώνει ένα σύνολο από δέκα κανόνες (standards) που θα πρέπει να χαρακτηρίζουν ένα Π.Σ. Μαθηματικών. Τα πρώτα πέντε standards αναφέρονται σε στόχους μαθηματικού περιεχομένου (αριθμοί και πράξεις, Άλγεβρα, Γεωμετρία, μετρήσεις, στατιστική και πιθανότητες), ενώ τα άλλα πέντε αναφέρονται σε στόχους-διαδικασίες (επίλυση προβλήματος, συλλογισμός και απόδειξη, συνδέσεις, επικοινωνία και αναπαραστάσεις). Είναι δε χαρακτηριστική η αναφορά στην ιδιαίτερη σύνδεση μαθηματικού περιεχομένου και διαδικασίας: «*... δεν μπορεί κάποιος να λύσει προβλήματα χωρίς κατανόηση και χρήση μαθηματικού περιεχομένου. Η γεωμετρική γνώση απαιτεί συλλογισμό. Οι έννοιες της Άλγεβρας μπορούν να εξετασθούν και να μεταβιβασθούν μέσω αναπαραστάσεων*» (NCTM, 2000, σ. 7).

Με βάση τα παραπάνω, η διδασκαλία των Μαθηματικών καθίσταται μια σύνθετη προσπάθεια, αφού –όπως επισημαίνουν οι Cobb, Yackel και Wood– θα πρέπει να επιτρέπει την παράλληλη εξέλιξη των διαδικασιών και των εννοιών (Cobb, R. et al., 1991). Επομένως ο τρόπος οργάνωσης της διδασκαλίας –όσο και η ανάπτυξη ενός προγράμματος σπουδών που θα στηρίζει αυτή τη διδασκαλία– ώστε να καλύπτονται οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης που σχηματικά θα λέγαμε ότι είναι το δίπολο «περιεχόμενο-διαδικασία», παραμένει το μεγάλο ζητούμενο. Παράλληλα, θα πρέπει οι μέθοδοι αξιολόγησης των γνώσεων των μαθητών να είναι περισσότερο συμβατές με τους παραπάνω στόχους, αφού οι μέθοδοι αξιολόγησης των «κλασικών» μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων κρίνονται ανεπαρκείς για αξιολόγηση προωθημένων στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης (Niss, M., 1993).

Η παράλληλη εξέλιξη διαδικασιών και εννοιών αποτελεί προϋπόθεση για να δοθεί περιεχόμενο στη διαδικασία μάθησης. Σε διαφορετική περίπτωση οι μαθητές μπορεί να «μαθαίνουν» Μαθηματικά χωρίς να τα καταλαβαίνουν, αφού η χρήση κανόνων που οδηγούν σε σωστές λύσεις δε συνεπάγεται και κατανόηση (Hiebert, J. & Carpenter, T. 1992· Skemp, R., 1996). Για παράδειγμα, η γνώση των κανόνων:

$$(x^3)' = 3x^2 \quad (1) \quad \text{και} \qquad (2^x)' = 2^x . \ln 2 \ (2)$$

δε συνιστά και κατανόηση της διαδικασίας της παραγώγισης, στο βαθμό που δεν εξηγείται γιατί δεν μπορούμε «αναλογικά» να μεταβούμε από τη σχέση (1) στη σχέση (2). Αλλά και η εύρεση του ορίου συνάρτησης μέσα από κατάλληλες «διευθετήσεις» και τεχνάσματα για την άρση της απροσδιοριστίας {μορφές 0/0, άπειρο-άπειρο κτλ.} δεν μπορεί να αναδείξει τη βαθύτερη «λογική» του θέματος (της σύγκλισης δηλαδή), με βάση την οποία οι απροσδιόριστες μορφές αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς κάθε φορά. Για παράδειγμα, το όριο της συνάρτησης:

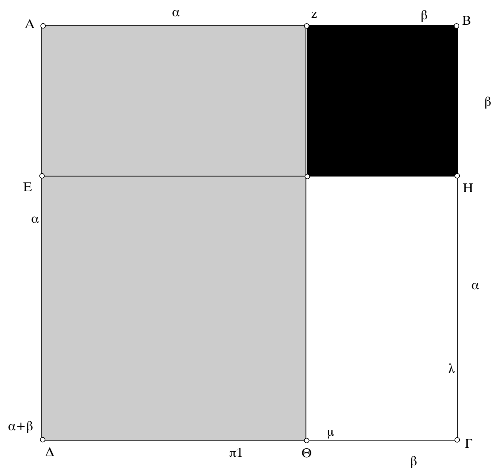
$$f(x) = \frac{5 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2}{x^3 + x^2 + 5}$$

όταν $\chi \rightarrow +$ άπειρο, είναι 5 για το λόγο ότι η «ταχύτητα» του αριθμητή είναι πενταπλάσια αυτής του παρονομαστή για πολύ μεγάλες τιμές του χ.

Επιπλέον, μερικοί μαθητές πιστεύουν ότι ισχύει:

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2 + \beta^2 \ \text{ με } \alpha,\beta \neq 0$$

για λόγους που συνδέονται με τη συμμετρία αυτής της έκφρασης. Βέβαια μπορεί να δοθεί μια (αλγεβρικού τύπου) απόδειξη που δείχνει καθαρά ότι αυτό είναι λάθος και ότι χρειάζεται ένας τρίτος όρος. Μάλιστα παρά την επιμονή των δασκάλων σε έναν αριθμό ασκήσεων η δυσκολία παραμένει. Μετά από αυτό μπορεί κάποιος να μετακινηθεί σε ένα γεωμετρικό περιβάλλον (σχ. 1) στο οποίο θα αναλύεται το εμβαδόν ενός τετραγώνου σε επί μέρους εμβαδά αρχίζοντας με αριθμούς και συνεχίζοντας με συμβολικές αναπαραστάσεις (Bodin, A. & Capponi, B., 1996).



