Η εισαγωγή των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στο Δημοτικό

Μια πειραματική εφαρμογή

Χαράλαμπος Λεμονίδης
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Περίληψη

Στο σημερινό αναλυτικό πρόγραμμα η εισαγωγή του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου δεν πραγματοποιείται σταδιακά και σύμφωνα με τις προϋπάρχουσες γνώσεις και ικανότητες των μαθητών. Προτείνεται μια πειραματική διδασκαλία κατά το πρώτο στάδιο της οποίας επεκτείνεται χρονικά και δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στην ενασχόληση των μαθητών με εμπειρικές καταστάσεις και προβλήματα, τα οποία απαιτούν τη χρήση άτυπων γνώσεων και στρατηγικών. Στόχος σ' αυτό το πρώτο στάδιο είναι η δημιουργία μιας πλατιάς εννοιολογικής βάσης και κατανόησης των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Τα αποτελέσματα της πειραματικής αυτής διδασκαλίας στην εκτέλεση των πράξεων τα αξιολογούμε με βάση τη σύγκριση της επίδοσης των μαθητών στο τέλος της Β΄ τάξης. Συγκρίνεται η επίδοση των μαθητών δύο τμημάτων, οι οποίοι διδάχτηκαν Μαθηματικά με την πειραματική διδασκαλία, με την επίδοση των μαθητών δύο τμημάτων που διδάχτηκαν το μάθημα με την κλασική διδασκαλία. Φαίνεται ότι η πειραματική διδασκαλία δημιούργησε εμφανώς καλύτερες επιδόσεις στους μαθητές όσον αφορά τις ικανότητες υπολογισμών.

Résumé

Dans l'actuel programme scolaire l'introduction, aux premières classes de l'école élémentaire, des opérations de la multiplication et de la division, ne se réalise ni progressivement ni selon les connaissances pro-existantes et les

Ο κ. Χαράλαμπος Λεμονίδης είναι αναπληρωτής καθηγητής στην Παιδαγωγική Σχολή Φλώρινας του Α.Π.Θ.

capacités des élèves. C'est pour cela que nous proposons un enseignement expérimental pendant la première étape duquel nous soyons capables de donner plus d'importance à l'occupation des élèves avec des situations empiriques et avec des problèmes qui exigent l'emploi des connaissances et des procédures non formelles. De cette manière on élargit la compréhension cognitive des opérations de la multiplication et de la division. L'évaluation des résultats de cet enseignement expérimental est effectuée au cours de l'exécution de ces opérations et selon le progrès des élèves à la fin de la 2eme classe (CE1).

On a fait la comparaison des élèves de deux classes expérimentales avec des élèves de deux classes d'un enseignement classique. Il parait que l'enseignement expérimental a amélioré le comportement des élèves et leurs capacités de calcul.

Εισαγωγή

Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, οι οποίες εισάγονται στην αρχή του Δημοτικού Σχολείου, αποτελούν περιεχόμενα που είναι σημαντικά και θεμελιώδη για τους μαθητές. Είναι σημαντικά, γιατί στη γνώση των απλών πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης βασίζονται οι μετέπειτα ικανότητες εκτέλεσης πιο σύνθετων πράξεων και αλγορίθμων, η λύση προβλημάτων, ο υπολογισμός κατά προσέγγιση, καθώς και άλλες καταστάσεις σχετικές με τις πράξεις αυτές.

Στην ελληνική εκπαίδευση σήμερα η διδασκαλία των απλών πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι πεπαλαιωμένη και δεν εφαρμόζονται σε αυτήν τα σύγχρονα ερευνητικά αποτελέσματα της διδακτικής των Μαθηματικών. Η σημερινή διδασκαλία δε χρησιμοποιεί και δε βασίζεται στις άτυπες ή διαισθητικές γνώσεις των μαθητών (που υπάρχουν πριν από την τυπική διδασκαλία), για να εισαγάγει τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης (Λεμονίδης, Χ. 2001). Αντίθετα, η διδασκαλία αυτή είναι φορμαλιστική και έχει μαθηματική αφετηρία που στηρίζεται στη λογική των συνόλων. Δε βασίζεται στις ικανότητες και τον κόσμο του παιδιού.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε, καταρχάς, κάποια ερευνητικά αποτελέσματα που αναφέρονται στις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών και τη διδασκαλία της προπαίδειας. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τη λογική μιας νέας πειραματικής διδασκαλίας για την εισαγωγή των εννοιών του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Με βάση την πειραματική αυτή διδασκαλία, διδάχτηκαν δύο τμήματα πειραματικών σχολείων της Φλώρινας. Οι επιδόσεις των τμημάτων αυτών στους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις στο τέλος της Β΄ τάξης αναλύονται και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες επιδόσεις των μαθητών από την κλασική διδασκαλία.

Άλλες έρευνες

Πολλές έρευνες πραγματοποιήθηκαν, για να καταγράψουν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε προβλήματα πολλαπλασιαστικού τύπου με φυσικούς αριθμούς (Anghileri, 1989· Kouba, 1989· Mulligan, 1992· Carpenter et al., 1993· Steffe, 1994· Mulligan and Mitchelmore, 1997). Οι Mulligan και Mitchelmore (1997) οργάνωσαν και ταξινόμησαν τα διαισθητικά μοντέλα και τις αντίστοιχες στρατηγικές υπολογισμού, όπως παρουσιάζονται παρακάτω στον Πίνακα 1. Το ίδιο διαισθητικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί με μια ποικιλία από στρατηγικές.

