

6 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

6.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ (Επαναλήψεις-Συμπληρώσεις)

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$

Στο Γυμνάσιο διαπιστώσαμε με την βοήθεια παραδειγμάτων ότι η εξίσωση

$$ax + by = \gamma, \text{ με } a \neq 0 \text{ ή } b \neq 0,$$

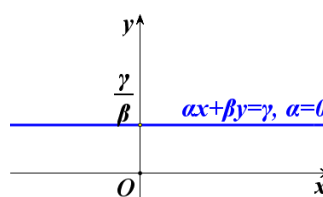
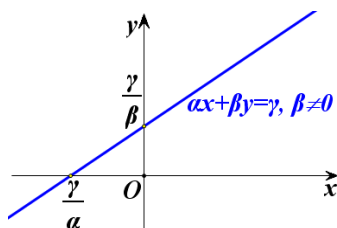
που λέγεται **γραμμική εξίσωση**, παριστάνει ευθεία γραμμή. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το συμπέρασμα αυτό ως εξής:

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $b \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} ax + by = \gamma &\Leftrightarrow by = -ax + \gamma \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b}, \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{a}{b}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\frac{\gamma}{b}$.

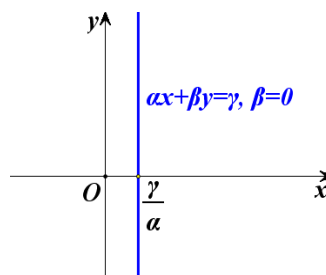


Ειδικότερα:

- ✓ Αν $a \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες (Σχ. α'), ενώ

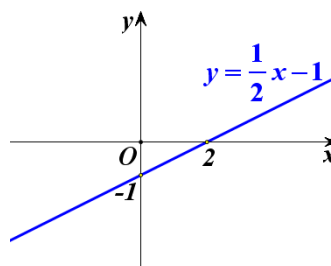
- ✓ Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = \frac{\gamma}{\beta}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\frac{\gamma}{\beta}$ (Σχ. β').
- Αν $\beta = 0$ (οπότε $\alpha \neq 0$), τότε η εξίσωση γράφεται

$$\alpha x = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\alpha}.$$
 Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

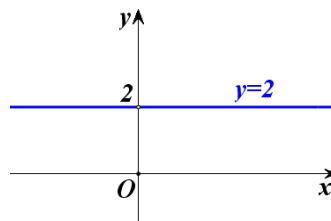


Για παράδειγμα:

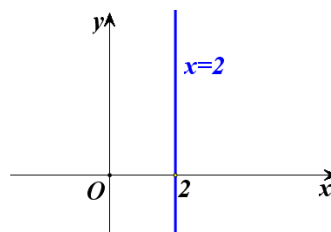
- ✓ Η εξίσωση $x - 2y = 2$ παίρνει τη μορφή $y = \frac{1}{2}x - 1$ η οποία παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{2}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο -1 .



- ✓ Η εξίσωση $y = 2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο 2.



- ✓ Η εξίσωση $x = 2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο 2.



Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται **λύση της γραμμικής εξίσωσης**.

Για παράδειγμα, το ζεύγος $(4, -1)$ είναι λύση της εξίσωσης $x - 2y = 6$, αφού $4 - 2(-1) = 4 + 2 = 6$. Διαπιστώνουμε, όμως, ότι και τα ζεύγη $(16, 5)$, $(-10, -8)$ είναι λύσεις της εξίσωσης και γενικά ότι κάθε ζεύγος της μορφής $\left(k, \frac{1}{2}k - 3\right)$, $k \in \mathbb{R}$ είναι λύση της εξίσωσης.

Γραμμικό σύστημα 2×2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $ax + by = \gamma$ και $a'x + \beta'y = \gamma'$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα **γραμμικό σύστημα 2×2** και γράφουμε

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$$

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος**.

Στο Γυμνάσιο μάθαμε μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλο γραμμικό σύστημα το οποίο έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό. Τα δύο αυτά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα συστήματα**.

