

# 7

## ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

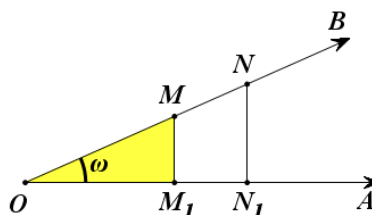
### (Επαναλήψεις – Συμπληρώσεις)

#### 7.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

##### (Επαναλήψεις – Συμπληρώσεις)

#### Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Έστω οξεία γωνία  $\omega$ . Αν πάνω στη μία από τις δύο πλευρές της γωνίας πάρουμε τυχαία σημεία  $M$  και  $N$  και φέρουμε τις κάθετες  $MM_1$  και  $NN_1$  προς την άλλη πλευρά της γωνίας, τότε τα τρίγωνα  $\hat{O}MM_1$  και  $\hat{O}NN_1$  θα είναι όμοια, οπότε θα ισχύει:



$$\frac{(MM_1)}{(OM)} = \frac{(NN_1)}{(ON)}, \quad \frac{(OM_1)}{(OM)} = \frac{(ON_1)}{(ON)} \quad \text{και} \quad \frac{(MM_1)}{(OM_1)} = \frac{(NN_1)}{(ON_1)}$$

Επομένως, για τη γωνία  $\omega$  τα πηλικά

$$\frac{(MM_1)}{(OM)}, \quad \frac{(OM_1)}{(OM)} \quad \text{και} \quad \frac{(MM_1)}{(OM_1)}$$

είναι σταθερά, δηλαδή ανεξάρτητα της θέσης του σημείου  $M$  πάνω στην πλευρά της γωνίας. Τα πηλικά αυτά, όπως γνωρίζουμε από Γυμνάσιο, ονομάζονται **ημίτονο**, **συνημίτονο** και **εφαπτομένη** της γωνίας  $\omega$  και συμβολίζονται με  **$\eta\mu\omega$** ,  **$\sigma\upsilon\eta\omega$**  και  **$\epsilon\phi\omega$** , αντίστοιχως.

Δηλαδή, στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\hat{M}_1OM$ , ισχύει:

$$\eta\mu\omega = \frac{(MM_1)}{(OM)} \quad \left( \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$$

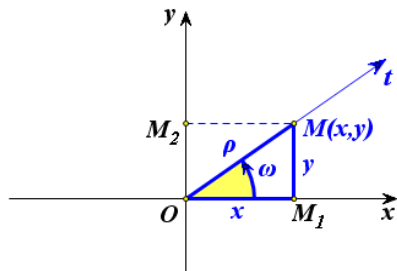
$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{(OM_1)}{(OM)} && \left( \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \right) \\ \epsilon\phi\omega &= \frac{(MM_1)}{(OM_1)} && \left( \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκειμένη κάθετη}} \right) \end{aligned}$$

Ορίζουμε ακόμα ως **συνεφαπτομένη** της οξείας γωνίας  $\omega$ , την οποία συμβολίζουμε με  $\sigma\phi\omega$ , το σταθερό πηλίκο

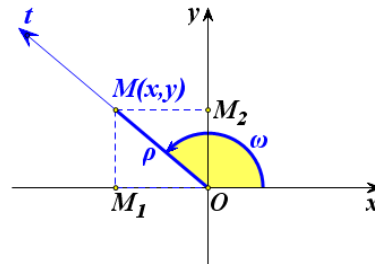
$$\sigma\phi\omega = \frac{(OM_1)}{(MM_1)} \quad \left( \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} \right)$$

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $\omega$ , με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$

Έστω  $Oxy$  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, *Ο*τ μία ημιευθεία αυτού και  $\omega$  η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα  $Ox$  αν περιστραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το  $O$  μέχρι να συμπέσει για πρώτη φορά με την ημιευθεία  $Ot$  (Σχ. α', β'). Ο θετικός ημιάξονας  $Ox$  λέγεται **αρχική πλευρά** της γωνίας  $\omega$ , ενώ η ημιευθεία  $Ot$  λέγεται **τελική πλευρά** της  $\omega$ .



Σχήμα α'



Σχήμα β'

Πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας  $\omega$  παίρνουμε τυχαίο σημείο  $M(x,y)$  και φέρνουμε την κάθετη  $MM_1$  στον άξονα  $x'x$  (Σχ. α' και β').

Αν η γωνία  $\omega$  είναι οξεία (Σχ. α'), τότε, όπως είδαμε παραπάνω, ισχύουν οι ισότητες:

$$\eta\mu\omega = \frac{(M_1M)}{(OM)}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{(OM_1)}{(OM)}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{(M_1M)}{(OM_1)} \quad \text{και} \quad \sigma\phi\omega = \frac{(OM_1)}{(M_1M)}$$

Όμως  $(OM_1) = x$ ,  $(M_1M) = y$  και  $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho > 0$ . Επομένως, οι παραπάνω ισότητες γράφονται:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \quad \text{και} \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y}, \quad \text{όπου} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

Γενικεύοντας τα παραπάνω, ορίζουμε με τον ίδιο τρόπο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας  $\omega$  (Σχήμα β').

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση έχουμε:

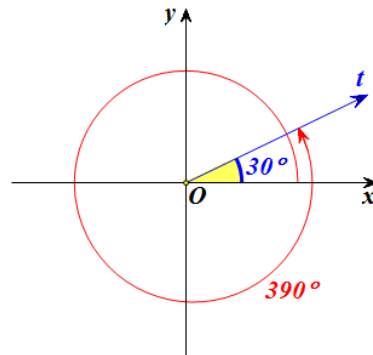
$$\begin{array}{l} \eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \text{ (εφόσον } x \neq 0) \\ \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y} \text{ (εφόσον } y \neq 0) \end{array}, \quad \text{όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

όπου  $(x, y)$  οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου  $M$  (διαφορετικού του  $O$ ) της τελικής πλευράς της γωνίας  $\omega$  και  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  η απόσταση του  $M$  από το  $O$ .