Σχήμα 1

Με άλλα λόγια, η χρήση ενός αποδεικτικού σχήματος που χρησιμοποιεί διαδικασίες αλλαγής πλαισίου αναπαράστασης (από το συμβολικό επίπεδο στο γεωμετρικό) μπορεί να προσφέρει αρχικά εξήγηση και στη συνέχεια να συμβάλει στη γενίκευση και την αφαίρεση. Μάλιστα, εκτός του περιεχομένου της, η αναπαράσταση μιας αποδεικτικής διαδικασίας με διάφορα εργαλεία-αντικείμενα αποτελεί έναν από τους άξονες καθορισμού (από πλευράς δυσκολίας) και του επιπέδου της (Miyazaki, M., 2000, σ. 53).

Η δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο θα εξελίσσονται παράλληλα έννοιες και διαδικασίες μπορεί να προσφέρει, κατά την άποψή μας, δυνατότητες και ευκαιρίες είτε ανάδυσης της τυπικής μαθηματικής γνώσης είτε γεφύρωσης του κενού μεταξύ της μη τυπικής γνώσης και των τυπικών Μαθηματικών. Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι αυτή η γεφύρωση δεν μπορεί να αποτελεί μονόδρομο. Αν δηλαδή σημείο εκκίνησης για τη διδασκαλία των Μαθηματικών μπορεί (και πρέπει) να είναι η πραγματικότητα, πρέπει να μπορεί και η ίδια (η πραγματικότητα) να αποτελεί την «επεξήγηση» μιας τυπικής σχέσης· π.χ. φτιάξε μια ιστορία για την παράσταση: 30-11-8 ή την ισότητα $3(\chi+5)=10$. Άλλωστε ένα βασικό ερώτημα κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι «πώς θα βοηθήσουμε τους μαθητές να καταπιασθούν ζεστά με τα τυπικά Μαθηματικά» (Gravemeijer, K. & Doorman, M., 1999, σ. 112).

Σύμφωνα με τον παραπάνω προβληματισμό, το ζητούμενο είναι η οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών στη βάση της συνύπαρξης ενός σχεδιασμού κατάλληλων δραστηριοτήτων και ενός προγραμματισμού μιας επιθυμητής τελικής συμπεριφοράς.

Η έννοια της δραστηριότητας

Ο όρος «δραστηριότητα» χρησιμοποιείται πολύ συχνά και με πολλές σημασίες. Θα λέγαμε ότι καλύπτει ένα εύρος από την απλή εξάσκηση μέχρι ένα μη συνηθισμένο πρόβλημα (non routine problem). Ανεξάρτητα από το νόημα που κάθε φορά αποδίδεται στον όρο «δραστηριότητα», η «διδασκαλία μέσω δραστηριοτήτων» θεωρείται ότι δίνει σε κάθε περίπτωση στο μαθητή τη δυνατότητα της ενεργητικής συμμετοχής στη διαδικασία της μάθησης, στοιχείο το οποίο μπορεί να τον οδηγήσει να σημειώσει κάποια πρόοδο σε σχέση με έναν προσδοκώμενο στόχο.

Αν και οι διαφορετικές απόψεις για την απόκτηση ή την κατασκευή της γνώσης οδηγούν σε διαφορετικές προσεγγίσεις διδασκαλίας, υπάρχει εν τούτοις η γενική παραδοχή ότι οι μαθητές δεν είναι παθητικοί αποδέκτες πληροφοριών, αλλά μάλλον έχουν μια ενεργητική συμμετοχή στην απόκτηση γνώσης και στρατηγικών (Koehler, M. & Grouws, D., 1992, σ. 123). Το βαθύτερο νόημα όλων των εναλλακτικών προσεγγίσεων είναι η πεποίθηση ότι η μάθηση των Μαθηματικών θα πρέπει να έχει τα χαρακτηριστικά της γνωστικής ανάπτυξης και όχι μιας διαδικασίας συσσώρευσης επιμέρους γνώσεων. Αυτή η άποψη είναι σύμφωνη με τη γενικότερη αντίληψη ότι ο τρόπος με τον οποίο το ανθρώπινο είδος ανέπτυξε τη μαθηματική γνώση είναι επίσης ο τρόπος με τον οποίο τα άτομα θα πρέπει να αποκτούν τη μαθηματική γνώση (Gravemeijer, K. & Doorman, M., 1999, σ. 116). Όπως αναφέρει η Sfard (Sfard, A., 1991) –επικαλούμενη τόσο θεωρητικά όσο και εμπειρικά στοιχεία– η προτεραιότητα των λειτουργικών έναντι των δομικών αντιλήψεων που παρατηρήθηκαν κατά τη διάρκεια της ιστορίας μπορεί επίσης να εντοπισθεί στην εξέλιξη της ατομικής γνώσης.

Ως εκ τούτου μια δραστηριότητα πρέπει να είναι ενταγμένη σε ένα πλαίσιο «ενεργητικής μάθησης». Όμως ποιο είναι το περιεχόμενο του όρου «ενεργητική μάθηση»; Εδώ εμφανίζονται δύο εκδοχές.