Η μετατροπή ενός συστήματος σε ισοδύναμό του γίνεται συνήθως με έναν από τους εξής δύο τρόπους:

- Λύνουμε τη μια εξίσωση του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση.
- Αντικαθιστούμε μια από τις εξισώσεις (ε) ή (ε') του συστήματος, π.χ. την (ε) , με την εξίσωση « $\lambda \cdot (\varepsilon) + \lambda' \cdot (\varepsilon')$ » που προκύπτει, αν στα μέλη της (ε) πολλαπλασιασμένα με $\lambda \neq 0$, προσθέσουμε τα μέλη της (ε') πολλαπλασιασμένα με λ' .
Η εξίσωση $\lambda \cdot (\varepsilon) + \lambda' \cdot (\varepsilon')$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των εξισώσεων (ε) και (ε') .

Η απόδειξη του ότι τα συστήματα που προκύπτουν από τις παραπάνω μετατροπές είναι ισοδύναμα στηρίζεται στις παρακάτω ιδιότητες της ισότητας που είδαμε στο 1^ο κεφάλαιο:

$$\checkmark \quad \text{Αν } \gamma \neq 0, \text{ τότε: } a = \beta \Leftrightarrow a\gamma = \beta\gamma$$

$$\checkmark \quad \text{Αν } a = \beta \text{ και } \gamma = \delta, \text{ τότε } a + \gamma = \beta + \delta.$$

Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x - 2y = 6 & (1) \\ 3x + 4y = 8 & (2) \end{cases}$$

Θα λύσουμε το σύστημα με τις δύο μεθόδους που μάθαμε στο Γυμνάσιο, τη μέθοδο της **αντικατάστασης** και τη μέθοδο των **αντιθέτων συντελεστών** (ή μέθοδο της απαλοιφής)

Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς ένα άγνωστο, π.χ. την (1) ως προς x . Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση το x με την παράσταση που βρήκαμε και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει

$$\begin{aligned} 3(2y + 6) + 4y &= 8 \Leftrightarrow 6y + 18 + 4y = 8 \\ &\Leftrightarrow 10y = -10 \\ &\Leftrightarrow y = -1 \end{aligned}$$

Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του y στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο:

$$x = 2(-1) + 6 = 4$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(4, -1)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή κάνουμε πολλά βήματα μέχρι να λύσουμε ένα σύστημα, είναι πολύ πιθανό να κάνουμε λάθος στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Για το λόγο αυτό είναι σκόπιμο να αντικαθιστούμε τις τιμές των αγνώστων που βρήκαμε στις αρχικές εξισώσεις του συστήματος και να ελέγχουμε αν τις επαληθεύουν, δηλαδή να κάνουμε **επαλήθευση του συστήματος**.

Στο συγκεκριμένο σύστημα, για $x = 4$ και $y = -1$, έχουμε:

1η εξίσωση: $4 - 2(-1) = 6$

2η εξίσωση: $3 \cdot 4 + 4(-1) = 12 - 4 = 8$

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών (ή της απαλοιφής)

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι:

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases} \cdot (-3) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{cases} -3x+6y=-18 \\ 3x+4y=8 \end{cases} \cdot 1$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις που βρήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και επιλύουμε:

$$-3x+6y+3x+4y=-18+8 \Leftrightarrow 10y=-10 \Leftrightarrow y=-1.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε την τιμή του άλλου:

$$x-2(-1)=6 \Leftrightarrow x+2=6 \Leftrightarrow x=4.$$

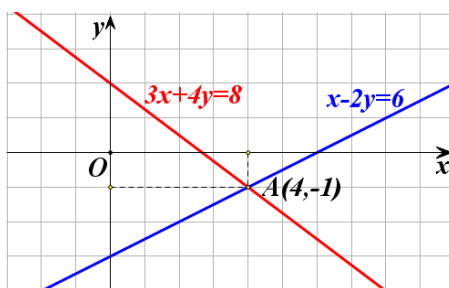
Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(4, -1)$ (η ίδια φυσικά που βρέθηκε και με την προηγούμενη μέθοδο).

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2×2

Κάθε εξίσωση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$$

που λύσαμε προηγουμένως παριστάνει μια ευθεία γραμμή. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών προσδιορίζει τη λύση του συστήματος, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν συγχρόνως τις δύο εξισώσεις του συστήματος.



Γενικά, μπορούμε να επιλύσουμε γραφικά ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

με το να σχεδιάσουμε τις δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του και να βρούμε, εφόσον υπάρχει, το σημείο τομής τους.