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των $360^\circ$ και αρνητικών γωνιών

Ας υποθέσουμε ότι ο ημιάξονας  $Ox$  ενός συστήματος συντεταγμένων  $Ox$  περιστρέφεται γύρω από το  $O$  κατά τη θετική φορά. Αν πραγματοποιήσει μια πλήρη περιστροφή και περιστραφεί επιπλέον και κατά γωνία μέτρου  $30^\circ$ , τότε λέμε ότι ο  $Ox$  έχει διαγράψει γωνία

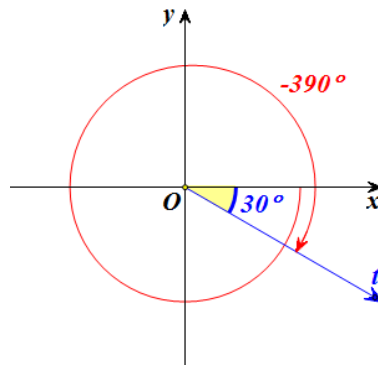
$$\omega = 360^\circ + 30^\circ = 390^\circ.$$



Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι γωνίες που είναι μεγαλύτερες των  $360^\circ$ , δηλαδή οι γωνίες της μορφής:

$$\omega = v \cdot 360^\circ + \mu^\circ, \text{ όπου } v \in \mathbb{N}^* \text{ και } 0 \leq \mu < 360$$

Αν τώρα ο ημιάξονας  $Ox$ , στρεφόμενος γύρω από το  $O$  κατά την αρνητική φορά, πραγματοποιήσει μια πλήρη περιστροφή και στη συνέχεια διαγράψει γωνία μέτρου  $30^\circ$ , τότε λέμε ότι ο ημιάξονας  $Ox$  έχει διαγράψει αρνητική γωνία  $360^\circ + 30^\circ = 390^\circ$  ή αλλιώς γωνία:



$$\omega = -(360^\circ + 30^\circ) = -390^\circ.$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι αρνητικές γωνίες δηλαδή οι γωνίες της μορφής:

$$\omega = -(v \cdot 360^\circ + \mu^\circ), \text{ όπου } v \in \mathbb{N} \text{ και } 0 \leq \mu < 360$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που είναι μεγαλύτερες από  $360^\circ$ , καθώς και των αρνητικών γωνιών, ορίζονται όπως και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών από  $0^\circ$  μέχρι  $360^\circ$ .

Δηλαδή, για κάθε γωνία  $\omega$ , θετική ή αρνητική, ορίζουμε:

$$\begin{array}{l} \eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \quad (\text{εφόσον } x \neq 0) \\ \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y} \quad (\text{εφόσον } y \neq 0) \end{array}, \quad \text{όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

όπου  $(x, y)$  οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου  $M$  της τελικής πλευράς της γωνίας  $\omega$  (διαφορετικού του  $O$ ) και  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  η απόσταση του  $M$  από το  $O$ .

Ας θεωρήσουμε τώρα μια γωνία  $\omega$  (θετική ή αρνητική) με αρχική πλευρά τον ημιάξονα  $Ox$ .

Αν ο ημιάξονας  $Ox$ , στρεφόμενος γύρω από το  $O$  κατά τη θετική φορά, συμπληρώσει  $v$  πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει τη γωνία  $\omega$ , τότε θα έχει διαγράψει γωνία  $v \cdot 360^\circ + \omega$ , που έχει την ίδια τελική πλευρά με την  $\omega$ .

Αν όμως ο ημιάξονας  $Ox$ , στρεφόμενος γύρω από το  $O$  κατά την αρνητική φορά, συμπληρώσει  $v$  πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει τη γωνία  $\omega$ , τότε θα έχει διαγράψει γωνία  $-v \cdot 360^\circ + \omega$ , που έχει και αυτή την ίδια τελική πλευρά με την  $\omega$ .

Οι παραπάνω γωνίες, που είναι της μορφής  $k \cdot 360^\circ + \omega$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , επειδή έχουν την ίδια τελική πλευρά θα έχουν και τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Επομένως, για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$  θα ισχύει:

$$\begin{array}{l} \eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega, \quad \epsilon\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega \\ \sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega, \quad \sigma\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega \end{array}$$

### Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Για έναν κατά προσέγγιση, αλλά σύντομο, υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών, χρησιμοποιούμε τον λεγόμενο τριγωνομετρικό κύκλο. Ο τριγωνομετρικός κύκλος θα μας εξυπηρετήσει και σε άλλους σκοπούς, όπως θα φανεί στις επόμενες παραγράφους.

Με κέντρο την αρχή  $O(0,0)$  ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα  $\rho=1$  γράφουμε έναν κύκλο. Ο κύκλος αυτός λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος**.

Έστω τώρα ότι η τελική πλευρά μιας γωνίας, π.χ. της γωνίας  $\omega=35^\circ$ , τέμνει τον κύκλο αυτό στο σημείο  $N(\alpha, \beta)$ .

Επειδή  $\eta\mu 35^\circ = \frac{\beta}{\rho}$  και  $\rho=1$  θα

ισχύει  $\eta\mu 35^\circ = \beta \approx 0,57$ . Ομοί-

ως, επειδή  $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = \frac{\alpha}{\rho}$  και  $\rho=1$ , θα ισχύει  $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = \alpha \approx 0,82$ .

Γενικότερα, αν η τελική πλευρά μιας γωνίας  $\omega$  τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο  $M(x, y)$ , τότε ισχύει:

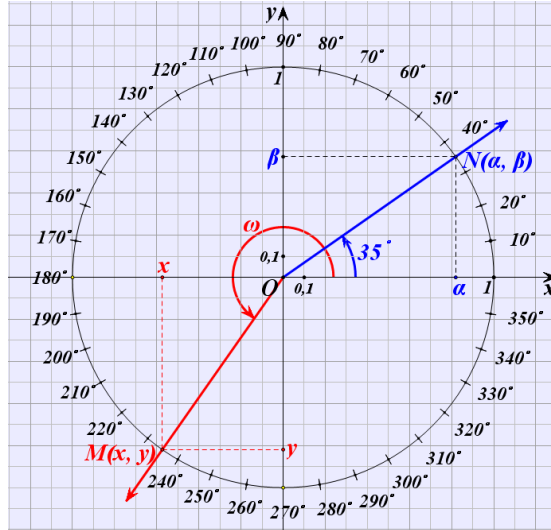
$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\omega &= x = \text{τετμημένη του σημείου } M \\ \eta\mu\omega &= y = \text{τεταγμένη του σημείου } M \end{aligned}$$

Για το λόγο αυτό ο άξονας  $x'x$  λέγεται και **άξονας των συνημίτονων**, ενώ ο άξονας  $y'y$  λέγεται και **άξονας των ημίτονων**.