Οι Fischbein et al. (1985) ήταν από τους πρώτους που αναφέρθηκαν στην έννοια των διαισθητικών μοντέλων ή, όπως επίσης αποκαλούνται, έμμεσων, υπονοούμενων ή άτυπων μοντέλων. Αυτοί θεωρούν ότι: *«κάθε θεμελιώδης αριθμητική πράξη γενικά παραμένει συνδεδεμένη με ένα έμμεσο, ασυναίσθητο και αρχικό διαισθητικό μοντέλο»* (σελ. 4), το οποίο καθοδηγεί την έρευνα για την πράξη που χρειάζεται στη λύση ενός προβλήματος.

Άμεση καταμέτρηση (Direct counting). Χρησιμοποιούνται φυσικά υλικά, για να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα. Τα αντικείμενα απλώς καταμετρούνται, χωρίς καμία φανερή αναφορά στην πολλαπλασιαστική δομή.

Ρυθμική καταμέτρηση (Rhythmic counting). Η καταμέτρηση ακολουθεί τη δομή του προβλήματος. Για παράδειγμα, «1, 2· 3, 4· 5, 6·· ή ··6, 5· 4, 3· 2, 1». Ταυτόχρονα με την καταμέτρηση λαμβάνει χώρα μια δεύτερη μέτρηση, αυτή του αριθμού των ομάδων.

Καταμέτρηση με υπερπήδηση (Skip counting). Η καταμέτρηση πραγματοποιείται με πολλαπλάσια. Για παράδειγμα, «5, 10, 15 ή 15, 10, 5». Με αυτό τον τρόπο γίνεται ευκολότερο να μετρηθεί ο αριθμός των ομάδων.

Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή αφαίρεση (Repeated addition or subtraction). Η καταμέτρηση αντικαθίσταται από υπολογισμούς όπως: «3+3=6, 6+3=9 ή 9-3=6, 6-3=3».

Πρόσθεση διπλών (Additive doubling). Για παράδειγμα, «4 και 4 ίσον 8, 8 και 8 κάνει 16».

Πρόσθεση μισών (Additive halving). Για παράδειγμα, αν κόψουμε το 8 σε δύο μισά, μας κάνει 4 και 4.

Πολλαπλασιαστική πράξη (Multiplicative operation). Ο υπολογισμός γίνεται με την ανάκληση στη μνήμη κάποιας γνωστής πράξης του πολλαπλασιασμού, για παράδειγμα, 3 φορές το 4 κάνει 12, ή με παραγωγή από κάποια γνωστή πράξη, για παράδειγμα, το 3x4 υπολογίζεται ως εξής: 3x3=9, 9+3=12.

Πίνακας 1. *Διαισθητικά μοντέλα για πολλαπλασιασμό και διαίρεση (Mulligan, J., Mitchelmore, M., 1997, σελ. 316)*

Διαισθητικά μοντέλα	*Στρατηγικές υπολογισμού*
	Πολλαπλασιασμός
1. Άμεση καταμέτρηση	Μοναδιαία καταμέτρηση
2. Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση	Ρυθμική καταμέτρηση προς τα εμπρός
	Καταμέτρηση με υπερπήδηση προς τα εμπρός
	Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση
	Πρόσθεση διπλών
3. Πολλαπλασιαστική πράξη	Γνωστή πράξη πολλαπλασιασμού
	Παραγωγή πράξης πολλαπλασιασμού
	Διαίρεση
1. Άμεση καταμέτρηση	Αντιστοίχιση ένα προς πολλά
	Μοναδιαία καταμέτρηση
	Μοιρασιά
	Ομαδοποίηση με δοκιμή και λάθος
2. Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση	Ρυθμική καταμέτρηση προς τα πίσω
	Καταμέτρηση με υπερπήδηση προς τα πίσω
	Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση
	Πρόσθεση μισών
3. Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση	Ρυθμική καταμέτρηση προς τα εμπρός
	Καταμέτρηση με υπερπήδηση προς τα εμπρός
	Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση
	Πρόσθεση διπλών
4. Πολλαπλασιαστική πράξη	Γνωστή πράξη πολλαπλασιασμού
	Παραγωγή πράξης πολλαπλασιασμού

Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, όπως συμβαίνει και στις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, πρέπει να αναπτύσσονται με βάση τις άτυπες στρατηγικές που δημιουργούνται από μια ποικιλία ουσιαστικών πολλαπλασιαστικών καταστάσεων και από την κατασκευή των παραγόμενων πράξεων. Οι μαθητές θα πρέπει να οδηγηθούν να ανακαλύψουν τις παραγόμενες στρατηγικές, να παρουσιαστούν αυτές στην τάξη, και να συζητηθούν.

Σε αυτή τη λογική κινείται η διδασκαλία για τη μάθηση των πινάκων του πολλαπλασιασμού που προτείνει ο Hans Ter Heege (1985) και χωρίζεται σε τρεις φάσεις (βλ. επίσης Selter, 1994).

Στην *πρώτη φάση* (εννοιολογική φάση) γίνεται προσπάθεια να κατασκευαστεί μια πλατιά εννοιολογική βάση για την πράξη μέσω των εμπειριών που προέρχονται από μια ποικιλία πολλαπλασιαστικών καταστάσεων όπως, για παράδειγμα, ισοπληθείς ομάδες, ορθογώνια διάταξη κτλ. Οι καταστάσεις αυτές παρουσιάζονται με διάφορες μορφές (υλικά, γραφικά, δραματοποιημένα, προφορικά, συμβολικά) και προκαλούν μια ποικιλία από άτυπες στρατηγικές καταμέτρησης και ομαδοποίησης.

Στη *δεύτερη φάση* (ανακατασκευαστική φάση) οι μαθητές παρακινούνται να ανακαλύψουν και να συζητήσουν στρατηγικές που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό άγνωστων γινομένων με βάση ήδη γνωστές πράξεις. Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, οι στρατηγικές της καταμέτρησης και της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης. Ο Hans Ter Heege (1985) βρίσκει ότι τα περισσότερα παιδιά δεν μπορούν άμεσα να απομνημονεύσουν τους πίνακες της προπαίδειας μέσω της εξάσκησης και της πρακτικής, περνούν όμως από ένα ενδιάμεσο στάδιο στο οποίο αυθόρμητα χρησιμοποιούν κάποιες στρατηγικές για να παραγάγουν τα γινόμενα του πολλαπλασιασμού. Αυτές οι στρατηγικές είναι οι εξής:

1) Χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας (6x7=7x6).