Η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 δίνει λύσεις που μπορεί να είναι προσεγγιστικές. Παρά την αδυναμία αυτή, η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 διευκολύνει πάρα πολύ σε περιπτώσεις, όπου μας ενδιαφέρουν μόνο προσεγγιστικές λύσεις του συστήματος ή, ακόμη, όταν η αλγεβρική του επίλυση είναι δυσχερής

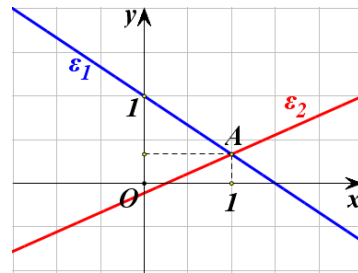
Οι δύο εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 παριστάνουν δύο ευθείες οι οποίες μπορεί να τέμνονται ή να είναι παράλληλες ή ακόμα και να συμπίπτουν.

Για παράδειγμα:

✓ Το σύστημα $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 4x-9y=1 \end{cases}$ γράφεται $\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+1 \\ y=\frac{4}{9}x-\frac{1}{9} \end{cases}$ και έχει μοναδική

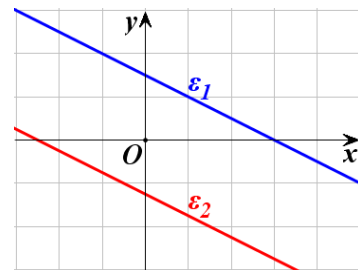
λύση, αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του τέμνονται, επειδή έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης.

Αν χαράξουμε τις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις, βλέπουμε ότι προσεγγιστικά η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(1, 0,3)$. Αν όμως λύσουμε το σύστημα αλγεβρικά, θα βρούμε ότι η ακριβής λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(1, \frac{1}{3})$.



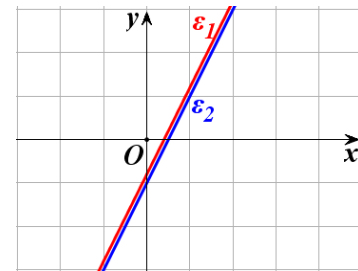
✓ Το σύστημα $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$ γράφεται $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4} \end{cases}$, οπότε είναι αδύνατο,

αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του είναι παράλληλες.



✓ Το σύστημα $\begin{cases} y+1=2x \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ γράφεται $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$, οπότε έχει άπειρο πλήθος

λύσεων, αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος συμπίπτουν. Προφανώς κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής $(k, 2k-1)$, $k \in \mathbb{R}$.



Γενικά, από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 αναμένουμε μια μόνο από τις περιπτώσεις:

- ✓ Το σύστημα να έχει μοναδική λύση
- ✓ Το σύστημα να είναι αδύνατο
- ✓ Το σύστημα να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Λύση – διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2×2

Στη παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 στη γενική του μορφή.

Έστω λοιπόν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$$

Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση που είναι $\beta \neq 0$ και $\beta' \neq 0$. Τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta} & (\varepsilon_1) \\ y = -\frac{\alpha'}{\beta'}x + \frac{\gamma'}{\beta'} & (\varepsilon_2) \end{cases}$$

και οι εξισώσεις του παριστάνουν ευθείες ε_1 και ε_2 με αντίστοιχους συντε-

λεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -\frac{\alpha}{\beta}$ και $\lambda_2 = -\frac{\alpha'}{\beta'}$.

- Αν $-\frac{\alpha}{\beta} \neq -\frac{\alpha'}{\beta'}$, δηλαδή αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης, οπότε τέμνονται σε ένα σημείο του οποίου η τετμημένη προσδιορίζεται από την λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha'}{\beta'}x + \frac{\gamma'}{\beta'} &= -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha'}{\beta'}\right)x = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\gamma'}{\beta'} \\ &\Leftrightarrow (\alpha\beta' - \alpha'\beta)x = \gamma\beta' - \gamma'\beta \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \end{aligned}$$

Η τεταγμένη του σημείου τομής είναι:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\right) + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{-\alpha\gamma\beta' + \alpha\beta\gamma' + \gamma\alpha\beta' - \gamma\alpha'\beta}{\beta(\alpha\beta' - \alpha'\beta)} \\ &= \frac{\beta(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)}{\beta(\alpha\beta' - \alpha'\beta)} \end{aligned}$$

Επομένως $y = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$

Άρα, στην περίπτωση αυτή, το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x, y) = \left(\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \right)$$

- Αν $-\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\alpha'}{\beta'}$, δηλαδή αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, οπότε ή είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις αντιστοίχως.

Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε και στην περίπτωση που είναι $\beta = 0$ ή $\beta' = 0$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα για το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ \alpha'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$$

Έχουμε:

- Αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x, y) = \left(\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \right)$$

- Αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο.

Συνήθως η παράσταση $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, συμβολίζεται με

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

και λέγεται **ορίζουσα του συστήματος**

Δηλαδή:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta.$$

Την ορίζουσα που προκύπτει από την D , αν στην θέση των συντελεστών του x θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με:

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta.$$

Ομοίως, την ορίζουσα που προκύπτει από την D , αν στη θέση των συντελεστών του y θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με:

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma.$$

Τα προηγούμενα συμπεράσματα τα οποία αφορούν στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος συνοψίζονται, με την βοήθεια των οριζουσών, ως εξής:

Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

- αν $D \neq 0$, έχει μοναδική λύση, την (x, y) με $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$
- αν $D = 0$, είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Για παράδειγμα:

✓ Το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$ έχει

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3(-2) = 4 + 6 = 10 \neq 0,$$

οπότε έχει μοναδική λύση. Επειδή

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 16 = 40 \quad \text{και} \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$$

έχουμε:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{40}{10} = 4 \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{10} = -1.$$

Άρα, η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (4, -1)$.

✓ Το σύστημα $\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases}$ έχει

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6) - 4(-3) = -12 + 12 = 0$$

και επομένως το σύστημα αναμένεται ή να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της δεύτερης εξίσωσης με το 2, τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases}$$

δηλαδή έχει μόνο μία εξίσωση την $2x - 3y = 40$. Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις του συστήματος είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$2x - 3y = 40 \Leftrightarrow y = \frac{2x - 40}{3}.$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων τα ζεύγη της μορφής

$$\left(k, \frac{2k-40}{3}\right), \quad k \in \mathbb{R}$$

✓ Το σύστημα $\begin{cases} 3x+y=11 \\ 9x+3y=6 \end{cases}$ έχει

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0$$

και επομένως το σύστημα αναμένεται ή να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Το σύστημα αυτό γράφεται

$$\begin{cases} 3x+y=1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$$

που είναι προφανώς αδύνατο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1^η Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2y = \lambda \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές και οι σταθεροί όροι του συστήματος δεν είναι όλοι συγκεκριμένοι αριθμοί, αλλά εξαρτώνται από το λ . Πρέπει επομένως για τις διάφορες τιμές του λ , να εξετάσουμε πότε προκύπτει σύστημα που έχει μοναδική λύση την οποία και να βρούμε ή πότε προκύπτει σύστημα αδύνατο ή σύστημα με άπειρες λύσεις. Όπως και στις εξισώσεις, ο λ λέγεται **παράμετρος** και η εργασία αυτή λέγεται **διερεύνηση**.

Έχοντας υπόψη τον παραπάνω πίνακα, ακολουθούμε την εξής πορεία.

- Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D , D_x , D_y . Έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda - 1) + \lambda = 2 - \lambda$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^2(\lambda - 1) = \lambda^2(1 - \lambda + 1) = \lambda^2(2 - \lambda)$$

- Βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου, για τις οποίες είναι $D = 0$. Έχουμε:

$$D = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 2$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- ✓ Αν $D \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) , με:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2 - \lambda}{\lambda(\lambda - 2)} = \frac{-(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} = -\frac{1}{\lambda} \quad \text{και}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda^2(2 - \lambda)}{\lambda(\lambda - 2)} = \frac{-\lambda^2(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} = -\lambda.$$

Δηλαδή, για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$, η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(-\frac{1}{\lambda}, -\lambda\right)$.

- ✓ Αν $D = 0$, δηλαδή αν $\lambda = 0$ ή $\lambda = 2$, τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. Συγκεκριμένα:

- Αν $\lambda = 0$, τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 0x - y = -1 \\ 0x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

και άρα είναι αδύνατο.

- Αν $\lambda = 2$, τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

και άρα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Επειδή

$$2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1,$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι όλα τα ζεύγη της μορφής $(k, 2k - 1)$, $k \in \mathbb{R}$.

Γραμμικό Σύστημα 3×3

Μία εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = 0$, με έναν τουλάχιστον από τους συντελεστές a, b, c διάφορο του μηδενός, λέγεται **γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους**.