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω συμπεράσματος είναι οι εξής:

1. Οι τιμές του  $\sigma\upsilon\nu\omega$  και του  $\eta\mu\omega$  μιας γωνίας  $\omega$  δεν μπορούν να υπερβούν κατ' απόλυτη τιμή την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου, που είναι ίση με 1. Δηλαδή ισχύει:

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$$



2. Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας  $\omega$ , ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας.

	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$
$\eta\mu\omega$	+	+	-	-
$\sigma\upsilon\nu\omega$	+	-	-	+
$\varepsilon\varphi\omega$	+	-	+	-
$\sigma\varphi\omega$	+	-	+	-

### Ο άξονας των εφαπτομένων

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μια γωνία  $\omega$  που η τελική της πλευρά τον τέμνει στο σημείο  $M(x, y)$ . Φέρνουμε την εφαπτομένη  $\varepsilon$  του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο  $A$ .

Αν η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο  $1^\circ$  τεταρτημόριο και η ευθεία  $OM$  τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $E$ , τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle AOE$  θα έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{(AE)}{(OA)} = \frac{(AE)}{1} = (AE)$$

Αν με  $y_E$  παραστήσουμε την τεταγμένη του  $E$ , τότε θα ισχύει  $(AE) = y_E$ , οπότε θα είναι

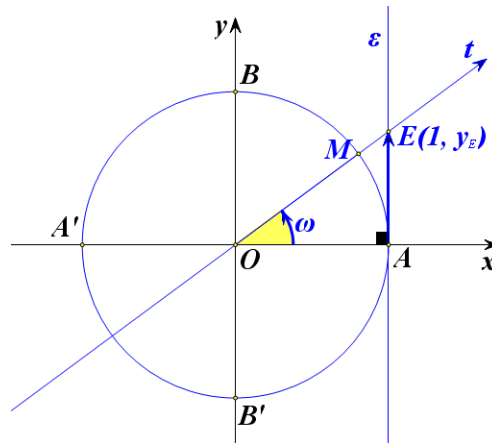
$$\varepsilon\varphi\omega = y_E.$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και όταν η τελική πλευρά της γωνίας  $\omega$  βρίσκεται σε οποιοδήποτε άλλο τεταρτημόριο.

Επομένως σε κάθε περίπτωση ισχύει:

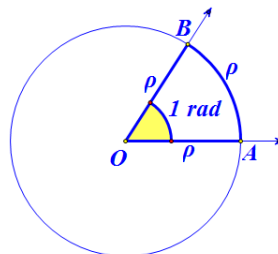
$$\varepsilon\varphi\omega = y_E = \text{τεταγμένη του σημείου E}$$

Για το λόγο αυτό η ευθεία  $\varepsilon$ , που έχει εξίσωση  $x=1$ , λέγεται **άξονας των εφαπτομένων**.



**Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών**

Έχουμε γνωρίσει στο Γυμνάσιο το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων. Συγκεκριμένα, ένα τόξο  $\widehat{AB}$  ενός κύκλου  $(O, \rho)$  λέγεται **τόξο ενός ακτινίου** (ή **1 rad**), αν το τόξο αυτό έχει μήκος ίσο με την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου. Επομένως, το τόξο  $a$  ακτινίων (ή  $a \text{ rad}$ ) έχει μήκος  $S = a \cdot \rho$ .



Ορίζουμε τώρα το ακτίνιο και ως μονάδα μέτρησης των γωνιών ως εξής:

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

**Ακτίνιο** (ή **1 rad**) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή **1 rad**).

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει και η σχέση μοίρας και ακτινίου ως μονάδων μέτρησης γωνιών, ως εξής:

Έστω ότι μια γωνία  $\omega$  είναι  $\mu^\circ$  και  $a \text{ rad}$ . Επειδή το μήκος ενός κύκλου ακτίνας  $\rho$  είναι  $2\pi\rho$ ,

$$\text{η γωνία } 360^\circ \text{ είναι ίση με } 2\pi \text{ rad}.$$

οπότε,

$$\text{η γωνία } 1 \text{ rad} \text{ είναι ίση με } \frac{360}{2\pi} \text{ μοίρες,}$$

Επομένως,

$$\text{η γωνία } a \text{ rad} \text{ είναι ίση με } a \cdot \frac{180}{\pi} \text{ μοίρες.}$$

Επειδή όμως η γωνία  $\omega$  είναι  $\mu^\circ$ , θα ισχύει  $\mu = a \cdot \frac{180}{\pi}$ , οπότε θα έχουμε:

$$\frac{a}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

Για παράδειγμα:

✓ Για να εκφράσουμε τη γωνία  $60^\circ$  σε ακτίνια, θέτουμε στον τύπο

$$\frac{a}{\pi} = \frac{\mu}{180} \text{ όπου } \mu = 60 \text{ και έχουμε}$$

$$\frac{a}{\pi} = \frac{60}{180} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{Άρα είναι } 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}.$$

✓ Για να εκφράσουμε τη γωνία  $\frac{5\pi}{6}rad$  σε μοίρες, θέτουμε στον τύπο

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \text{ όπου } \alpha = \frac{5\pi}{6} \text{ και έχουμε}$$

$$\frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 150$$

Άρα  $\frac{5\pi}{6}rad = 150^\circ$ .

Στον παρακάτω πίνακα επαναλαμβάνουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μερικών γωνιών που είχαμε υπολογίσει στο Γυμνάσιο και οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις διάφορες εφαρμογές.