2) Χρήση των πολλαπλασίων του 10. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούν το 10x6=60, για να υπολογίσουν το 5x6=30, ή το 10x8=80, για να υπολογίσουν το 9x8=72.

3) Υπολογισμός των γινομένων με διπλασιασμό. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούν το γινόμενο 2x7=14, για να υπολογίσουν το 4x7 διπλασιάζοντας το 14.

4) Υπολογισμός με το μισό. Χρησιμοποιείται αποκλειστικά για τον υπολογισμό των γινομένων της μορφής 5x ..., τα οποία υπολογίζονται παίρνοντας το μισό του 10x ...

5) Αύξηση κατά ένα. Τα παιδιά αυξάνουν ένα γνωστό γινόμενο προσθέτοντας τον πολλαπλασιαστή μία φορά. Όταν γνωρίζουν ή υπολογίζουν εύκολα το 5x7=35, τότε βρίσκουν το 6x7 υπολογίζοντας 35+7.

6) Μείωση κατά ένα. Τα παιδιά μειώνουν ένα γνωστό γινόμενο αφαιρώντας τον πολλαπλασιαστή μία φορά. Συχνά υπολογίζουν 9x7=70 – 7. Αυτή η στρατηγική του «ένα λιγότερο» χρησιμοποιείται αποκλειστικά στα γινόμενα της μορφής 9x ...

Στην *τρίτη φάση* (φάση αναπαραγωγής και σταθεροποίησης) της μάθησης των πινάκων του πολλαπλασιασμού οι μαθητές φτάνουν προοδευτικά μετά από πολλές ασκήσεις και συζητήσεις που επικεντρώνονται σε αυτές τις στρατηγικές. Σε αυτή τη φάση δίνεται έμφαση στην απομνημόνευση, αλλά οι μαθητές μπορούν πάντοτε να καταφεύγουν στη διαδικασία ανακατασκευής, εάν αποτυγχάνει η αναπαραγωγή. Δίνεται επίσης προσοχή στα γινόμενα με πολλαπλασιαστή μεγαλύτερο του 10 (9x11=; ή 12x6=;), και το μάθημα συνεχίζει να δίνει έμφαση μεταξύ του πολλαπλασιασμού και των καταστάσεων της πραγματικότητας.

Παρουσίαση ενός νέου τρόπου εισαγωγής του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης

Στο πλαίσιο μιας νέας πρότασης διδασκαλίας για τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου (Λεμονίδης Χ., 2003), πραγματοποιήσαμε μια πειραματική διδασκαλία για την εισαγωγή του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Η διδασκαλία αυτή είχε τα παρακάτω χαρακτηριστικά, τα οποία τη διαφοροποιούσαν από τη σημερινή διδασκαλία στο ελληνικό σχολείο.

Η εισαγωγή των εννοιών του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με εμπειρικές καταστάσεις από την καθημερινή ζωή, πριν από την εισαγωγή των συμβολικών πράξεων, επεκτάθηκε σε μεγαλύτερη έκταση και αφιερώθηκε γι' αυτό περισσότερος χρόνος από ό,τι στο σημερινό αναλυτικό πρόγραμμα. Η εισαγωγή αυτή πραγματοποιήθηκε με βάση καθημερινά φαινόμενα και εμπειρικές προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες ανταποκρίνονταν στις προϋπάρχουσες γνώσεις και ικανότητες των μαθητών. Στη σημερινή διδασκαλία δεν αφιερώνεται αρκετός χρόνος για εμπειρικά παραδείγματα κατά την εισαγωγή των εννοιών του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, ώστε η σημασία τους να γίνει κατανοητή από τους μαθητές. Το πρόγραμμα κινείται γρήγορα, για να φτάσει πρόωρα στη συμβολική γραφή και την εκτέλεση των πράξεων, οι οποίες όμως είναι αποπλαισιωμένες από τις εμπειρικές καταστάσεις. Συνέπεια αυτού είναι, σε αρκετές περιπτώσεις, οι μαθητές να εκτελούν πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, αλλά να μην κατανοούν τη σημασία και την εμπειρική εφαρμογή των πράξεων αυτών. Εμείς προτείναμε από πολύ νωρίς καταστάσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, προτού να γίνει ειδική αναφορά και διδασκαλία των πράξεων αυτών. Οι καταστάσεις αυτές βασίζονται σε καθημερινά φαινόμενα και οι μαθητές διαθέτουν τις ικανότητες, ώστε να τις αντιμετωπίσουν με το χειρισμό αντικειμένων, με τη σχεδίαση ζωγραφιών, με τις διαδικασίες της καταμέτρησης και της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης για τον πολλαπλασιασμό και της μοιρασιάς ή της επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης για τη διαίρεση.