Λύση μιας γραμμικής εξίσωσης με τρεις αγνώστους λέγεται κάθε τριάδα αριθμών που την επαληθεύει.

Για παράδειγμα η εξίσωση $2x + 3y + z = 6$ είναι μια γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους και η τριάδα $(2, -1, 5)$ είναι μια λύση της εξίσωσης, αφού $2 \cdot 2 + 3(-1) + 5 = 6$.

Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους:

$$a_1x + \beta_1y + \gamma_1z = \delta_1, \quad a_2x + \beta_2y + \gamma_2z = \delta_2 \quad \text{και} \quad a_3x + \beta_3y + \gamma_3z = \delta_3$$

και ζητάμε τις κοινές λύσεις τους, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα **γραμμικό σύστημα 3×3** και γράφουμε

$$\begin{cases} a_1x + \beta_1y + \gamma_1z = \delta_1 \\ a_2x + \beta_2y + \gamma_2z = \delta_2 \\ a_3x + \beta_3y + \gamma_3z = \delta_3 \end{cases}$$

Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε μεθόδους ανάλογες με τις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 .

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -9 & (1) \\ x + 3y - z = 10 & (2) \\ 3x + y - z = 8 & (3) \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης. Λύνουμε τη μία από τις τρεις εξισώσεις ως προς ένα άγνωστο, π.χ. την (3) ως προς z , και αντικαθιστούμε στις άλλες δύο. Έτσι έχουμε:

$$3x + y - z = 8 \Leftrightarrow z = 3x + y - 8 \quad (4)$$

οπότε οι εξισώσεις (1) και (2) γράφονται:

$$\checkmark \quad 2x - y + 3z = -9 \Leftrightarrow 2x - y + 3(3x + y - 8) = -9 \Leftrightarrow 11x + 2y = 15 \quad (5)$$

$$\checkmark \quad x + 3y - z = 10 \Leftrightarrow x + 3y - (3x + y - 8) = 10 \Leftrightarrow -x + y = 1 \quad (6)$$

Οι (5), (6) ορίζουν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} 11x + 2y = 15 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

από την επίλυση του οποίου βρίσκουμε ότι $x=1$ και $y=2$.

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των x και y στην (4) και βρίσκουμε $z=-3$.

Άρα η λύση του αρχικού συστήματος είναι η τριάδα $(1, 2, -3)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 3×3 , όπως είδαμε παραπάνω, ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 , προκύπτει ότι και ένα γραμμικό σύστημα 3×3 ή έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$

i) αλγεβρικά

ii) γραφικά.

2. Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{8} \\ x + y = 45 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \\ 4x + 3y = 8 \end{cases}$

3. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} = 4 - \frac{y+2}{4} \\ \frac{x+3}{2} - 3 = \frac{x-y}{3} \end{cases}$

4. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ \frac{x}{3} - y = -2 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 2y = x + 2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases}$

5. Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών:

i) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 2y = 3x - 8 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

6. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων, χωρίς να τα λύσετε.

i) $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 6x + 7y = 100 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -9x - 3y = 2 \end{cases}$

7. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x + 2y = -2 \\ x + (\sqrt{3}+1)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$

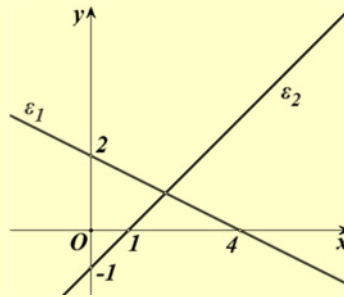
ii) $\begin{cases} (\sqrt{3}+1)x + 4y = 7 \\ \frac{1}{2}x + (\sqrt{3}-1)y = 1 \end{cases}$

8. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} 3x - 2y - \omega = 11 \\ 2x - 5y - 2\omega = 3 \\ 5x + y - 2\omega = 33 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} 5x - y + 3\omega = 4 \\ x - 3y + \omega = 2 \\ 3x - 2y + 2\omega = 2 \end{cases} \quad \text{iii) } \begin{cases} x + \frac{y}{2} - 2\omega = 3 \\ \frac{3x}{2} + y + \omega = 5 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16 \end{cases}$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 του διπλανού σχήματος.
 ii) Ποιο σύστημα ορίζουν οι ε_1 και ε_2 και ποια είναι η λύση του συστήματος;