Γωνία $\omega$		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	$\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi\omega$
$0^\circ$	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
$30^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

### ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Στη συνέχεια, επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο το τόξο  $x rad$  έχει μήκος  $x$ , αντί να γράφουμε

$$\eta\mu(x rad), \sigma\upsilon\nu(x rad), \epsilon\varphi(x rad) \text{ και } \sigma\varphi(x rad),$$

θα γράφουμε απλά

$$\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \epsilon\varphi x \text{ και } \sigma\varphi x.$$

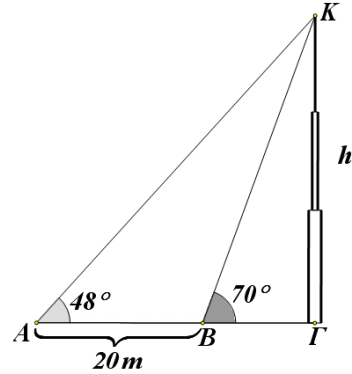
Για παράδειγμα, αντί να γράφουμε π.χ.  $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}rad\right)$  θα γράφουμε απλά  $\eta\mu\frac{\pi}{3}$

και αντί  $\eta\mu(100rad)$  θα γράφουμε απλά  $\eta\mu 100$ .



**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**1<sup>η</sup>** Οι μετρήσεις που έκανε ένας μηχανικός για να βρει το ύψος  $h$  ενός καμπαναριού  $ΓΚ$ , φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογιστεί το ύψος του καμπαναριού σε μέτρα με προσέγγιση ακέραιας μονάδας.

**ΛΥΣΗ**

Από το σχήμα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi 48^\circ = \frac{h}{AG}, \text{ οπότε } AG = \frac{h}{\varepsilon\varphi 48^\circ}$$

$$\varepsilon\varphi 70^\circ = \frac{h}{BG}, \text{ οπότε } BG = \frac{h}{\varepsilon\varphi 70^\circ}$$

$$AG - BG = AB = 20m$$

$$\text{Επομένως } \frac{h}{\varepsilon\varphi 48^\circ} - \frac{h}{\varepsilon\varphi 70^\circ} = 20, \text{ οπότε } h = \frac{20\varepsilon\varphi 70^\circ \cdot \varepsilon\varphi 48^\circ}{\varepsilon\varphi 70^\circ - \varepsilon\varphi 48^\circ}.$$

Με τους τριγωνομετρικούς πίνακες ή με ένα κομπιουτεράκι βρίσκουμε ότι

$$\varepsilon\varphi 70^\circ \approx 2,75 \text{ και } \varepsilon\varphi 48^\circ \approx 1,11.$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε:

$$h \approx \frac{61,05}{1,64} \approx 37$$

Άρα το ύψος του καμπαναριού είναι περίπου  $37m$ .

**2<sup>η</sup>** Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας  $750^\circ$ .

**ΛΥΣΗ**

Αν διαιρέσουμε το  $750$  με το  $360$  βρίσκουμε πηλίκο  $2$  και υπόλοιπο  $30$ , έτσι έχουμε

$$750^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ$$

Επομένως

$$\eta\mu 750^\circ = \eta\mu(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 750^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 750^\circ = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi 750^\circ = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}$$

3<sup>η</sup> Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας  $\frac{79\pi}{3} \text{ rad}$ .

### ΛΥΣΗ

Είναι  $\frac{79\pi}{3} = \frac{79}{6} \cdot 2\pi$ . Αν τώρα διαιρέσουμε τον 79 με τον 6 βρίσκουμε πηλίκο 13 και

υπόλοιπο 1. Επομένως είναι  $\frac{79\pi}{3} = \frac{79}{6} \cdot 2\pi = \left(13 + \frac{1}{6}\right) 2\pi = 13 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$ , οπότε θα έχουμε:

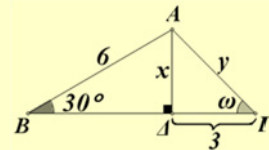
$$\eta\mu \frac{79\pi}{3} = \eta\mu \left(13 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu \frac{79\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon\varphi \frac{79\pi}{3} = \epsilon\varphi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \qquad \sigma\varphi \frac{79\pi}{3} = \sigma\varphi \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

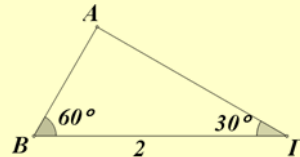
## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη  $x$ ,  $y$  και τη γωνία  $\omega$ .



2. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου του διπλανού σχήματος.



3. Μια επίκεντρη γωνία  $\omega$  βαίνει σε τόξο  $S = 6 \text{ cm}$ . Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια, αν η ακτίνα του κύκλου είναι:

- i)  $\rho = 1 \text{ cm}$                       ii)  $\rho = 2 \text{ cm}$                       iii)  $\rho = 3 \text{ cm}$ .

4. Να εκφράσετε σε  $\text{rad}$  γωνία

- i)  $30^\circ$                       ii)  $120^\circ$                       iii)  $1260^\circ$                       iv)  $-1485^\circ$ .

5. Να μετατρέψετε σε μοίρες γωνία:

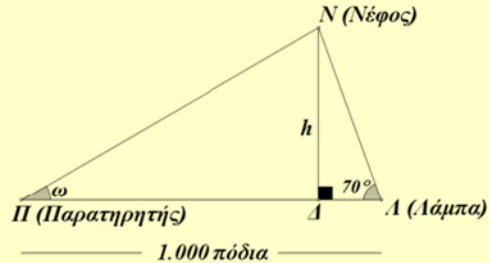
- i)  $\frac{\pi}{10} \text{ rad}$                       ii)  $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$                       iii)  $\frac{91\pi}{3} \text{ rad}$                       iv)  $100 \text{ rad}$ .

6. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας

- i)  $1830^\circ$                       ii)  $2940^\circ$                       iii)  $1980^\circ$                       iv)  $3600^\circ$ .