Η πρώτη εκδοχή αντιπροσωπεύει, σύμφωνα με την Anthony (Anthony, G., 1996, σ. 350), τη μάθηση που αναπτύσσεται μέσω δραστηριοτήτων με τις οποίες παρέχεται στους μαθητές σημαντική αυτονομία και έλεγχος της εξέλιξης αυτών των δραστηριοτήτων. Οι μαθησιακές δραστηριότητες που προσδιορίζονται με αυτό τον τρόπο περιλαμβάνουν επίλυση προβλήματος, εργασία σε μικρές ομάδες, μάθηση μέσω συγκεκριμένων εμπειριών. Αντιθέτως, η «παθητική μάθηση» αναφέρεται στην περίπτωση κατά την οποία οι μαθητές είναι παθητικοί δέκτες πληροφοριών και περιλαμβάνει παρακολούθηση μαθήματος, απαντήσεις σε «κλειστές» ερωτήσεις, εξάσκηση και εφαρμογές σε έννοιες που έχουν ήδη παρουσιασθεί.

Μια δεύτερη εκδοχή του όρου «ενεργητική μάθηση», εξίσου σημαντική, υποστηρίζεται από τους Kyriakou και Marshall (αναφέρεται στο Anthony, G., 1996). Σύμφωνα με αυτούς, «η ενεργητική μάθηση» δείχνει την ποιότητα της νοητικής εμπειρίας των μαθητών, όταν αυτοί εμπλέκονται ενεργά σε μαθησιακές καταστάσεις που χαρακτηρίζονται από αυξημένη αντίληψη και κατανόηση. Εκφράζει μια στάση για ενεργητική νοητική αναζήτηση και ανάπτυξη μεταγνωστικών αντιλήψεων. Και οι δύο εκδοχές του όρου «ενεργητική μάθηση» αντιπαρατίθενται στην «παθητική μάθηση», η οποία είναι συνδεδεμένη με ένα συγκεκριμένο τρόπο διδασκαλίας που δίνει έμφαση στην αφομοίωση της νέας γνώσης μέσα από την απομνημόνευση και την εξάσκηση (μετωπική διδασκαλία).

Με βάση τα παραπάνω, μία σημασία του όρου «δραστηριότητα» είναι αυτή της κατάστασης προβληματισμού με σημείο εκκίνησης ένα πρόβλημα (μαθηματικό ή πραγματικό) και με στόχους:

- την οικοδόμηση ενός πεδίου γνώσεων,
- την ενεργοποίηση και παγίωση προηγούμενων γνώσεων και τη διασφάλιση της συνοχής των περιεχομένων σε μια διευρυμένη προοπτική,
- τη δυνατότητα υλοποίησης ποικίλων εφαρμογών των ήδη αποκτηθεισών γνώσεων (Chevallier, M., 2000· Κλαουδάτος, Ν., 2000· Κολέζα, Ε., 1997).

Επομένως μια δραστηριότητα θα πρέπει να οδηγεί –εκτός από τον πλούτο της εμπειρίας που αναπτύσσεται κατά τη διαδικασία της μάθησης στο πλαίσιο μιας «ανοικτής» μαθησιακής κατάστασης– και σε κάποια μετρήσιμα αποτελέσματα. Αναφερόμενος στο σκοπό μιας δραστηριότητας ο Romberg επισημαίνει: «*Η μάθηση με ενεργητική συμμετοχή σημαίνει (συνεπάγεται) ότι η διδασκαλία θα πρέπει να βασίζεται σε είδη δραστηριοτήτων από τα οποία μπορεί να αναπτυχθεί μια δέσμη δεξιοτήτων. Ωστόσο η ανάπτυξη απλώς και μόνο μιας συλλογής ενδιαφερουσών δραστηριοτήτων δεν είναι επαρκής. Η γνώση που αποκτάται πρέπει να οδηγεί κάπου*» (Romberg, T., 1993, σ. 107).

Παράλληλα όμως με την «παραγωγή» αποτελεσμάτων θεωρούμε ότι ένα κρίσιμο σημείο είναι η δυνατότητα ένταξης αυτών των αποτελεσμάτων σε οργανωμένες γνωστικές δομές. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβάλει τόσο στη γεφύρωση μεταξύ μη τυπικής γνώσης και τυπικών Μαθηματικών όσο και στην ανατροπή της αντίληψης που έχουν οι μαθητές για τα Μαθηματικά, «αφού αυτοί τα βλέπουν σαν μια συμβολική δραστηριότητα χωρίς νόημα». Έτσι, ως γενικότερο συμπέρασμα από τη γεωμετρική απόδειξη της ταυτότητας:

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

θα μπορούσε να προκύψει η αδυναμία επέκτασης της «γραμμικότητας» διάφορων φαινομένων (μαθηματικών και μη), κάτι που οι μαθητές συνηθίζουν να κάνουν. Για παράδειγμα, γράφουν:

$$\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \quad \mu\varepsilon\, \alpha, \beta \neq 0$$

Όσον αφορά τα μαθηματικά αποτελέσματα που προκύπτουν από μια δραστηριότητα, όπως τονίζει η Chevallier (σ. 228), θα πρέπει να διευκρινίζεται με σαφήνεια ότι δεν μπορούν να γίνονται αποδεκτά, αν δεν έχουν αποδειχθεί. Αναδεικνύεται, ως εκ τούτου, και η ανάγκη μιας «τυποποίησης» της διαδικασίας που ακολουθήθηκε, στο επίπεδο της εγκυρότητας των συμπερασμάτων. Επομένως η απόδειξη μπορεί να προκύψει ως αναγκαιότητα και επιστέγασμα της όλης διαδικασίας.