2. Ένα ξενοδοχείο έχει 26 δωμάτια, άλλα δίκλινα και άλλα τρίκλινα και συνολικά 68 κρεβάτια. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;
3. Σε έναν αγώνα το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 1,5 € και το εισιτήριο ενός ενήλικα 4 €. Τον αγώνα παρακολούθησαν 2200 άτομα και εισπράχτηκαν 5050 €. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι ενήλικες που παρακολούθησαν τον αγώνα.
4. Η αντίσταση R ενός σύρματος ως συνάρτηση της θερμοκρασίας T μπορεί να βρεθεί με τον τύπο $R = aT + \beta$. Αν στους 20°C η αντίσταση ήταν $0,4 \Omega$ και στους 80°C η αντίσταση ήταν $0,5 \Omega$, να βρείτε τα a και β .
5. Ένας χημικός έχει δύο διαλύματα υδροχλωρικού οξέως, το πρώτο έχει περιεκτικότητα 50% σε υδροχλωρικό οξύ και το δεύτερο έχει περιεκτικότητα 80% σε υδροχλωρικό οξύ. Ποια ποσότητα από κάθε διάλυμα πρέπει να αναμειχτεί ώστε να πάρει 100 ml διάλυμα περιεκτικότητας 68% σε υδροχλωρικό οξύ;
6. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + 4y = 3$ και $\varepsilon_2 : x + 2y = a$, $a \in \mathbb{R}$.
- i) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ε_1 και ε_2 .
- ii) Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου a για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται;
- iii) Για ποιες τιμές της παραμέτρου a οι ευθείες είναι παράλληλες;

7. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ τα κοινά σημεία των ευθειών:

i) $\varepsilon_1 : ax + y = a^2$ και $\varepsilon_2 : x + ay = 1$.

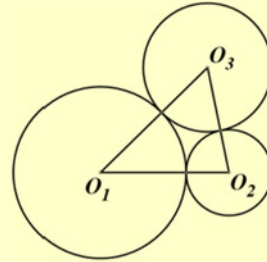
ii) $\varepsilon_3 : ax - y = a$ και $\varepsilon_4 : x + ay = 1$.

8. Να λύσετε τα συστήματα:

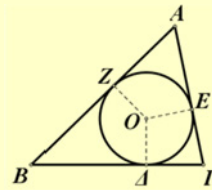
i)
$$\begin{cases} (\lambda-1)x - 2y = 1 \\ 4x - (\lambda+1)y = -2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

ii)
$$\begin{cases} (\mu-2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu+2)y = 5 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

9. Οι κύκλοι του διπλανού σχήματος εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο και ισχύει $O_1O_2 = 6$, $O_1O_3 = 5$ και $O_2O_3 = 7$. Να υπολογίσετε τις ακτίνες των τριών κύκλων.

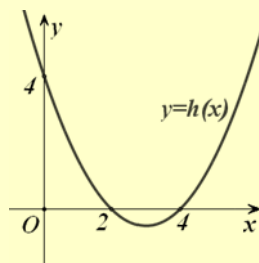
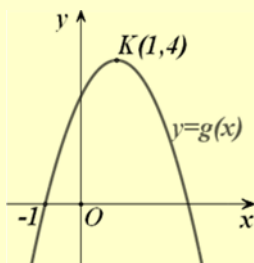
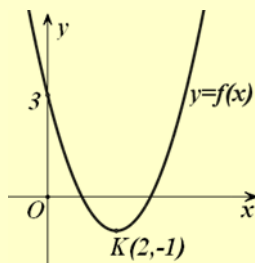


10. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και τον εγγεγραμμένο του κύκλο που εφάπτεται των πλευρών στα σημεία Δ , E και Z . Να υπολογίσετε τα τμήματα $AZ = x$, $B\Delta = y$ και $\Gamma E = z$, συναρτήσει των πλευρών a , β και γ .



11. Ένας χημικός έχει τρία διαλύματα από το ίδιο οξύ. Το πρώτο περιέχει 50% οξύ, το δεύτερο 10% οξύ και το τρίτο 30% οξύ. Ο χημικός θέλει να παρασκευάσει 52 lit διάλυμα περιεκτικότητας 32% σε οξύ, χρησιμοποιώντας και τα τρία διαλύματα και μάλιστα η ποσότητα του πρώτου διαλύματος να είναι διπλάσια από την ποσότητα του τρίτου διαλύματος. Να βρείτε πόσα λίτρα από κάθε διάλυμα θα χρησιμοποιήσει.

12. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών τριωνύμων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $y = ax^2 + bx + \gamma$. Να βρείτε τα τριώνυμα αυτά.



6.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η επίλυση πολλών προβλημάτων οδηγεί συχνά σε ένα σύνολο εξισώσεων των οποίων ζητάμε τις κοινές λύσεις, αλλά οι εξισώσεις αυτές δεν είναι όλες γραμμικές.

Για παράδειγμα, έστω ότι ζητάμε δυο αριθμούς με άθροισμα 13 και άθροισμα τετραγώνων 89.

Αν x, y είναι οι δύο αριθμοί, τότε πρέπει $x + y = 13$ και $x^2 + y^2 = 89$. Επειδή ζητάμε και κοινές λύσεις των δύο εξισώσεων, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 13 & (1) \\ x^2 + y^2 = 89 & (2) \end{cases}$$

Για τη λύση του συστήματος εργαζόμαστε ως εξής:

Επιλύουμε την (1), ως προς έναν άγνωστο, π.χ. ως προς x , και αντικαθιστούμε στη (2).

Έχουμε

$$x + y = 13 \Leftrightarrow y = 13 - x \quad (3).$$

Επομένως

$$\begin{aligned} x^2 + (13 - x)^2 &= 89 \Leftrightarrow x^2 + 169 - 26x + x^2 = 89 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 26x + 80 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 13x + 40 = 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 9$. Επομένως:

$$x = \frac{13 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 8 \\ \searrow 5 \end{matrix}$$

Από την (3), για $x = 8$ έχουμε $y = 5$, ενώ για $x = 5$ έχουμε $y = 8$. Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις τις (8, 5) και (5, 8).

Η απάντηση βέβαια στο πρόβλημα είναι ότι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 5 και 8.

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, διάφορες περιπτώσεις επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ xy = 6 & (2) \end{cases}$.

ΛΥΣΗ**α' τρόπος**

Επιλύουμε την (1) ως προς x και αντικαθιστούμε στη (2). Έχουμε:

$$x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x \quad (3).$$

Επομένως

$$\begin{aligned} xy = 6 &\Leftrightarrow x(5 - x) = 6 \\ &\Leftrightarrow 5x - x^2 = 6 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3. \end{aligned}$$

Από την (3) για $x = 2$ έχουμε $y = 3$, ενώ για $x = 3$ έχουμε $y = 2$. Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις τις $(2, 3)$ και $(3, 2)$.

β' τρόπος

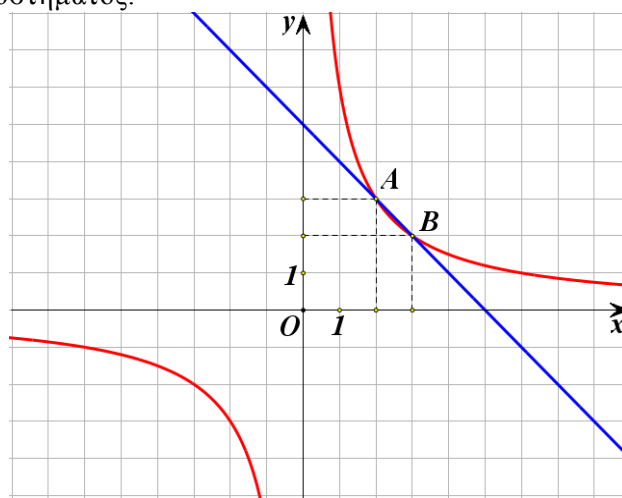
Εξετάζοντας το σύστημα βλέπουμε ότι αναζητούμε δύο αριθμούς για τους οποίους γνωρίζουμε ότι έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 6. Επομένως, από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\omega^2 - 5\omega + 6 = 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι 2 και 3 οπότε οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(2, 3)$ και $(3, 2)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος $x + y = 5$ παριστάνει ευθεία, ενώ η δεύτερη εξίσωση $xy = 6$ παριστάνει την υπερβολή $y = \frac{6}{x}$. Επομένως οι συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της υπερβολής θα μας δώσουν τις λύσεις του συστήματος.