Η διδασκαλία της προπαίδειας πραγματοποιήθηκε με διαφορετικό τρόπο και είχε τα παρακάτω κύρια χαρακτηριστικά:

Η προπαίδεια άρχιζε με γινόμενα και στήλες, τα οποία ήταν κατά το μεγαλύτερο μέρος γνωστά στους μαθητές και ήταν εύκολο να τα χειριστούν. Αρχίζαμε δηλαδή με τις στήλες του δύο, του πέντε και του δέκα. Τα γινόμενα του δύο ήταν γνωστά ως τα διπλάσια των αριθμών. Τα γινόμενα του πέντε είχαν ήδη προετοιμαστεί με τη μέτρηση 5-5, ενώ τα γινόμενα του δέκα ήταν εύκολα, ως ιδιότητα με την οποία υπολογίζονται οι δεκάδες των αντίστοιχων αριθμών. Με αυτά τα γινόμενα οι μαθητές εξασκούνται στις στήλες της προπαίδειας και στη διαδοχή που έχουν οι φορές από το ένα μέχρι το δέκα. Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν και εξασκούνταν στην αντιμεταθετική ιδιότητα, καθώς και στις διάφορες στρατηγικές που αναφέραμε παραπάνω. Στη συνέχεια διδάσκονταν οι στήλες του τρία και του τέσσερα και μετά οι στήλες των μεγαλύτερων αριθμών.

Κατά τη διδασκαλία κάθε στήλης θεωρούσαμε στρατηγικό γινόμενο το γινόμενο του πέντε και εξασκούσαμε τους μαθητές να υπολογίζουν με βάση αυτό· για παράδειγμα, το γινόμενο του 6 είναι το γινόμενο του 5 συν μία φορά, ενώ το γινόμενο του 4 είναι μείον μία φορά. Εξασκούσαμε τους μαθητές να κινούνται πάνω στη στήλη με βάση τις φορές· για παράδειγμα, δύο φορές οι δύο φορές μάς κάνουν τέσσερις φορές, οι εννιά φορές είναι μία φορά λιγότερο από το δέκα φορές κτλ.

Στη σημερινή διδασκαλία κυρίαρχο ρόλο παίζει το σχολικό βιβλίο, με βάση το οποίο προτείνονται σχεδόν αποκλειστικά στους μαθητές εικονογραφημένες καταστάσεις και πράξεις με συμβολικές αναπαραστάσεις. Απουσιάζει σχεδόν παντελώς η διδασκαλία των νοερών υπολογισμών. Στη διδασκαλία που προτείναμε εμείς δόθηκε μεγάλη έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς. Οι νοεροί υπολογισμοί διδάσκονταν συστηματικά με ένα μεταγνωστικό χαρακτήρα, ζητούσαμε δηλαδή από τους μαθητές να μας εξηγούν τον τρόπο με τον οποίο υπολόγιζαν. Ανακοινώνονταν σε όλη την τάξη και ακολουθούσε συζήτηση για τους διάφορους τρόπους υπολογισμού.

Μεθοδολογία έρευνας

Το Μάιο του 1999 πραγματοποιήσαμε σε δύο σχολεία της Φλώρινας μια έρευνα όσον αφορά τις γνώσεις των μαθητών σχετικά με τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις. Εξετάστηκαν δύο ομάδες μαθητών στο τέλος της Β΄ τάξης, η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου. Κάθε ομάδα αποτελούνταν από 35 μαθητές οι οποίοι προέρχονταν από τα δύο διαφορετικά σχολεία. Οι μαθητές των δύο ομάδων εξετάστηκαν με ένα αρχικό τεστ στις αριθμητικές τους ικανότητες και παρουσίασαν ίδιο επίπεδο ως προς τις επιδόσεις τους (Λεμονίδης, Χ., 2003, σελ. 91-92). Οι μαθητές της ομάδας ελέγχου διδάχτηκαν με το κλασικό πρόγραμμα του σχολείου, ενώ οι μαθητές της πειραματικής ομάδας με τη νέα πρόταση διδασκαλίας, η οποία διήρκεσε χρονικά όσο και η κλασική διδασκαλία. Οι διδασκαλίες και στις δύο ομάδες πραγματοποιήθηκαν από τους κανονικούς δασκάλους που υπήρχαν στα σχολεία. Κάθε μαθητής εξεταζόταν με ατομική συνέντευξη, οι ερωτήσεις θέτονταν προφορικά και ο εξεταστής κατέγραφε τις απαντήσεις και τις διαδικασίες υπολογισμού. Για την καταγραφή των διαδικασιών ο εξεταστής ρωτούσε ειδικά το μαθητή να του περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε για να υπολογίσει τις πράξεις και τα προβλήματα. Οι μαθητές εξετάστηκαν σε δέκα χαρακτηριστικά γινόμενα της προπαίδειας και σε εννέα διαιρέσεις.

Ερευνητικά αποτελέσματα

Πολλαπλασιασμοί

Προτείναμε δέκα γινόμενα της προπαίδειας με όρους μικρούς και μεγάλους αριθμούς. Προσπαθήσαμε τα γινόμενα αυτά να είναι αντιπροσωπευτικά από ολόκληρο σχεδόν τον πίνακα της προπαίδειας. Η επιτυχία των μαθητών των δύο ομάδων στην προπαίδεια παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 2: *Ποσοστά επιτυχίας στην προπαίδεια*

	3x4	*3x7*	*4x6*	*5x5*	*5x8*	*6x7*	*7x7*	*7x8*	*8x9*	*9x10*
Τάξεις	32	30	28	29	21	14	15	7	15	28
Ελέγ.	*91,5%*	*85,5%*	*80%*	*83%*	*60%*	*40%*	*43%*	*20%*	*43%*	*80%*
Τάξεις	32	32	28	32	29	25	23	20	24	34
Πειρ.	*91,5%*	*91,5%*	*80%*	*91,5%*	*83%*	*71,5%*	*65,5%*	*57%*	*68,5%*	*97%*

Σύμφωνα με τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα, παρατηρούμε ότι η επιτυχία των μαθητών και των δύο ομάδων είναι μεγάλη (πάνω από 80%) στα γινόμενα με μικρούς αριθμούς (το 3, το 4, το 5) και το γινόμενο του 10, εκτός από το γινόμενο 5x8 του οποίου η επιτυχία για τους μαθητές της ομάδας ελέγχου πέφτει στο 60%.