Αν και η διδασκαλία μέσω δραστηριοτήτων προσφέρεται ως ένα πλαίσιο μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών που μπορεί να αναπτύξει τάσεις, στάσεις και αντιλήψεις οι οποίες θα προωθούν την ενεργητική μάθηση, η ιεραρχική φύση του μαθήματος των Μαθηματικών δε θα πρέπει να αγνοείται κατά το σχεδιασμό και την εκτέλεση μιας δραστηριότητας. Όπως αναφέρει η Bridget Murray (Χατζηγεωργίου, Γ., 2000, σ. 310): «... *υπάρχουν μαθηματικοί που πιστεύουν και τεκμηριώνουν με έρευνες ότι η μαθηματική γνώση είναι γνώση καθαρά ιεραρχική, και επομένως δεν πρέπει να ξεκινάμε με εμπειρίες πηγαίνοντας από το όλο στα μέρη αλλά από τις βασικές έννοιες (τα μέρη) για να πάμε στο όλο*»

Νομίζουμε ότι ένας τρόπος παράλληλης εξέλιξης διαδικασιών και εννοιών μπορεί τόσο να εντοπίζει το *νόημα* των μαθηματικών εννοιών μέσα από το ρόλο που παίζουν στην επεξεργασία –αρχικά– συγκεκριμένων καταστάσεων, όσο και να παρουσιάζει τη βαθμιαία εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, κάτι που χαρακτηρίζει και την «ιεραρχική» φύση της μαθηματικής γνώσης, αφού σύμφωνα με τη Sfard (Sfard, A., 1991) αυτό που φαίνεται να είναι διαδικασία σε ένα επίπεδο θα πρέπει να μετατραπεί πλήρως σε ένα αφηρημένο αντικείμενο σε ένα υψηλότερο επίπεδο, για να γίνει ένα στέρεο κομμάτι πιο αφηρημένων μαθηματικών κατασκευών.

Ας προσπαθήσουμε, με βάση τα ανωτέρω, να προσδιορίσουμε χαρακτηριστικά στοιχεία μιας δραστηριότητας. Διαβάζουμε σχετικά στο Δ.Ε.Π.Π.Σ. (Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών) των Μαθηματικών:

«Για τη σωστή επιλογή δραστηριότητας επισημαίνεται ότι μια δραστηριότητα πρέπει:

☐ Να είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές και να μην επιτρέπει παρανοήσεις και υπονοούμενα.

☐ Να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια.

☐ Να ενθαρρύνει τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία, προτρέποντας τους μαθητές και τις ομάδες σε νοητικό ανταγωνισμό.

☐ Να μην επιτρέπει άμεση προσέγγιση σε μία και μοναδική λύση.

□ Το πρόβλημα από το οποίο προκύπτει η δραστηριότητα πρέπει να είναι πλούσιο σε εμπλεκόμενες έννοιες, να είναι αρκετά σημαντικό αλλά όχι δύσκολο, ώστε ο μαθητής να μπορεί να το αντιμετωπίσει με επιτυχία.

□ Η εργασία του προβλήματος να μπορεί να γίνει (όπου αυτό είναι δυνατό) σε δύο τουλάχιστον πλαίσια (π.χ. αριθμητικό-γραφικό) μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορέσει να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις».

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά μιας δραστηριότητας ασφαλώς και είναι πολύ απαιτητικά. Επιβάλλεται όμως να έχουν εξασφαλιστεί, εκτός των άλλων, και λόγω της ετερογένειας των τάξεων (που υπάρχει για πολλούς λόγους), ώστε όλοι οι μαθητές να μπορούν να συμετέχουν και να σημειώνουν κάποια πρόοδο. Νομίζουμε ότι η εμπλοκή ενός αριθμού εννοιών που είναι «κρυμμένες» στο πρόβλημα και η ανάδειξή τους κατά την επεξεργασία μιας δραστηριότητας, αλλά και οι οριζόντιες και κατακόρυφες δράσεις καθορίζουν και το εύρος των στόχων και εν τέλει διαφοροποιούν τη δραστηριότητα από τις άλλες ασκήσεις και τα προβλήματα.

Μέσα από τις οριζόντιες και κατακόρυφες δράσεις μπορεί να εξασφαλίζεται η «κάλυψη» μιας μεγάλης μαθηματικής περιοχής. Ως οριζόντιες δράσεις, σύμφωνα με τον De Lange (1996, σ. 69), μπορεί (μεταξύ άλλων) να θεωρηθούν:

□ η αναγνώριση των συγκεκριμένων Μαθηματικών σε ένα γενικό πλαίσιο,

□ η διατύπωση και οπτικοποίηση ενός προβλήματος με διαφορετικούς τρόπους,

□ η ανακάλυψη σχέσεων και ομοιοτήτων,

□ η αναγνώριση ισόμορφων όψεων σε διαφορετικά προβλήματα,

□ η μεταφορά ενός πραγματικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα,

□ η μεταφορά ενός πραγματικού προβλήματος σε ένα γνωστό μαθηματικό μοντέλο.

Μόλις το πρόβλημα μετασχηματισθεί σε (περισσότερο ή λιγότερο) μαθηματικό πρόβλημα, μπορεί να αντιμετωπισθεί με μαθηματικά εργαλεία. Μερικές από τις κατακόρυφες δράσεις (ό.π.) μπορεί να είναι:

□ η αναπαράσταση μιας σχέσης σε έναν τύπο,

□ η απόδειξη κανονικοτήτων,

□ η χρήση διάφορων μοντέλων,

□ η διατύπωση μιας νέας μαθηματικής έννοιας,

□ η γενίκευση.

Η γενίκευση μπορεί να θεωρηθεί ως το ανώτερο επίπεδο της κατακόρυφης μαθηματικοποίησης. Μέσα από την κατακόρυφη μαθηματικοποίηση ο μαθητής φθάνει σε ένα υψηλότερο μαθηματικό επίπεδο (Gravemeijer, K. & Doorman, M., 1999, σ. 117).