Τα σημεία τομής είναι τα $A(2,3)$ και $B(3,2)$. Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις τις $(2,3)$ και $(3,2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^ο:

$$\text{Να λυθεί το σύστημα } \begin{cases} xy = 6 & (1) \\ x^2 + y^2 = 13 & (2) \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Λύνουμε την (1) ως προς x και αντικαθιστούμε στη (2). Έχουμε

$$xy = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{x}$$

οπότε η (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 13 &\Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 13 \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} = 13 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 36 = 13x^2 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή είναι διτετράγωνη. Αν θέσουμε $x^2 = \omega$, τότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 13\omega + 36 = 0$, της οποίας οι λύσεις είναι η $\omega = 9$ και η $\omega = 4$.

✓ Για $\omega = 9$ έχουμε

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -3$$

Από την (1) για $x = 3$ παίρνουμε $y = 2$ και για $x = -3$ παίρνουμε $y = -2$.

✓ Για $\omega = 4$ έχουμε

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2.$$

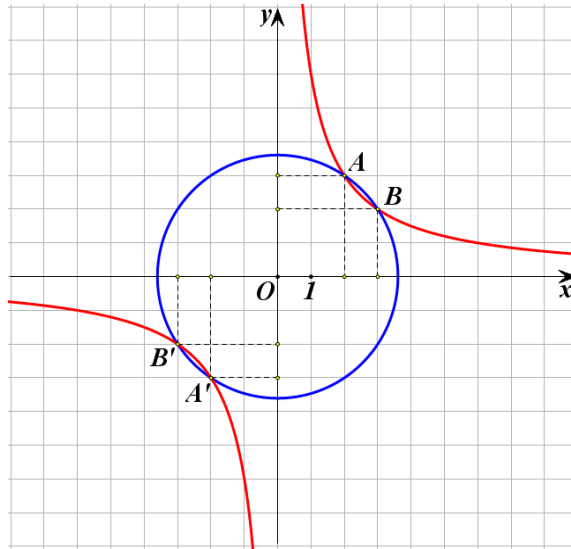
Από την (1) για $x = 2$ παίρνουμε $y = 3$ και για $x = -2$ παίρνουμε $y = -3$.

Άρα το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις τις $(3,2)$, $(-3,-2)$, $(2,3)$ και $(-2,-3)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος $xy = 6$ παριστάνει την υπερβολή $y = \frac{6}{x}$, ενώ η δεύτερη εξίσωση $x^2 + y^2 = 13$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και

ακτίνα $\rho = \sqrt{13}$. Επομένως οι συντεταγμένες των σημείων τομής της υπερβολής και του κύκλου θα μας δώσουν τις λύσεις του συστήματος.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

A' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

2. Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} y = 3x^2 \\ 12x - 3y = 4 \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

iii)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα.

3. Από τους τύπους $S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ και $v = v_0 + a t$, να δείξετε ότι $S = \frac{v + v_0}{2} \cdot t$.

B' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x^2 = 2y + 10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$
 και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα.

2. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$
3. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι 120cm^2 . Αν η μία διάσταση του ορθογωνίου αυξηθεί κατά 3cm , ενώ η άλλη ελαττωθεί κατά 2cm , τότε το εμβαδόν του δεν μεταβάλλεται. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.
4. Δίνεται η παραβολή $y = -x^2$ και η ευθεία $y = 2x + k$, $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του k η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.
5. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ y = x + \mu \end{cases}$$
 και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 6^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα συστήματα:

$$(\Sigma_1): \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}, \quad (\Sigma_2): \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}, \quad (\Sigma_3): \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}, \quad (\Sigma_4): \begin{cases} x - y = 1 \\ x + a^2y = 1 \end{cases}$$

με εκείνη από τις απαντήσεις Α, Β, Γ που νομίζετε ότι είναι η σωστή.

Α) Έχει μοναδική λύση, Β) Είναι αδύνατο, Γ) Έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(Σ_1)	(Σ_2)	(Σ_3)	(Σ_4)

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

- Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Α Ψ
- Αν σε ένα γραμμικό σύστημα είναι $D = 0$, τότε το σύστημα είναι κατ' ανάγκη αδύνατο. Α Ψ
- Το σύστημα
$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$
 είναι αδύνατο. Α Ψ
- Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ και η παραβολή $y = x^2 + 1$ δεν έχουν κοινά σημεία. Α Ψ