**B' ΟΜΑΔΑΣ**

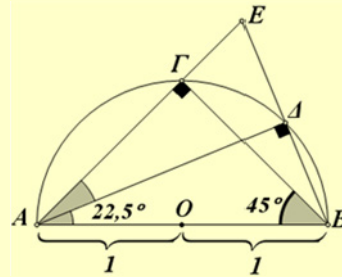
1. Σε μικρά αεροδρόμια υπολογίζουν το ύψος των νεφών με τη βοήθεια μιας ισχυρής λάμπας εντός παραβολικού κατόπτρου, η οποία βρίσκεται σε απόσταση 1000 πόδια (1 πόδι  $\approx 0,3 \text{ m}$ ) από το σημείο του παρατηρητή. Η λάμπα είναι τοποθετημένη υπό σταθερή γωνία και ο παρατηρητής στρέφει το όργανο παρατήρησης στο σημείο ανάκλασης του φωτός από τα νέφη.



- i) Να προσδιορίσετε το ύψος  $h$  για  $\omega = 30^\circ$ ,  $45^\circ$  και  $60^\circ$ .  
 ii) Πόση είναι η γωνία  $\omega$ , αν  $h = 1000$  πόδια;

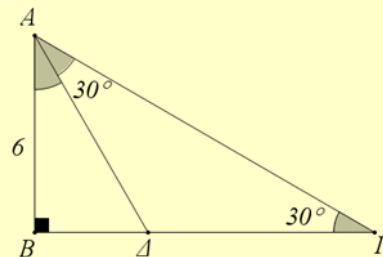
2. Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος:

- i) Να δείξετε ότι:  
 $(ΑΓ) = (ΒΓ) = 2\eta\mu 45^\circ = \sqrt{2}$ .  
 ii) Να εξηγήσετε γιατί είναι  
 $(ΕΒ) = 4 \cdot \eta\mu 22,5^\circ$ .  
 iii) Να υπολογίσετε το μήκος  $(ΓΕ)$ .  
 iv) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας το τρίγωνο  $\hat{B}\hat{E}\hat{G}$ , ότι  $(ΕΒ) = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ .



- v) Να υπολογίσετε το  $\eta\mu 22,5^\circ$ .  
 vi) Ποιων άλλων γωνιών μπορείτε να υπολογίσετε το ημίτονο και πώς πρέπει να συνεχιστεί η κατασκευή για το σκοπό αυτό;

3. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου  $ΑΓΔ$  του διπλανού σχήματος.



4. Η πιο αργή κίνηση που μπορεί να επισημάνει το ανθρώπινο μάτι είναι  $1 \text{ mm}$  ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε πόσο μήκος πρέπει να έχει ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού για να μπορούμε να επισημάνουμε την κίνηση του άκρου του.

## 7.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας  $\omega$  προκύπτουν ορισμένες σχέσεις που τους συνδέουν και είναι γνωστές ως τριγωνομετρικές ταυτότητες. Οι ταυτότητες αυτές είναι χρήσιμες στο λογισμό με παραστάσεις που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Συγκεκριμένα ισχύουν:

1.

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν  $M(x,y)$  είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας  $\omega$  τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι:

$$x = \sigma\upsilon\nu\omega \text{ και } y = \eta\mu\omega$$

Επειδή όμως,

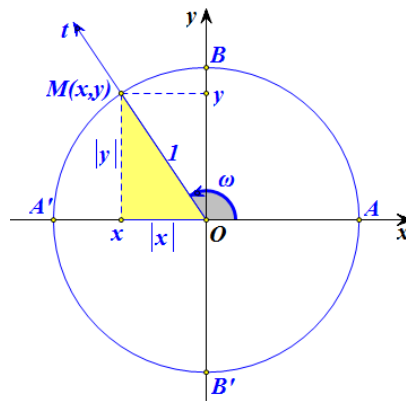
$$(OM) = 1 \text{ και } (OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

θα ισχύει:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

οπότε θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$$



2.

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στο ίδιο σχήμα έχουμε:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad (\text{εφόσον } x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0)$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad (\text{εφόσον } y = \eta\mu\omega \neq 0)$$

Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων (1) και (2), θα αποδείξουμε δύο επιπλέον χρήσιμες ταυτότητες.

3.

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad (\text{εφόσον } \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \quad \text{και} \quad \eta\mu\omega \neq 0)$$

Επομένως:

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1.$$

4.

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

i) Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ταυτότητας  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$  με  $\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0$  και έχουμε:

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

ii) Αν στην ταυτότητα  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$  θέσουμε  $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$ , έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega + \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

$$\text{Άρα } \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**1<sup>η</sup>** Αν  $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ , να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $\omega$ .

**ΛΥΣΗ**

Από την ταυτότητα  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$  προκύπτει ότι  $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$ . Αντικαθιστούμε το  $\eta\mu\omega$  με  $\frac{5}{13}$  και έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Επειδή  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ , είναι  $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$ , οπότε έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

Από τις ταυτότητες τώρα  $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$  και  $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ , έχουμε:

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$$

**2<sup>η</sup>** Να αποδειχθεί ότι

$$\text{i) } \eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega \quad \text{ii) } \eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

**i)** Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega &= (\eta\mu^2\omega)^2 + (\sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 \\ &= (\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 - 2\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega \\ &= 1 - 2\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega, \quad (\text{επειδή } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1) \end{aligned}$$

**ii)** Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega &= (\eta\mu^2\omega)^2 - (\sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 \\ &= (\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega)(\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega) \\ &= \eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega \quad (\text{επειδή } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1) \\ &= \eta\mu^2\omega - (1 - \eta\mu^2\omega) = 2\eta\mu^2\omega - 1. \end{aligned}$$

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

#### Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν  $\eta\mu x = \frac{3}{5}$  και  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x \text{ rad}$ .
2. Αν  $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{2}{3}$  και  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x \text{ rad}$ .
3. Αν  $\epsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  και  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x \text{ rad}$ .
4. Αν  $\sigma\varphi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  και  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x \text{ rad}$ .
5. Αν  $\sigma\varphi x = -2$  και  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$ .
6. Να εξετάσετε, αν υπάρχουν τιμές του  $x$  για τις οποίες:
  - i) Να ισχύει συγχρόνως  $\eta\mu x = 0$  και  $\sigma\upsilon\nu x = 0$ .
  - ii) Να ισχύει συγχρόνως  $\eta\mu x = 1$  και  $\sigma\upsilon\nu x = 1$ .
  - iii) Να ισχύει συγχρόνως  $\eta\mu x = \frac{3}{5}$  και  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$ .
7. Να αποδείξετε ότι, τα σημεία  $M(x, y)$  του επιπέδου με  $x = 3\sigma\upsilon\nu\theta$  και  $y = 3\eta\mu\theta$ , είναι σημεία κύκλου  $O(0, 0)$  κέντρου και ακτίνας  $\rho = 3$ .
8. Αν ισχύει  $x = 2\sigma\upsilon\nu\theta$  και  $y = 3\eta\mu\theta$ , να δείξετε ότι  $9x^2 + 4y^2 = 36$ .
9. Αν είναι  $x = r \eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\varphi$ ,  $y = r \eta\mu\theta \eta\mu\varphi$  και  $z = r \sigma\upsilon\nu\theta$ , να δείξετε ότι  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .
10. Να αποδείξετε ότι:
  - i)  $\frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$
  - ii)  $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$ .

11. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{2}{\eta\mu\theta} \quad \text{ii) } \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

12. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} \quad \text{ii) } \varepsilon\varphi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \varepsilon\varphi^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha.$$

13. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x} + \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \quad \text{ii) } (1-\sigma\upsilon\nu x) \left( 1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = \eta\mu x \cdot \varepsilon\varphi x.$$

$$\text{iii) } \frac{1}{\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x} = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \quad \text{iv) } \left( \frac{1}{\eta\mu x} - \eta\mu x \right) \left( \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x \right) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

### B' ΟΜΑΔΙΑΣ

1. Αν  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \alpha$ , να υπολογίσετε ως συνάρτηση του  $\alpha$  τις παραστάσεις:

$$\text{i) } \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \quad \text{ii) } \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\text{iii) } \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x \quad \text{iv) } \eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x.$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \quad \text{ii) } \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x = 1 - 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x.$$

iii) Η παράσταση  $2(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x) - 3(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)$  έχει τιμή ανεξάρτητη του  $x$ , δηλαδή είναι σταθερή.

3. Αν  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ , να αποδείξετε ότι  $\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} - \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} = 2\varepsilon\varphi x.$

4. Αν  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , να αποδείξετε ότι  $\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x} - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} = \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}.$



### 7.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1<sup>ο</sup> ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

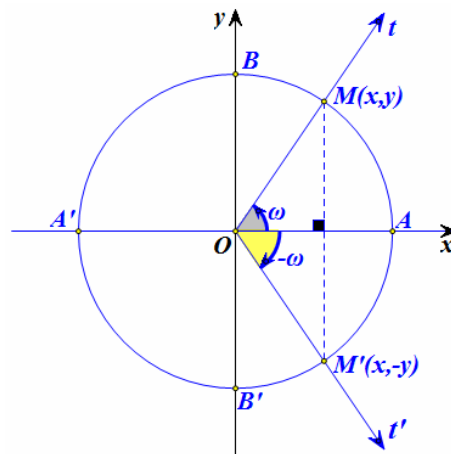
Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας μπορεί να γίνει, όπως θα δούμε στη συνέχεια, με τη βοήθεια πινάκων που δίνουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών από  $0^\circ$  μέχρι  $90^\circ$ .

Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  που οι τελικές πλευρές τους τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία  $M$  και  $M'$  αντιστοίχως.

#### Γωνίες αντίθετες

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  είναι αντίθετες, δηλαδή αν  $\omega' = -\omega$ , τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $x'x$ . Επομένως τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τεταγμένες.

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$	$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
$\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$

Δηλαδή:

**Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.**

Για παράδειγμα:

✓ Έχουμε:

$$\eta\mu(-30^\circ) = -\eta\mu(30^\circ) = -\frac{1}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\varphi(-30^\circ) = -\epsilon\varphi(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \sigma\varphi(-30^\circ) = -\sigma\varphi(30^\circ) = -\sqrt{3}$$

✓ Επίσης, έχουμε:

$$\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

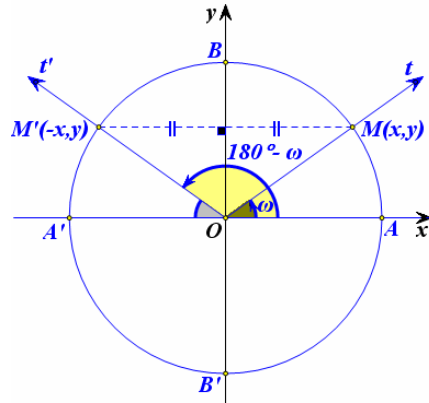
$$\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{4} = -1$$

### Γωνίες με άθροισμα $180^\circ$

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  έχουν άθροισμα  $180^\circ$ , δηλαδή αν  $\omega' = 180^\circ - \omega$ , τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $y'y$ . Επομένως τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
$\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(180^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$

Δηλαδή,

**Οι γωνίες με άθροισμα  $180^\circ$  έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.**

Για παράδειγμα:

✓ Επειδή  $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ , έχουμε:

$$\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 150^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\varepsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi 150^\circ = \sigma\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\varphi 30^\circ = -\sqrt{3}$$

✓ Επειδή  $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ , έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

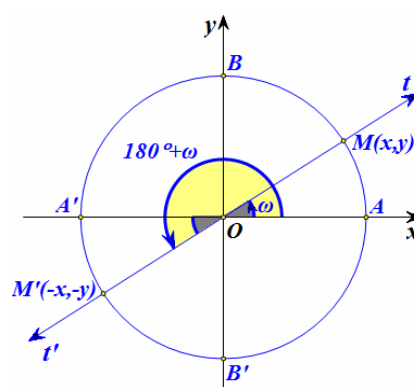
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

### Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  διαφέρουν κατά 180°, δηλαδή αν  $\omega' = 180^\circ + \omega$ , τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Επομένως τα σημεία αυτά έχουν αντίθετες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες.