Γενικότερα, ως *κατακόρυφη* ανάπτυξη αναφέρεται από πολλούς ερευνητές η γνωστική διαδικασία σύμφωνα με την οποία κάποιες διαδικασίες σε ένα επίπεδο «εσωτερικοποιούνται» ως αντικείμενα σε ένα άλλο επίπεδο, σε αντίθεση με την οριζόντια ανάπτυξη που αναφέρεται σε σχέσεις μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων (Tall, D., 1994, σ. 189).

Το γενικό πλαίσιο ανάπτυξης μιας δραστηριότητας

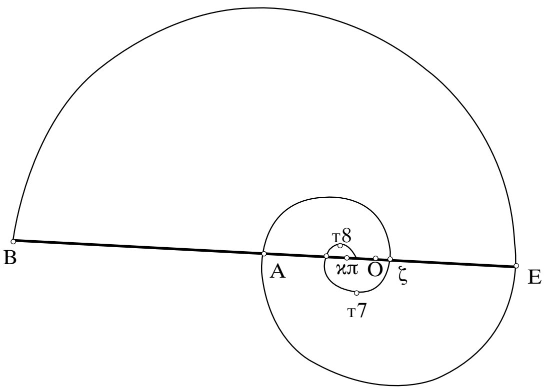
Ως προς το γενικό πλαίσιο ανάπτυξης μιας δραστηριότητας ο Arsac διακρίνει δύο κύριες φάσεις (Arsac et al. 1992, σ. 9): κατά τη διάρκεια της πρώτης φάσης, η οποία χαρακτηρίζεται ως εξερευνητική, οι μαθητές εργαζόμενοι είτε μόνοι τους είτε σε μικρές ομάδες διατυπώνουν τους προβληματισμούς τους, καταλήγουν σε εικασίες, προτείνουν λύσεις. Το αξιοσημείωτο σ' αυτή τη φάση είναι ότι ο δάσκαλος, αφού παρουσιάσει τη δραστηριότητα, δεν παρεμβαίνει στο μαθηματικό επίπεδο. Για παράδειγμα, δε θα πρέπει να δίνει ενδείξεις στους σπουδαστές για την εγκυρότητα των συμπερασμάτων στα οποία αυτοί οδηγούνται.

Κατά τη διάρκεια της δεύτερης φάσης ο στόχος είναι η ανάπτυξη μιας συλλογικής συζήτησης για τις λύσεις που προτείνονται, οι οποίες μπορεί να γράφονται σε ένα μεγάλο χαρτί και να εκτίθενται στον πίνακα, ώστε να αρχίσει η κριτική τους. Εδώ ακριβώς ο ρόλος του δασκάλου είναι σημαντικός, αφού με ευθύνη του πρέπει να «θεσμοθετηθούν» τα αποτελέσματα του διαλόγου. Πολύ καθοριστικός όμως είναι ο ρόλος του δασκάλου όταν οι μαθητές θα πρέπει να ξεπεράσουν λαθεμένα επιχειρήματα και να αναζητήσουν διεξόδους. Βέβαια το περιεχόμενο των δύο φάσεων μπορεί να διαφοροποιείται ανάλογα με το επίπεδο της τάξης.

Θα αναφερθούμε στη συνέχεια σε δύο δραστηριότητες. Η πρώτη (αναφέρεται στο Grunetti, L. & Jaquet, F., 1996, σ. 622) έχει ως στόχο να εισαγάγει την έννοια του αθροίσματος των άπειρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου (εισαγωγή νέας γνώσης), ενώ η δεύτερη έχει ως στόχο τη διευκόλυνση της μετάβασης από το αριθμητικό στο αλγεβρικό πλαίσιο, μέσα από τη λύση μιας εξίσωσης, με τη βοήθεια ενός γεωμετρικού μοντέλου.

Δραστηριότητα 1η

Από ένα αρχικό σημείο εκκίνησης ένα κινητό διαγράφει ημικύκλια ακτίνων 1, 1/2, 1/4, 1/8, ..., όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια θα είναι η απόσταση από το σημείο εκκίνησης του τελικού σημείου; Ποιο είναι το μήκος της διαδρομής που κάνει το κινητό;



Οι μαθητές αντιμετωπίζουν μια κατάσταση στην οποία η χρήση προηγούμενων γνώσεων δεν επαρκεί για να λυθεί το πρόβλημα και έτσι πρέπει να «κατασκευάσουν» νέα γνώση. Η ίδια η κατάσταση είναι αρκετά πλούσια προκειμένου να αποσπάσει υποθέσεις, αλλά και να δημιουργήσει προκλήσεις για τις πρώτες προσπάθειες. Το πρώτο βήμα είναι ασφαλώς η κατασκευή ενός γεωμετρικού διαγράμματος, του οποίου όμως η περιορισμένη ακρίβεια γρήγορα γίνεται φανερή. Το επόμενο βήμα, συνήθως, αποτελούν οι προσπάθειες να υπολογισθούν οι αποστάσεις των κέντρων των διαδοχικών κύκλων από το σημείο εκκίνησης και να «διαγνωσθεί» κάποια κανονικότητα στην εμφάνιση αυτών των αριθμών. Άλλωστε το «τελικό σημείο» θα είναι το κέντρο του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι μηδέν. Πρόκειται για μια φάση κατά την οποία οι μαθητές κινούνται μεταξύ των αριθμητικών και των γεωμετρικών πλευρών της κατάστασης. Στο σημείο αυτό διατυπώνονται διάφορες διαπιστώσεις και υποθέσεις για την εύρεση του τελικού σημείου, καθώς και για το μήκος της διαδρομής. Μερικοί μαθητές πιστεύουν ότι το μήκος της διαδρομής μπορεί να είναι όσο επιθυμεί κάποιος, άλλοι χρησιμοποιώντας κομπιουτεράκια προσπαθούν να βάλουν ένα όριο για το μήκος, ενώ άλλοι, περισσότερο εξοικειωμένοι με το ρόλο του αριθμού π, αφού βγάλουν κοινό παράγοντα τον π στο άθροισμα της σειράς:

$$\pi+\pi/2+\pi/4+\pi/8+\ldots,$$

διατυπώνουν την υποψία ότι το μήκος δεν μπορεί να υπερβαίνει τον αριθμό 2π. Στο σημείο αυτό και προκειμένου να ξεπερασθούν τα εμπόδια που έχουν παρουσιαστεί, θα μπορούσε να γίνει μια ευρεία συζήτηση κατά την οποία όλοι οι σπουδαστές θα πουν τις απόψεις τους, ώστε να καταλήξουν σε περισσότερο επαρκή μοντέλα οργάνωσης. Για παράδειγμα, η οργάνωση των δεδομένων υπό μορφή πίνακα μπορεί να δώσει τη δυνατότητα να διαφανούν καλύτερα οι αριθμητικές σχέσεις:

ακτίνα κύκλου	1	1/2	1/4	1/8	...$1/2^{\nu}$
απόσταση κέντρου κύκλου	1	1+1/2	1+1/2--1/4	{1+1/2--1/4 } +1/8	.....
μήκος ημικυκλίου	π	π/2	π/4	π/8	...$\pi/2^{\nu}$

Κατ' αυτό τον τρόπο οι μαθητές μπορεί να φθάσουν αρχικά στη διαπίστωση-εικασία ότι ένα άθροισμα άπειρων όρων μπορεί, υπό προϋποθέσεις, να είναι ένας αριθμός και στη συνέχεια να υπολογίσουν αυτό το άθροισμα. Ταυτόχρονα η νέα γνώση μπορεί να ενταχθεί σε ένα γενικότερο πλαίσιο, που είναι αυτό των «οριακών διαδικασιών».

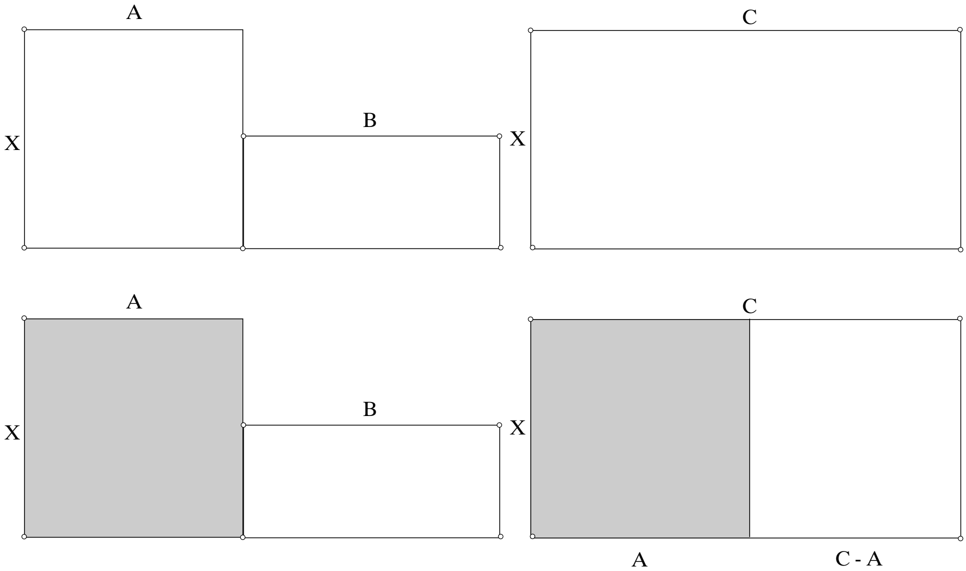
Δραστηριότητα 2η

Η αναζήτηση της «διαχωριστικής γραμμής» μεταξύ Αριθμητικής και Άλγεβρας είναι ένα ζήτημα περισσότερο ακαδημαϊκού ενδιαφέροντος (Herscovics, N. & Linchevski, L. 1994, σ. 59). Μια ιδέα σχετικά με αυτό το «διαχωρισμό» έχει προταθεί από τους Filloy και Rozano (1984, 1989), οι οποίοι εισάγουν την έννοια της «διδακτικής τομής» μεταξύ Αριθμητικής και Άλγεβρας. Αυτοί βλέπουν το διαχωρισμό Αριθμητικής και Άλγεβρας με όρους εξισώσεων πρώτου βαθμού, με τον άγνωστο να βρίσκεται και στα δύο μέλη της εξίσωσης (π.χ., Αx +Β = Γx+ Δ), αφού τέτοιες εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν από τους περισσότερους σπουδαστές χωρίς προηγούμενη διδασκαλία. Για το θέμα των εξισώσεων οι Herscovics και Linchevski κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές δεν μπορούν να λειτουργούν αυθόρμητα με ή πάνω στα άγνωστα. Το γράμμα-σύμβολο θεωρείται σαν μια στατική θέση, και μια λειτουργική όψη εμφανίζεται μόνο όταν τα γράμματα αντικατασταθούν από έναν αριθμό. Αυτή η αδυναμία των μαθητών να λειτουργούν αυθόρμητα με ή πάνω στο άγνωστο συνιστά ένα γνωστικό εμπόδιο, το οποίο θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένα κενό μεταξύ Αριθμητικής και Άλγεβρας (Herscovics, N. & Linchevski, L., 1996, σ. 41).