Οι μαθητές της ομάδας ελέγχου στα γινόμενα με αριθμούς μεγαλύτερους του 5 (6x7, 7x7, 7x8 και 8x9) πετυχαίνουν χαμηλά ποσοστά επιτυχίας, γύρω στο 40%, με χαμηλότερο το γινόμενο 7x8, το οποίο φτάνει μόλις το 20%. Αντίθετα, τα δύο τρίτα περίπου των μαθητών της πειραματικής ομάδας πετυχαίνουν στα γινόμενα αυτά, με εξαίρεση το γινόμενο 7x8, στο οποίο πετυχαίνουν περίπου οι μισοί μαθητές.

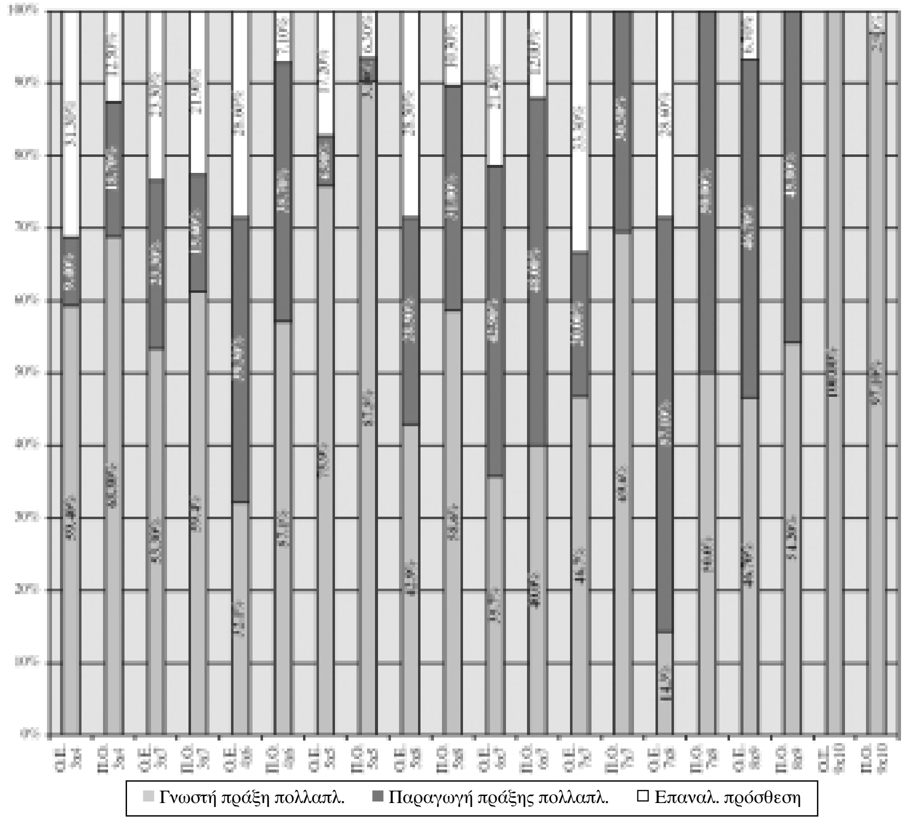
Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας πετυχαίνουν στατιστικά μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου στα γινόμενα με μεγάλους αριθμούς, δηλαδή στα γινόμενα 5x8, 6x7, 7x7, 7x8, 8x9 και 9x10. Η διαφορά ποσοστού εξετάστηκε με το z τεστ στο γινόμενο 5x8 $z=2{,}11$ με $p< 0{,}05$, στο 6x7 $z=2{,}64$ με $p< 0{,}01$, στο 7x7 $z=1{,}91$ με $p< 0{,}05$, στο 7x8 $z=3{,}19$ με $p< 0{,}001$, στο 8x9 $z=2{,}16$ με $p< 0{,}05$, στο 9x10 $z=2{,}25$ με $p< 0{,}05$.

Όσον αφορά τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στους νοερούς πολλαπλασιασμούς, τις περιγράφουμε στη συνέχεια:

«Γνωστή πράξη πολλαπλασιασμού» ονομάζουμε τη στρατηγική κατά την οποία οι μαθητές γνωρίζουν απέξω το αποτέλεσμα του γινομένου και το ανακαλούν αμέσως από τη μνήμη μακράς διάρκειας.

Η στρατηγική της *«παραγωγής πράξης πολλαπλασιασμού»* εμπεριέχει τρεις υποπεριπτώσεις:

Διάγραμμα 1: *Στρατηγικές υπολογισμού στους πολλαπλασιασμούς*



1) «*Ανάκληση άλλων γινομένων ή γινομένων και προσθαφαιρέσεων*». Εδώ οι μαθητές ανακαλούν άλλα γινόμενα ή γινόμενα και προσθαφαιρέσεις, για να υπολογίσουν το ζητούμενο γινόμενο. Για παράδειγμα, στο γινόμενο 6x7 οι μαθητές υπολογίζουν: 6x6=36, 36+6=42 ή 7x7=49, 49-7=42 ή 3x7=21, 21+21=42.

2) «*Ανάκληση προπαίδειας*». Οι μαθητές εδώ απαγγέλλουν από την αρχή την αντίστοιχη στήλη της προπαίδειας. Για παράδειγμα, για να βρούνε το 6x7, λένε: 1x7=6, 2x7=12, ..., 6x7=42.

3) «*Ανάκληση προσθαφαιρέσεων*». Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές ανακαλούν στη μνήμη τους αθροίσματα ή διαφορές και όχι γινόμενα, για να υπολογίσουν το γινόμενο. Στο 6x7 λένε: 7+7=14, 14+14=28, 28+14=42.

Με τη στρατηγική της «*επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης*» οι μαθητές υπολογίζουν το γινόμενο με επαναλαμβανόμενες προσθέσεις· για παράδειγμα, για το γινόμενο 3x4 υπολογίζουν 4+4=8, 8+4=12.