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
$\varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(180^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$

Δηλαδή,

**Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.**

Για παράδειγμα:

✓ Επειδή  $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ , έχουμε:

$$\eta\mu 210^\circ = \eta\mu(180^\circ + 30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 210^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ + 30^\circ) = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi 210^\circ = \sigma\varphi(180^\circ + 30^\circ) = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}$$

✓ Επειδή  $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ , έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

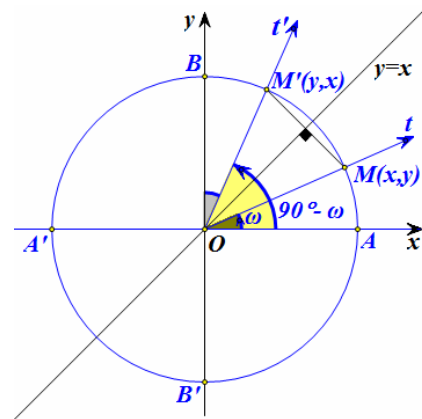
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

### Γωνίες με άθροισμα $90^\circ$

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\omega'$  έχουν άθροισμα  $90^\circ$ , δηλαδή  $\omega' = 90^\circ - \omega$ , τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία  $M$  και  $M'$  είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας  $x\hat{O}y$ . Επομένως η τετμημένη του καθενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου.

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
$\varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$	$\sigma\varphi(90^\circ - \omega) = \varepsilon\varphi\omega$

Δηλαδή,

**Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα  $90^\circ$ , τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.**

Για παράδειγμα, επειδή  $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$ , έχουμε:

$$\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon\varphi 60^\circ = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3} \quad \text{και}$$

$$\sigma\varphi 60^\circ = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**ΣΧΟΛΙΟ**

Από τα προηγούμενα καταλαβαίνουμε ότι δεν χρειάζεται να έχουμε πίνακες τριγωνομετρικών αριθμών όλων των γωνιών, αλλά μόνο των γωνιών από 0° μέχρι 90°.

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**1<sup>η</sup>** Δίνεται ότι  $\sigma\upsilon\nu 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ . Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 54°

**ΛΥΣΗ**

Επειδή  $54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$ , έχουμε

$$\eta\mu 54^\circ = \sigma\upsilon\nu 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα  $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$  ισχύει  $\eta\mu^2 54^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 54^\circ = 1$ , οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu^2 54^\circ = 1 - \eta\mu^2 54^\circ = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16},$$

οπότε

$$\sigma\upsilon\nu 54^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Επομένως είναι:

$$\epsilon\phi 54^\circ = \frac{\eta\mu 54^\circ}{\sigma\upsilon\nu 54^\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \quad \text{και} \quad \sigma\phi 54^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu 54^\circ}{\eta\mu 54^\circ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}.$$

**2<sup>η</sup>** Να υπολογιστεί με τη βοήθεια της γωνίας  $\omega$  οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών:

α)  $90^\circ + \omega$ ,                      β)  $270^\circ - \omega$                       και                      γ)  $270^\circ + \omega$

**ΛΥΣΗ**

i) Επειδή  $90^\circ + \omega = 90^\circ - (-\omega)$ , έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ + \omega) = \eta\mu(90^\circ - (-\omega)) = \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega.$$

Ομοίως υπολογίζονται οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $90^\circ + \omega$ .

ii) Επειδή  $270^\circ - \omega = 180^\circ + (90^\circ - \omega)$ , έχουμε:

$$\eta\mu(270^\circ - \omega) = \eta\mu(180^\circ + (90^\circ - \omega)) = -\eta\mu(90^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega.$$

Ομοίως υπολογίζονται οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $270^\circ - \omega$ .

iii) Επειδή  $270^\circ + \omega = 360^\circ - 90^\circ + \omega = 360^\circ + (\omega - 90^\circ)$ , έχουμε:

$$\epsilon\varphi(270^\circ + \omega) = \epsilon\varphi(\omega - 90^\circ) = -\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega.$$

Ομοίως υπολογίζονται οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $270^\circ + \omega$ .

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

#### A' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

i)  $1200^\circ$

ii)  $-2850^\circ$ .

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας

i)  $\frac{187\pi}{6}$  rad

ii)  $\frac{21\pi}{4}$  rad.

3. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ να αποδείξετε ότι:

i)  $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$

ii)  $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0$

iii)  $\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}$

iv)  $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}$ .

4. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha)}{\eta\mu(-\alpha) \cdot \eta\mu(90^\circ + \alpha)}$ .

5. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{\epsilon\varphi(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu(13\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)} = -1$ .

6. Να δείξετε ότι έχει σταθερή τιμή η παράσταση:

$$\eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

**B' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\eta\mu 495^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\upsilon\nu 495^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu(-120^\circ)}{\epsilon\varphi(-120^\circ) + \epsilon\varphi 495^\circ}.$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(5\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\varphi(5\pi + \omega) \cdot \eta\mu(7\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)} = \eta\mu^2 \omega - 1.$$

3. Αν
- $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 5$
- , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\epsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \epsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$0 < \frac{\epsilon\varphi(\pi + x)}{\epsilon\varphi x + \sigma\varphi(\pi + x)} < 1.$$

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ 7<sup>ου</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**

- I. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα
- A*
- , αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα
- Ψ*
- , αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1.	Αν $\eta\mu\omega = 1$ , τότε υποχρεωτικά θα είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ .	A	Ψ
2.	Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ , τότε υποχρεωτικά θα είναι $\eta\mu\omega = 1$ .	A	Ψ
3.	Υπάρχει γωνία $\omega$ με $\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = 2$ .	A	Ψ
4.	Για κάθε γωνία $\omega$ ισχύει $\eta\mu\omega = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}$	A	Ψ
5.	$\eta\mu^2 20^\circ + \eta\mu^2 70^\circ = 1$	A	Ψ
6.	Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu(x - \pi) = -\eta\mu x$	A	Ψ
7.	Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu^2 x = \eta\mu x^2$	A	Ψ

8. Αν  $\sin(x - \frac{\pi}{2}) + \eta\mu x = 0$ , τότε  $\eta\mu x = 0$       Α Ψ
9. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\sin(x - \frac{\pi}{6}) - \eta\mu(\frac{\pi}{3} + x) = 0$       Α Ψ

II. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της Α' ομάδας με τον ίσο του από τη Β' ομάδα.