Η ύπαρξη αυτού του κενού έχει ως συνέπεια να δυσκολεύεται η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα. Για τη διευκόλυνση αυτής της μετάβασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα γεωμετρικό μοντέλο μέσω του οποίου θα εισάγονται λειτουργίες που θα αντιστοιχούν σε άλλες ενός ανώτερου επιπέδου αφαίρεσης. Έτσι για τη λύση της εξίσωσης Ax+B=Cx (C>A) και A, B, C θετικοί αριθμοί μπορεί να εφαρμοσθεί το παρακάτω γεωμετρικό μοντέλο (Filloy, E. & Sutherland, R. 1996).

Αρχικά –όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα– «μεταφράζεται» η εξίσωση σε ισότητα εμβαδών. Στη συνέχεια, από τη σύγκριση των ίσων γραμμοσκιασμένων εμβαδών, προκύπτει η νέα εξίσωση:

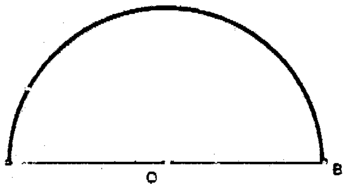
$$(C-A)\,x=B$$



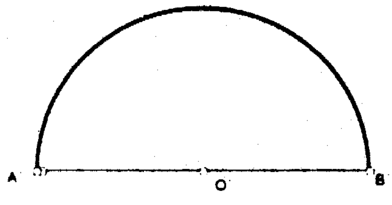
Δραστηριότητα με τη χρήση Η/Υ

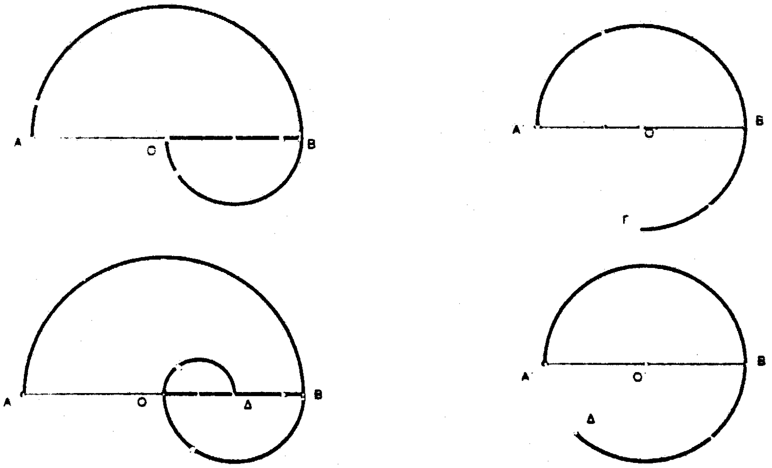
Ας δούμε τώρα με ποιον τρόπο η χρήση Η/Υ θα μπορούσε να βοηθήσει σε μια καλύτερη «αίσθηση» του προβλήματος και πώς θα μας διευκολύνει στη μαθηματική επεξεργασία της πρώτης δραστηριότητας. Με κατάλληλο λογισμικό (software) μπορούμε να κάνουμε μια σύγκριση δύο κινήσεων κατά τέτοιο τρόπο, ώστε χαρακτηριστικά της μίας κίνησης (χρονική διάρκεια, διαδρομή κτλ.) να αντιστοιχίζονται και στην άλλη κίνηση. Η μάθηση, ως γνωστόν, συντελείται μέσω γνωστικών συγκρούσεων και προσωπικού αναστοχασμού. Η γνωστική σύγκρουση στην περίπτωσή μας αναφέρεται στο κατά πόσο μια διαδικασία άπειρων βημάτων μπορεί να εξελίσσεται σε πεπερασμένο χρόνο. Μέσα από τις «παράλληλες» κινήσεις δύο κινητών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα,

Πρώτο κινητό



Δεύτερο κινητό





προσπαθούμε να δώσουμε καλύτερη «αίσθηση» των δεδομένων του προβλήματος και ευκαιρίες για γνωστική σύγκρουση και εικασίες. Αν λοιπόν παράλληλα με το πρώτο κινητό κινείται με την ίδια ταχύτητα ένα δεύτερο κινητό, διαγράφοντας όμως τον κύκλο ακτίνας ρ=1, οι δύο διαδρομές θα είναι ίσες οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Έτσι μπορούμε να έχουμε αφ' ενός μια διαπίστωση για το πεπερασμένο του μήκους της διαδρομής του αρχικού κινητού και αφ' ετέρου μια εκτίμηση για το μήκος της διαδρομής. Τα παραπάνω φαινόμενα και οι διαπιστώσεις αναδεικνύουν και την ανάγκη για μια μαθηματική αιτιολόγησή τους και για την αντιμετώπισή τους πλέον ως μαθηματικού φαινομένου (π.χ. εύρεση του αθροίσματος άπειρων προσθετέων). Σ' αυτό το πλαίσιο η απόδειξη μπορεί να αποτελέσει στοιχείο της ερευνητικής δραστηριότητας, αφού πρέπει να πεισθούμε και να πείσουμε για τις εικασίες μας και τους ισχυρισμούς μας.