Στη στρατηγική της «*επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης με δάκτυλα ή αντικείμενα*» οι μαθητές χρησιμοποιούν την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση αλλά την πραγματοποιούν με τη βοήθεια αντικειμένων ή των δακτύλων.

Στο παραπάνω διάγραμμα υπολογίσαμε τα ποσοστά των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές των δύο ομάδων, της ομάδας ελέγχου (Ο.Ε.) και της πειραματικής ομάδας (Π.Ο.). Ομαδοποιήσαμε τις στρατηγικές σε τρεις ομάδες στρατηγικών: *γνωστή πράξη πολλαπλασιασμού*, *παραγωγή πράξης πολλαπλασιασμού* και *επαναλαμβανόμενη πρόσθεση*. Στη στρατηγική της *παραγωγής πράξης πολλαπλασιασμού* συμπεριλήφθηκαν οι τρεις υποκατηγορίες και στη στρατηγική της *επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης* οι δύο κατηγορίες που αναφέρουμε παραπάνω.

Μια πρώτη γενική παρατήρηση είναι ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας χρησιμοποιούν πιο προωθημένες, δηλαδή πιο αφηρημένες, στρατηγικές από αυτές που χρησιμοποιούν οι μαθητές της ομάδας ελέγχου. Έτσι, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας χρησιμοποιούν σε μεγαλύτερα ποσοστά τη διαδικασία της *γνωστής πράξης* και σε μικρότερα ποσοστά την *επαναλαμβανόμενη πρόσθεση* από ό,τι οι μαθητές της ομάδας ελέγχου.

Η στρατηγική της *γνωστής πράξης*, δηλαδή η ικανότητα των μαθητών να γνωρίζουν απέξω και να ανακαλούν αυτόματα στη μνήμη τους τα γινόμενα, παρουσιάζεται σε μεγάλα ποσοστά και στις δύο ομάδες στα γινόμενα 9x10 (100% στην ομάδα ελέγχου και 97,1% στην πειραματική ομάδα) και 5x5 (76% και 87,5% αντίστοιχα). Επίσης, η στρατηγική αυτή εμφανίζεται με ένα ποσοστό γύρω στο 70% στους μαθητές της πειραματικής ομάδας στις πράξεις 3x4 και 7x7. Παρατηρούμε δηλαδή ότι το γινόμενο του 10 και το διπλό γινόμενο με το 5 έχουν αποθηκευτεί στη μνήμη και χρησιμοποιούνται άμεσα και από τις δύο ομάδες των μαθητών, ανεξάρτητα από τη διδασκαλία. Λόγω της πειραματικής διδασκαλίας οι μαθητές αυτοί γνωρίζουν από μνήμης το γινόμενο με μικρούς αριθμούς 3x4 και το διπλό γινόμενο 7x7. Στα γινόμενα 3x7, 4x6, 5x8, 7x8 και 8x9 οι μαθητές της πειραματικής ομάδας χρησιμοποιούν τη στρατηγική της γνωστής πράξης μεταξύ 50% και 60%, ενώ στα γινόμενα αυτά οι μαθητές της ομάδας ελέγχου χρησιμοποιούν τη στρατηγική αυτή σε πολύ χαμηλότερα ποσοστά, τα οποία κυμαίνονται από 14% μέχρι 53%.

Η στρατηγική της «επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης με δάκτυλα ή αντικείμενα» εμφανίζεται μόνο στους μαθητές της ομάδας ελέγχου. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές αυτοί υστερούν έναντι των μαθητών της πειραματικής ομάδας στην ικανότητα εκτέλεσης νοερών προσθέσεων και χρησιμοποιούν στρατηγικές με αντικείμενα ή τα δάκτυλά τους, για να πραγματοποιήσουν τις επαναλαμβανόμενες προσθέσεις.

Διαιρέσεις

Οι μαθητές εξετάστηκαν επίσης νοερά σε εννιά διαιρέσεις, οι οποίες ήταν τέλειες διαιρέσεις διψήφιου διαιρετέου με μονοψήφιο διαιρέτη. Όλες οι διαιρέσεις, εκτός από την 28:2, οι αντίστροφές τους πράξεις, δηλαδή τα γινόμενα, συμπεριλαμβάνονται στον πίνακα της προπαίδειας. Τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών των δύο ομάδων στις διαιρέσεις παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 3: *Ποσοστά επιτυχίας στις διαιρέσεις*

	28:2	*12:3*	*16:4*	*40:5*	*42:7*	*63:7*	*72:8*	*81:9*	*80:10*
Τάξεις	10	21	17	13	10	8	12	14	19
Ελέγ.	*28,5%*	*60%*	*48,5%*	*37%*	*28,5%*	*23%*	*34,5%*	*40%*	*54,5%*
Τάξεις	22	30	28	25	22	18	22	22	28
Πειρ.	*63%*	*85,5%*	*80%*	*71,5%*	*63%*	*51,5%*	*63%*	*63%*	*80%*