Α' ΟΜΑΔΑ		Β' ΟΜΑΔΑ	
1	$\eta\mu 120^\circ$	Α	$-\sqrt{3}$
2	$\sin 150^\circ$	Β	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3	$\eta\mu 210^\circ$	Γ	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
4	$\sin 300^\circ$	Δ	$-\frac{1}{2}$
5	$\epsilon\phi 210^\circ$	Ε	$\frac{1}{2}$
6	$\sigma\phi 300^\circ$	Ζ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
7	$\epsilon\phi 300^\circ$	Η	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
8	$\sigma\phi 210^\circ$	Θ	$\sqrt{3}$

III. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

- Αν ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο ( $A = 90^\circ$ ) και όχι ισοσκελές, τότε:
 

Α)  $\eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 1$ ,    Β)  $\eta\mu^2 B + \sin^2 \Gamma = 1$ ,    Γ)  $\epsilon\phi B = 1$ .
- Αν ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  δεν είναι ορθογώνιο τότε:
 

Α)  $\sin(B + \Gamma) = \sin A$ ,    Β)  $\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu A$ ,    Γ)  $\epsilon\phi(B + \Gamma) = \epsilon\phi A$ .
- Αν ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  δεν είναι ορθογώνιο τότε:
 

Α)  $\sin(\frac{B + \Gamma}{2}) = \eta\mu \frac{A}{2}$ ,    Β),  $\sin(\frac{B + \Gamma}{2}) = \sin \frac{A}{2}$     Γ)  $\epsilon\phi(\frac{B + \Gamma}{2}) = \epsilon\phi \frac{A}{2}$ .



### ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ενώ είναι κοινώς παραδεκτό ότι η γεωμετρία είναι δημιούργημα της κλασικής περιόδου της αρχαίας Ελλάδας, εντούτοις δεν είναι εξίσου γνωστό ότι η τριγωνομετρία είναι δημιούργημα της ελληνιστικής περιόδου με πρωταγωνιστές τον Ίππαρχο, τον Μενέλαο και τον Πτολεμαίο.

Η τριγωνομετρία ξεπήδησε στην προσπάθεια να θεμελιωθεί μια ποσοτική αστρονομία η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να προβλεφθούν οι θέσεις των ουρανίων σωμάτων, ο υπολογισμός του ημερολογίου και να εφαρμοσθεί στη ναυσιπλοΐα και στη γεωγραφία. Θεμελιωτής της αστρονομίας υπήρξε ο Ίππαρχος που έζησε στη Ρόδο και στην Αλεξάνδρεια και πέθανε γύρω στο 125 π.Χ. Για την προσωπική του ζωή ξέρουμε πολύ λίγα και τα περισσότερα που ξέρουμε γι' αυτόν προέρχονται από τα βιβλία του Πτολεμαίου. Ο Ίππαρχος συνέβαλε αποφασιστικά στη διαμόρφωση της θεωρίας των επικύκλων, και ήταν σε θέση να υπολογίσει εκλείψεις της σελήνης με ακρίβεια μιας έως δύο ωρών. Διέθετε επίσης και μια θεωρία για μια ικανοποιητική εξήγηση του φαινομένου των εποχών.

Η σημαντικότερη ανακάλυψη του ήταν ότι τα σημεία που ο άξονας περιστροφής της γης τέμνει την ουράνια σφαίρα μετακινούνται και διαγράφουν κύκλο με περίοδο 2600 χρόνια. Το μεγαλύτερο μέρος της τριγωνομετρίας του Ιπάρχου αναφέρεται σε αυτό που σήμερα ονομάζουμε σφαιρική τριγωνομετρία. Και αυτό είναι μοιραίο, αφού τον ενδιέφεραν κυρίως τρίγωνα που σχηματίζονται πάνω στον ουράνιο θόλο. Όμως ανέπτυξε και βασικά σημεία της επιπέδου τριγωνομετρίας.

Το έργο του Ίππαρχου συνέχισε ο Μενέλαος που έζησε γύρω στο 98 μ.Χ. και του οποίου το βασικό έργο είναι τα «σφαιρικά».

Η ανάπτυξη της ελληνικής τριγωνομετρίας και των εφαρμογών της στην αστρονομία ολοκληρώνεται με το έργο του Πτολεμαίου που έζησε στην Αλεξάνδρεια γύρω στο 168 μ.Χ. και του οποίου το κύριο σύγγραμμα είναι η Αλμαγέστη (αραβική παραφθορά της λέξης «Μεγίστη»).

Το βιβλίο Α της Αλμαγέστης περιέχει όλα τα αναγκαία θεωρήματα για την κατασκευή ενός πίνακα ημιτόνων και συνημιτόνων. Το Βασικό θεώρημα για την κατασκευή αυτού του πίνακα είναι το εξής:

«Έστω  $ABΓΔ$  είναι κυρτό τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τότε ισχύει:

$$AB \cdot ΓΔ + ΑΔ \cdot ΒΓ = ΑΓ \cdot ΒΔ \text{ »}$$

Στο θεώρημα αυτό στηρίχτηκε και ο Πτολεμαίος για να βρει διάφορους τριγωνομετρικούς τύπους μεταξύ των οποίων και αυτού που σήμερα εκφράζουμε ως

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

Η Αλμαγέστη έκανε για την τριγωνομετρία ότι έκαναν τα «Στοιχεία του Ευκλείδη» για τη Γεωμετρία: Την διετύπωσαν στη μορφή που παρέμεινε για τα επόμενα 1000 χρόνια.

Μετά το 200 μ.Χ. με την τριγωνομετρία ασχολήθηκαν και οι Ινδοί με κίνητρο επίσης την αντιμετώπιση αστρονομικών προβλημάτων. Δεν είχαν σημαντική συνεισφορά και αξίζει να σημειωθεί ότι για διάφορους τριγωνομετρικούς και αστρονομικούς όρους όπως κέντρο, λεπτό κτλ., χρησιμοποιούσαν τις ελληνικές λέξεις.

Κατά τα χρόνια του Μεσαίωνα με την τριγωνομετρία ασχολούνται και οι Άραβες, χωρίς να συνεισφέρουν σε αυτήν κάτι σημαντικό δικό τους. Συνέβαλαν όμως στο να μεταδώσουν την Ελληνική τριγωνομετρία στην Ευρώπη.