Επίλογος

Ο σχεδιασμός του καθημερινού μαθήματος, για να ενεργοποιεί το ενδιαφέρον των μαθητών, θα πρέπει να εντάσσεται σε πλαίσια που είναι οικεία και έχουν νόημα μέσα στο πολιτιστικό περιβάλλον των μαθητών. Η αναζήτηση καταστάσεων που μπορεί να λειτουργούν ως «σημεία εκκίνησης» για την ανάπτυξη μιας εμπειρίας η οποία θα προσφέρει ποιοτική και σφαιρική εισαγωγή σε μια μαθηματική έννοια προβάλλει ως μια εναλλακτική λύση. Άλλωστε η δημιουργία βιώσιμων, λειτουργικών συνδέσεων μεταξύ του κόσμου της αυθεντικής ανθρώπινης εμπειρίας και των τυπικών συστημάτων των Μαθηματικών αποτελεί ένα κεντρικό διδακτικό πρόβλημα της μαθηματικής εκπαίδευσης (Kaput, J., 1994, σ. 379). Αυτή η ποιοτική εισαγωγή θα μπορούσε, στη συνέχεια, να δημιουργήσει την ανάγκη για μια περισσότερο τυπική περιγραφή των εννοιών που εμπλέκονται. Ασφαλώς η εύρεση κάθε φορά των κατάλληλων δραστηριοτήτων για την ανάπτυξη εμπειριών μέσω των οποίων κατά τρόπο «φυσικό» και «αυθόρμητο» θα προβάλλουν μαθηματικά περιεχόμενα δεν είναι μια εύκολη υπόθεση. Αποτελούν ωστόσο την πλέον αξιόπιστη και αποτελεσματική πρόταση.

Βιβλιογραφία

Anthony, G (1996). Active Learning in a Constructivist Framework. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 4, pp. 349-369.

Arsac, G., Balacheff, N., Mante, M. (1992).Teacher's role and reproducibility of didactital situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 5-29.

Bodin, A. & Capponi, B. (1996). Junior secondary school practice. In Bishop et al. (Eds). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 565 - 614). Kluver Academic Publishers.

Chevallier, M. (2000). Εναλλακτικές Μέθοδοι Διδασκαλίας των Μαθηματικών. Στο Φ. Καλαβάσης και Μ. Μεϊμάρης (επιμέλεια). *Θέματα διδακτικής των Μαθηματικών-V*. Αθήνα: Gutenberg.

Cobb, R. et al. (1991). Curriculum and teacher development: Psychological anthropological perspectives. In E. Fennema, T. P. Carpender & S. J. Lamon (Eds). *Integrating research on teaching and learning Mathematics* (pp. 92-131). N.Y.: SUNU University Press.

De Lange (1996). Using and Applying Mathematics in Education. In Bishop et al. (Eds). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 49-97). Kluver Academic Publishers.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2001). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών των Μαθηματικών. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Filloy, E. & Rojano, T. (1984). From an arithmetical thought to an algebraic thought. In J. Moser (Ed.). *Proceedings of PME-NA VI*. Madison, Wisconsin, 51-56.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning in Mathematics*, (2), 19-25.

Filloy, E & Sutherland, R. (1996). Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra. In Bishop et al. (Eds). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 139-160). Kluver Academic Publishers.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.

Grugnetti, L. & Jaquet, F. (1996). Senior Secondary School Practices. In Bishop et al. (Eds). *International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 615-646). Kluver Academic Publisher.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A Gognitive gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understandin. In D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York: McMillan.

Kaput, J. (1994). The Representation Roles of Technology in Connecting Mathematics with Authentic Experience. In R. Biehler et al. (Eds). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp 379-397). Kluver Academic Publishers.

Keitel, C. (2000). Διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών σε διεπιστημονικό πλαίσιο: τα Μαθηματικά και η κοινωνική πρακτική τους μέσα στην τάξη. Στο Φ. Καλαβάσης, και Μ. Μεϊμάρης (επιμέλεια). *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών-V*. Αθήνα: Gutenberg.

Κλαουδάτος, Ν. (2000). Ενεργητική μάθηση και επίλυση προβλήματος: μία πειραματική εφαρμογή. Στο Φ. Καλαβάσης, και Μ. Μεϊμάρης (επιμέλεια). *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών-IV*. Αθήνα: Gutenberg.

Koehler, M. & Grouws, D. (1992). Mathematics Teaching Practices and their Effects. In D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York: McMillan.

Κολέζα, Ε. (1997). *Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των Μαθηματικών.* 14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Ε.Μ.Ε.

Lacatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* Cambrige University Press.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 39-65.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 41, 47-68.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.*

Niss, M. (1996). Goals of Mathematics Teaching. In Bishop et al. (Eds). *International Handbook in Mathematics Education* (pp. 11-47). Kluver Academic Publishers.

Niss, M. (Ed.) (1993). Investigations into Assessment in Mathematics Education. An *ICMI study*. London: Kluver Academic Publishers.

Romberg, A. T. (1993). How one comes to know: Models and theories of the learning of Mathematics. In M. Niss (Ed.) *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Kluver Academic Publisher.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical Conception: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of Mathematics objects and the quantary of reification. The case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes, Vol. 25, pp. 59-84). Washington DC: Mathematical Association of America.

Skemp, R. (1996). Εννοιολογική κατανόηση και εργαλειακή κατανόηση. *Ευκλείδης γ΄, Επιθεώρηση Μαθηματικής Εκπαίδευσης*, 46, 13, σ. 20-35, Ε.Μ.Ε.

Tall, D. (1994). Computer en vironments for the learning of Mathematics. In R. Biehler et al. (Eds). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 190-199). Kluver Academic Publishers.

Τζανάκης, Κ. και Κούρκουλος, Μ. (2000). Η παροχή μαθηματικής παιδείας και τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού σκέπτεσθαι: η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 111, σ. 66-73.

The National Curriculum for England (1999), London.

Tymoczko, T. (1986). *New directions in the philosophy of Mathematics*. Boston: Birkhanser.

Χατζηγεωργίου, Γ. (2000). *Γνώθι το Curriculum*. Αθήνα: Ατραπός.

Το άρθρο υποβλήθηκε στις 01/04/2002. *Έγινε αποδεκτό στις 23/10/2002.*