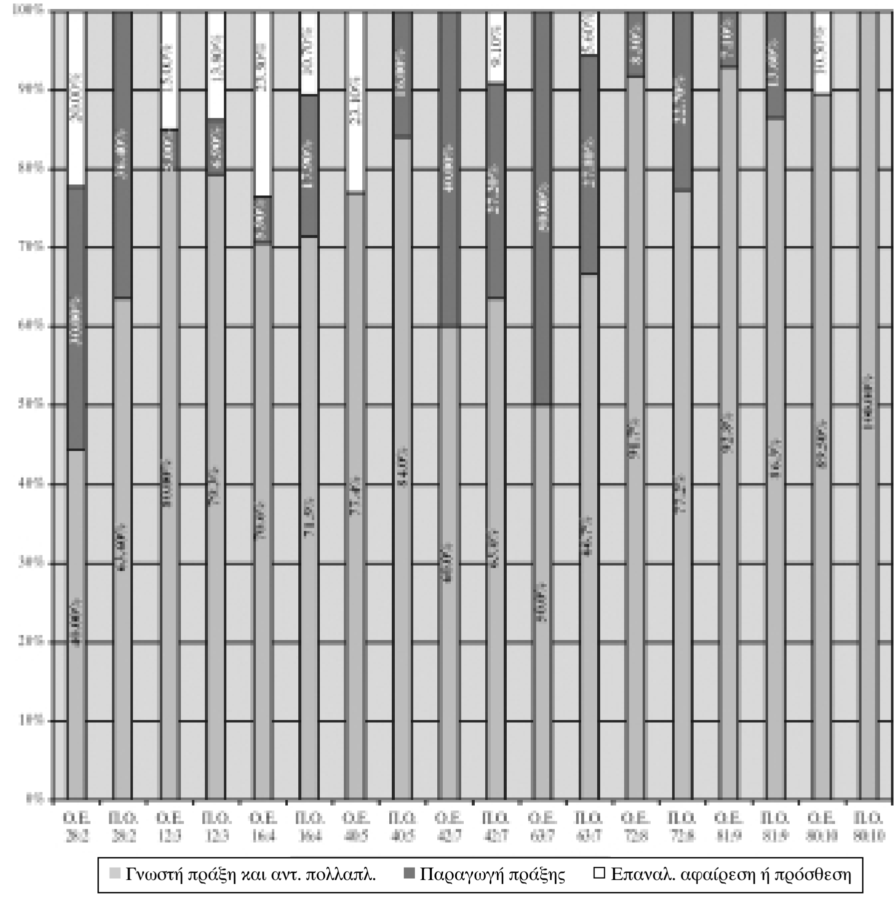
Παρατηρούμε, σύμφωνα με τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα, ότι οι επιδόσεις των μαθητών στις διαιρέσεις βρίσκονται ακόμη σε χαμηλό επίπεδο σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό. Η επίδοση όμως των μαθητών της πειραματικής ομάδας είναι πολύ καλύτερη από την ομάδα ελέγχου. Σε όλες τις πράξεις της διαίρεσης η πειραματική ομάδα παρουσιάζει μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας.

Η επιτυχία των μαθητών είναι μεγαλύτερη στις διαιρέσεις μικρών αριθμών, όταν το πηλίκο είναι μικρό (12:3, 16:4), και στις διαιρέσεις με διαιρέτη το 10 (80:10). Στις διαιρέσεις αυτές οι μαθητές της πειραματικής ομάδας πετυχαίνουν γύρω στο 80%, ενώ οι μαθητές της ομάδας ελέγχου γύρω στο 50% με 60%. Η επιτυχία των μαθητών είναι μικρότερη στις διαιρέσεις με πηλίκο μεγαλύτερο αριθμό (28:2, 40:5, 42:7, 63:7, 72:8 και 81:9). Στις διαιρέσεις αυτές οι μαθητές της πειραματικής ομάδας πετυχαίνουν από 51,5% μέχρι 71,5%, ενώ οι μαθητές της ομάδας ελέγχου πετυχαίνουν από 23% μέχρι 40%.

Οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στις νοερές διαιρέσεις ήταν οι εξής:

«Γνωστή πράξη διαίρεσης». Οι μαθητές εδώ γνωρίζουν απέξω τη διαίρεση και το αποτέλεσμά της και το ανακαλούν άμεσα από τη μνήμη μακράς διάρκειας. Σε μερικές περιπτώσεις ανακαλούν το αποτέλεσμα, αλλά το ελέγχουν με τον πολλαπλασιασμό.

Διάγραμμα 2: *Στρατηγικές υπολογισμού των διαιρέσεων*



«Παραγωγή πράξης πολλαπλασιασμού». Εδώ οι μαθητές χρησιμοποιούν ως πράξη τον πολλαπλασιασμό. Στην περίπτωση αυτή εμπεριέχονται τέσσερις υποπεριπτώσεις:

1) *«Ανάκληση του αντίστροφου πολλαπλασιασμού»*. Εδώ οι μαθητές φαίνεται να ψάχνουν για ένα πολλαπλάσιο του διαιρέτη που να είναι ίσο με το διαιρετέο. Για παράδειγμα, στην πράξη 40:5 βρίσκουν 8, γιατί σκέφτονται ότι 5x8=40.

2) *«Ανάκληση άλλων γινομένων ή γινομένων και προσθαφαιρέσεων»*.

3) *«Ανάκληση προπαίδειας»*.

4) *«Ανάκληση προσθαφαιρέσεων»*.

«Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση ή πρόσθεση». Οι μαθητές υπολογίζουν το πηλίκο με επαναλαμβανόμενες αφαιρέσεις ή προσθέσεις· για παράδειγμα, για το πηλίκο 12:3 υπολογίζουν 12-3=9, 9-3=6, 6-3=3, 3-3=0.

«Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση ή πρόσθεση με δάκτυλα ή αντικείμενα».

Στο παραπάνω διάγραμμα ομαδοποιήσαμε τις διαδικασίες σε τρεις ομάδες:

1) Γνωστή πράξη και αντίστροφος πολλαπλασιασμός, τα οποία περιλαμβάνουν τη διαδικασία της γνωστής πράξης της διαίρεσης και τη διαδικασία της ανάκλησης του αντίστροφου πολλαπλασιασμού.

2) Παραγωγή πράξης πολλαπλασιασμού, η οποία περιλαμβάνει τις τρεις διαδικασίες: α) ανάκληση άλλων γινομένων ή γινομένων και προσθαφαιρέσεων, β) ανάκληση προπαίδειας, γ) ανάκληση προσθαφαιρέσεων.

3) Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση ή πρόσθεση, η οποία περιλαμβάνει τις δύο τελευταίες διαδικασίες με ή χωρίς δάκτυλα ή αντικείμενα.

Η κύρια στρατηγική που χρησιμοποιούν οι μαθητές που εκτελούν σωστά τις διαιρέσεις είναι η ανάκληση της αντίστροφης πράξης του πολλαπλασιασμού. Αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία των μαθητών στο να εκτελούν διαιρέσεις εξαρτάται άμεσα από την καλή γνώση της προπαίδειας.

Η επαναλαμβανόμενη αφαίρεση ή πρόσθεση με αντικείμενα δε χρησιμοποιείται σχεδόν καθόλου, αλλά και χωρίς αντικείμενα χρησιμοποιείται πολύ λίγο.

Στο σημείο αυτό μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι, σε γενικές γραμμές, οι μαθητές της πειραματικής ομάδας χρησιμοποιούν πιο αφηρημένες στρατηγικές από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου. Το φαινόμενο αυτό δε φαίνεται πολύ έντονα στην περίπτωση της διαίρεσης, διότι είναι μικρός ο αριθμός των μαθητών από την ομάδα ελέγχου που πετυχαίνουν τις διαιρέσεις, επομένως οι μαθητές αυτοί είναι από τους καλύτερους και χρησιμοποιούν προχωρημένες στρατηγικές.

Συμπεράσματα

Σύμφωνα λοιπόν με τα εμπειρικά αποτελέσματα που είδαμε παραπάνω, η πειραματική διδασκαλία δημιουργεί εμφανή διαφοροποίηση στις επιδόσεις των μαθητών στο τέλος της Β΄ τάξης ως προς την εκτέλεση των απλών πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Η πειραματική αυτή διδασκαλία είχε τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

Αφιερώθηκε περισσότερος χρόνος στην αρχή για την ενασχόληση των παιδιών με καθημερινές εμπειρικές καταστάσεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, για να εδραιωθεί η σημασία και να αποκτήσουν νόημα οι πράξεις αυτές. Οι μαθητές διαθέτουν τα εφόδια για να αντιμετωπίσουν αυτές τις εμπειρικές καταστάσεις εφαρμόζοντας τις διαισθητικές ή άτυπες στρατηγικές της καταμέτρησης, της καταμέτρησης σε ομάδες, της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Στη συνέχεια, περνούμε σε μια φάση κατά την οποία δίνουμε στα παιδιά τη δυνατότητα να λειτουργήσουν ανακατασκευαστικά, δηλαδή να υπολογίσουν άγνωστα γινόμενα με βάση ήδη γνωστές πράξεις και με αυτό τον τρόπο να ανακαλύψουν και να συζητήσουν καινούριες στρατηγικές. Τέλος, σε μια τρίτη φάση δίνουμε έμφαση στην απομνημόνευση και την εξάσκηση με τους πίνακες του πολλαπλασιασμού. Αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι οι τρεις αυτές φάσεις είναι ανεξάρτητες και διαχωρισμένες η μία από την άλλη. Για παράδειγμα, μπορούμε να δουλέψουμε με τους μαθητές από πολύ νωρίς στα γινόμενα και την απομνημόνευση των πινάκων του 2, του 5 και του 10, τα οποία είναι γνωστά στους μαθητές κατά ένα μεγάλο μέρος.

Μια τέτοια λογική στη διδασκαλία είδαμε ότι δημιουργεί πολύ καλύτερες επιδόσεις στους μαθητές σε σχέση με τη σημερινή κατάσταση. Οι μαθητές προχωρούν καλύτερα και πιο σταθερά στην απομνημόνευση των γινομένων και χρησιμοποιούν πιο προωθημένες στρατηγικές όσον αφορά το βαθμό αφαίρεσης, για να υπολογίζουν τα γινόμενα και τα πηλίκα. Γνωρίζουν και χειρίζονται καλύτερα τα γινόμενα με μεγάλους αριθμούς. Επιβεβαιώνονται επίσης τα ευρήματα από τη διεθνή βιβλιογραφία (παράγραφος ΙΙ) σχετικά με το ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων γνωρίζουν και υπολογίζουν ευκολότερα από τα άλλα γινόμενα τα γινόμενα του 5 και του 10. Αυτό σημαίνει ότι κατά τη διδασκαλία μπορούμε να οδηγήσουμε τους μαθητές σε καταστάσεις τέτοιες, ώστε να χρησιμοποιούν τα γινόμενα αυτά ως βάση για να υπολογίζουν άλλα πιο δύσκολα.

Βιβλιογραφία

Anghileri, J. (1989). An investigation of young's children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 367-385.

Carpenter, T.P., Ansell, E., Franke, K.L., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 428-441.

Fischbein, E., Deri M., Nello, M.-S. & Marino, M.-S. (1985). The role of implicit model in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17.

Kouba, V.L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 147-158.

Λεμονίδης, Χ. (2001). Οι αρχικές αριθμητικές ικανότητες των παιδιών όταν έρχονται στο Δημοτικό Σχολείο. *Ευκλείδης Γ΄*, 55, 5-21.

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου.* Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.

Mulligan, J.T. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, 4, 24-42.

Mulligan, J., Mitchelmore, M., (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 309-330.

Selter, C. (1994). *Own Productions in Learning Elementary Arithmetic.* Deutscher Universitätsverlang, Wiesbaden, Germany.

Steffe, L.P. (1994). Children's Multiplying Schemes. In Harel, G. & Confrey, J. (Eds), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-40). N.Y.: State University of New York Press.

Ter Heege, H. (1985). The Acquisition of Basic Multiplication Skills. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 375-388.

Το άρθρο υποβλήθηκε στις 8/4/2002. *Έγινε αποδεκτό στις 2/9/2003*